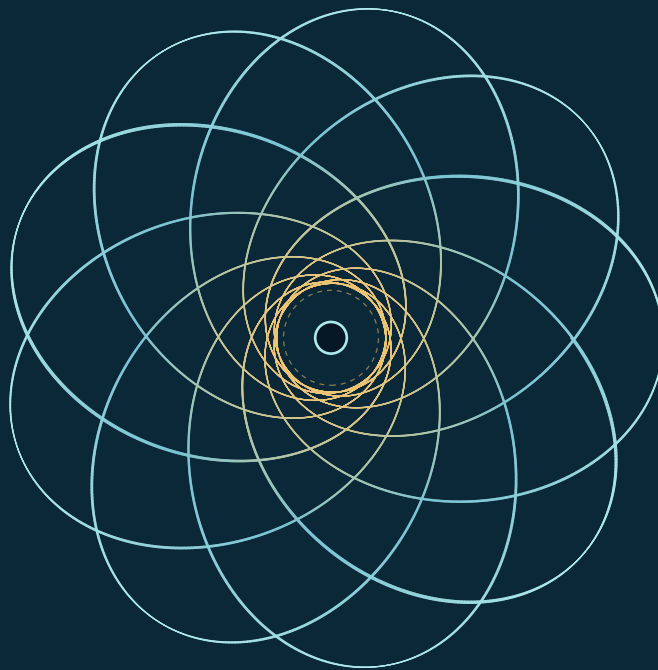


Relatividade Geral

Apostila para um curso de 72 encontros de 50 minutos

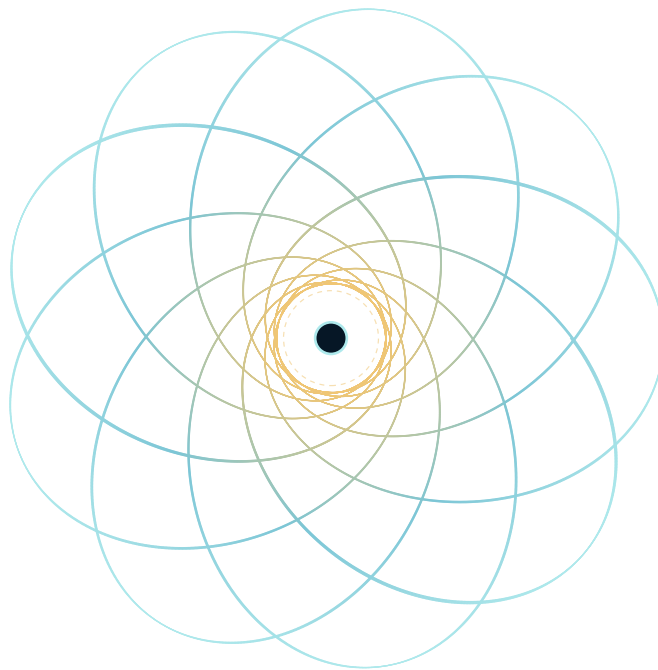


*A órbita que não fecha: a precessão do periélio em Schwarzschild, integrada da equação de campo.
Nenhuma órbita newtoniana faz isso.*

,

Relatividade Geral

Apostila para um curso de 72 encontros de 50 minutos



*A órbita que não fecha: a precessão do periélio em Schwarzschild, integrada da equação de campo.
Nenhuma órbita newtoniana faz isso.*

Prefácio

Estas notas foram organizadas para uma disciplina de Relatividade Geral com 72 encontros de 50 minutos. O objetivo é conduzir o estudante desde a relatividade especial e a linguagem tensorial até aplicações centrais da teoria: ondas gravitacionais, estrelas relativísticas, buracos negros e cosmologia.

O livro de Bernard Schutz, *A First Course in General Relativity*, terceira edição, foi usado como referência principal para a sequência conceitual. A apostila não substitui o livro: ela funciona como roteiro de aula, resumo matemático, coleção de atividades e ponte entre o quadro-negro e os problemas que o estudante deve resolver por conta própria.

O curso assume familiaridade com cálculo vetorial, álgebra linear, equações diferenciais ordinárias, mecânica clássica e eletromagnetismo em nível de graduação. Quando uma ferramenta matemática aparece pela primeira vez, ela é introduzida operacionalmente: primeiro se explica para que serve, depois se formaliza.

Os programas do curso

Oito capítulos trazem uma seção de *Resolução numérica*, e todos os doze capítulos de conteúdo terminam em uma seção de *Conteúdo extra* com três problemas que pedem para modificar um dos programas. Esses programas não são impressos aqui: seria desperdiçar dezenas de páginas com texto que ninguém digita à mão. Cada um deles tem um *notebook* equivalente, que abre no Google Colab com um clique e roda sem instalar nada; quem preferir trabalhar na própria máquina baixa o `.py` ou, no caso das verificações simbólicas, o `.wl`. Tudo está na página da disciplina:

<https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>

Ao longo do texto, uma caixa como esta indica qual arquivo corresponde ao trecho que está sendo discutido; o link leva à página, onde estão o notebook e os downloads:

PROGRAMA[baixar →](#)`codigo/capNN_exemplo.py`

Um exemplo. Toda caixa de programa traz o nome do arquivo e um resumo do que ele faz; o link leva à página de download.

Os números que aparecem nas caixas de saída são a execução real desses scripts, não valores transcritos. Se você alterar um programa e rodá-lo de novo, os números da apostila devem mudar de acordo — e é exatamente isso que o *Conteúdo extra* de cada capítulo pede que você faça.

Convenções e notação

Para não repetir estas escolhas a cada capítulo, elas ficam declaradas aqui de uma vez.

- **Unidades.** Trabalhamos com $c = 1$, de modo que tempo e distância têm a mesma unidade e velocidades são números puros com $|v| < 1$. As constantes são restauradas apenas quando o resultado numérico as exige.
- **Assinatura.** A métrica é $(-, +, +, +)$: vetores temporais têm norma *negativa*. A convenção oposta aparece em parte da literatura e troca o sinal de várias fórmulas, nunca a física.
- **Índices.** Letras gregas $(\mu, \nu, \alpha, \dots)$ correm de 0 a 3 e incluem o tempo; letras latinas $(i, j, k, \dots)$ correm de 1 a 3 e são só espaciais. Índice repetido, uma vez em cima e uma vez embaixo, está somado (convenção de Einstein).
- **Vetores.** Quando o índice é suprimido, um *quadrivetor* leva seta — $\vec{A}, \vec{U}, \vec{p}$ — e um *trivetor* vai em negrito — $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{E}$. Assim $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$ é o produto de Minkowski do quadrimomento, enquanto $\boldsymbol{p}^2$ é o quadrado euclidiano do trimomento; sem essa distinção, p^2 é ambíguo. Vetores de espaços euclidianos auxiliares (a base $\{e_1, e_2\}$ de um plano, por exemplo) também vão em negrito.
- **Produto escalar.** $\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu$ em espaço-tempo plano, e $g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ em espaço curvo. O ponto entre trivetores é sempre o produto euclidiano usual.
- **Energia medida por um observador.** A energia de uma partícula de quadrimomento $\vec{p}$, medida por um observador de quadrivelocidade $\vec{U}$, é $E = -\vec{p} \cdot \vec{U} = -p_\mu U^\mu$. É a forma covariante de “componente temporal do quadrimomento”, e vale igual em espaço curvo.

Sumário

Prefácio	i
Os programas do curso	i
Convenções e notação	ii
Plano do curso	1
Ementa expandida	1
Objetivos de aprendizagem	1
Distribuição dos 72 encontros	2
Avaliação sugerida	3
Calendário aula a aula	3
1 Relatividade especial	7
1.1 Newton e Einstein: duas visões de mundo	7
1.2 Eventos, observadores e intervalo	10
1.3 Tempo próprio	15
1.4 Transformações de Lorentz	16
1.5 Consequências: o que se mede	18
1.6 Diagramas de Minkowski e hipérboles invariantes	20
1.7 Paradoxo dos gêmeos	22
1.8 A velocidade invariante é única	25
1.9 As transformações em forma matricial	29
1.10 Problemas orientados	33
1.11 Exemplos resolvidos adicionais	34
1.12 Resolução numérica	36
1.12.1 Python	36
1.12.2 Mathematica	37
1.13 Exercícios	39

1.14	Conteúdo extra	40
1.15	Indo além: a rapidez e o fator Doppler	41
2	Vetores e momento relativístico	45
2.1	Vetores no espaço-tempo	45
2.2	Produto escalar	46
2.3	Quadrivelocidade	48
	Interlúdio: os vetores da base	53
2.4	Quadrimento	59
2.5	Conservação	61
2.6	Energia como componente temporal	65
2.7	Centro de momento	66
2.8	Partículas massivas e partículas sem massa	67
2.9	Problemas orientados	68
2.10	Exemplos resolvidos adicionais	70
2.11	Resolução numérica	73
2.11.1	Python	73
2.11.2	Mathematica	74
2.12	Exercícios	75
2.13	Conteúdo extra	76
3	Tensores no espaço-tempo plano	78
3.1	1-formas: por que elas existem	78
3.1.1	A imagem: uma pilha de superfícies	80
3.1.2	Dobrar a seta não é dobrar a pilha	81
	Interlúdio: o mínimo de álgebra linear	84
3.2	A base dual	87
3.3	Tensores de tipo (r, s)	88
3.4	Índices: a regra e os erros	88
	Interlúdio: o Tesseracto	90
3.5	Simetria e antissimetria	93
3.6	A métrica como ponte	93
3.7	O que significa uma equação tensorial	95
3.8	Componentes fora de uma base ortonormal	95

3.8.1	Uma base curvilínea: as coordenadas polares	95
3.8.2	Uma base genuinamente oblíqua	98
3.9	Derivada de um tensor	99
3.10	Problemas orientados	100
3.11	Exemplos resolvidos adicionais	101
3.12	Resolução numérica	103
3.12.1	Python	103
3.12.2	Mathematica	103
3.13	Exercícios	104
3.14	Conteúdo extra	105
	Leitura extra: derivadas e diferenciais	106
4	Fluidos relativísticos	109
4.1	O que é um fluido	109
4.2	Poeira: densidade e fluxo	111
4.3	O vetor fluxo de número	112
4.4	Densidade é um fluxo temporal	113
4.5	1-formas, superfícies e o fluxo invariante	113
4.6	Conservação do número de partículas	115
4.7	O tensor energia-momento	115
4.8	Tensões e a simetria do tensor	117
4.9	Fluidos gerais: energia interna e a primeira lei	118
4.10	O fluido perfeito	118
4.11	Conservação: continuidade e Euler	119
4.12	Equações de estado	120
4.13	Lei de Gauss em quatro dimensões	121
4.14	Por que isso importa para a relatividade geral	122
4.15	Exemplos resolvidos adicionais	122
4.16	Problemas orientados	124
4.17	Exercícios	125
4.18	Conteúdo extra	126
5	Da gravidade à curvatura	127
5.1	O princípio da equivalência	127

5.2	Coordenadas curvilíneas	129
5.3	Bases coordenadas e bases não coordenadas	129
5.4	Geodésicas e os símbolos de Christoffel	131
5.5	Christoffel não é força	133
5.6	Marés como sinal de curvatura	133
5.7	Problemas orientados	133
5.8	Exercícios	135
5.9	Conteúdo extra	136
6	Derivada covariante e curvatura	137
6.1	Variedades e métricas	137
6.2	Derivada covariante	137
6.3	Curvatura	139
6.4	Compatibilidade métrica	139
6.5	Simetrias do tensor de Riemann	140
6.6	Curvatura intrínseca e extrínseca	140
6.7	Desvio geodésico	140
6.8	Problemas orientados	141
6.9	Exemplos resolvidos adicionais	141
6.10	Resolução numérica	143
6.10.1	Python	143
6.10.2	Mathematica	146
6.11	Exercícios	148
6.12	Conteúdo extra	149
7	Física em espaço-tempo curvo	150
7.1	Movimento livre	150
7.2	Energia medida por um observador	150
7.3	Simetrias e quantidades conservadas	150
7.4	Observadores não são coordenadas	152
7.5	Tetradas locais	152
7.6	Constantes de movimento e energia local	152
7.7	Problemas orientados	153
7.8	Exercícios	154

7.9	Conteúdo extra	155
8	Equações de Einstein	156
8.1	A equação de campo	156
8.2	Limite newtoniano	156
8.3	Conservação local	157
8.4	Por que o tensor de Einstein	157
8.5	A ação de Einstein–Hilbert	157
8.6	Traço das equações de campo	159
8.7	O limite fraco com mais detalhe	159
8.8	Constante cosmológica como fluido	160
8.9	Problemas orientados	160
8.10	Exemplos resolvidos adicionais	161
8.11	Exercícios	162
8.12	Conteúdo extra	163
9	Ondas gravitacionais	164
9.1	Campo fraco	164
9.2	Polarizações	164
9.3	Deteção	164
9.4	Emissão	165
9.5	Gauge e graus de liberdade	165
9.6	Efeito sobre partículas teste	166
9.7	Escalas de detecção	166
9.8	Binárias compactas	166
9.9	Problemas orientados	167
9.10	Erros comuns e interpretação	167
9.11	Resolução numérica	169
9.11.1	Python	169
9.11.2	Mathematica	173
9.12	Exercícios	174
9.13	Conteúdo extra	175
10	Soluções esféricas e Schwarzschild	176

10.1	Métrica de Schwarzschild	176
10.2	Redshift gravitacional	176
10.3	Geodésicas e potencial efetivo	177
10.4	Estrelas relativísticas	177
10.5	Coordenada areal	177
10.6	Órbitas circulares	178
10.7	Órbita de fótons	178
10.8	Testes clássicos	178
10.9	Lentes gravitacionais	180
10.10	Problemas orientados	181
10.11	Erros comuns e interpretação	181
10.12	Resolução numérica	183
10.12.1	Python	183
10.12.2	Mathematica	186
10.13	Exercícios	188
10.14	Conteúdo extra	189
11	Buracos negros	190
11.1	Horizonte	190
11.2	Coordenadas regulares	190
11.3	Buracos negros em rotação	190
11.4	Termodinâmica	191
11.5	Horizon versus singularidade	191
11.6	Diagramas causais	191
11.7	Buracos negros reais	191
11.8	Leis da mecânica de buracos negros	192
11.9	Problemas orientados	192
11.10	Erros comuns e interpretação	193
11.11	Resolução numérica	194
11.11.1	Python	194
11.11.2	Mathematica	198
11.12	Exercícios	199
11.13	Conteúdo extra	200

12 Cosmologia relativística	201
12.1 Princípio cosmológico	201
12.2 Redshift cosmológico	201
12.3 Equações de Friedmann	201
12.4 Distâncias em cosmologia	202
12.5 Horizontes cosmológicos	202
12.6 Eras de dominação	203
12.7 Parâmetros observacionais	203
12.8 Problemas conceituais	203
12.9 Problemas orientados	204
12.10 Erros comuns e interpretação	204
12.11 Síntese conceitual do curso	205
12.12 Resolução numérica	206
12.12.1 Python	206
12.12.2 Mathematica	208
12.13 Exercícios	210
12.14 Conteúdo extra	211
13 Projetos finais	212
13.1 Projeto 1: geodésicas em Schwarzschild	212
13.2 Projeto 2: redshift gravitacional	212
13.3 Projeto 3: ondas gravitacionais	212
13.4 Projeto 4: cosmologias simples	212
A Truques com índices e tensores	213
A.1 A filosofia dos índices	213
A.2 Delta de Kronecker	214
A.3 Índices mudos e troca de nomes	214
A.4 Símbolo de Levi-Civita	215
A.5 A identidade fundamental	215
A.6 Derivadas como índices	216
A.7 Rotacional do rotacional	217
A.8 Tradução para relatividade	217
A.9 Checklist para não errar	217

B	A invariância do intervalo: demonstração geral	219
C	Resumo de fórmulas	223
C.1	Relatividade especial	223
C.2	Geometria	223
C.3	Einstein	223
C.4	Ondas gravitacionais	223
C.5	Schwarzschild	224
C.6	Cosmologia	224
D	Bibliografia comentada	225

Plano do curso

Ementa expandida

Relatividade restrita. Espaço-tempo de Minkowski. Diagramas espaço-tempo. Quadri vetores. Energia, momento e fótons. Tensores, formas lineares, métrica e notação de índices. Fluido perfeito e tensor energia-momento. Princípio da equivalência. Coordenadas curvilíneas. Derivada covariante, transporte paralelo, geodésicas e curvatura. Equações de Einstein. Limite newtoniano. Ondas gravitacionais. Soluções esfericamente simétricas. Estrelas relativísticas. Geometria de Schwarzschild. Buracos negros. Cosmologia de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Problemas selecionados de astrofísica relativística.

Objetivos de aprendizagem

Ao final do curso, o estudante deverá ser capaz de:

- usar quadri vetores e tensores em espaço-tempo plano e curvo;
- interpretar a métrica como objeto geométrico e físico;
- calcular símbolos de Christoffel, geodésicas e curvatura em exemplos simples;
- explicar o princípio da equivalência e sua relação com a geometrização da gravidade;
- derivar o limite newtoniano das equações de Einstein;
- aplicar a métrica de Schwarzschild a órbitas, desvio da luz, redshift gravitacional e horizonte;
- descrever a física básica de ondas gravitacionais e seus detectores;
- formular as equações cosmológicas de Friedmann e interpretar soluções simples.

Distribuição dos 72 encontros

A tabela abaixo e o [calendário aula a aula](#) descrevem o mesmo plano em duas resoluções: aqui por módulo, lá aula a aula. O número de encontros de cada módulo foi calibrado pela extensão real do capítulo correspondente, de modo que a média fica em torno de duas páginas por encontro. Os capítulos de 5 a 8 recebem proporcionalmente menos páginas por aula de propósito: são os mais densos conceitualmente, e neles o quadro-negro faz mais trabalho que o texto. A apresentação da disciplina é feita na aula 1, junto com a Seção 1.1 — que é o contraste entre Newton e Einstein, e serve de abertura melhor do que um encontro só de avisos.

Encontros	Módulo	Conteúdo
1–4	Relatividade especial	Apresentação da disciplina, postulados, intervalos, transformações de Lorentz, diagramas, paradoxo dos gêmeos.
5–10	Vetores relativísticos	Quadrivelocidade, quadrimomento, produto escalar, fótons, colisões e decaimentos.
11–15	Tensores em Minkowski	1-formas, métrica, tensores mistos, mudança de base, derivadas.
16–20	Fluidos relativísticos	Fluxo de partículas, tensor energia-momento, fluido perfeito, conservação.
21–24	Da gravidade à curvatura	Equivalência, marés, coordenadas curvilíneas, bases não coordenadas, geodésicas.
25–29	Variedades curvas	Derivada covariante, transporte paralelo, tensor de Riemann, Ricci, escalar de curvatura, Bianchi.
30–33	Física em espaço-tempo curvo	Referenciais locais, tetradas, vetores de Killing e constantes de movimento.
34–38	Equações de Einstein	Motivação, ação de Einstein–Hilbert, traço, limite fraco, limite newtoniano, constante cosmológica.
39–45	Ondas gravitacionais	Perturbações lineares, gauge TT, polarizações, fórmula do quadrupolo, detectores, inspiral.
46–52	Estrelas e Schwarzschild	Simetria esférica, equações TOV, exterior de Schwarzschild, órbitas, testes clássicos, lentes.
53–58	Buracos negros	Horizonte, coordenadas regulares, Kruskal, Kerr, termodinâmica.
59–64	Cosmologia	Métrica FLRW, redshift cosmológico, Friedmann, distâncias, horizontes, parâmetros observacionais.
65–72	Revisão, projetos e síntese	Revisão técnica, desenvolvimento dos quatro projetos finais, síntese conceitual, seminários e duas aulas de reserva.

ROTEIRO DE AULA

As oficinas computacionais. Oito capítulos trazem uma seção de resolução numérica, e o calendário reserva um ou dois encontros para cada uma delas (aulas 4, 10, 15, 29, 44–45, 52, 57–58 e 63–64). Elas não são material complementar: são o lugar onde os resultados enunciados no texto viram números verificados, e alimentam diretamente os quatro projetos finais. Todos os scripts acompanham a apostila em código/ e rodam sem argumentos.

Avaliação sugerida

- Listas quinzenais de problemas: 40%.
- Duas provas escritas: 40%.
- Seminário final ou projeto computacional curto: 20%.

Calendário aula a aula

A coluna *Seções* traz a numeração exata a cobrir em cada encontro. Ela não é escrita à mão: o script `codigo/gerar_calendario.py` declara o plano por título de seção e resolve os números no sumário da última compilação, de modo que a tabela acompanha qualquer mudança na estrutura do texto.

Aula	Foco	Seções	Conteúdo
1	Apresentação, Newton e Einstein	1.1, 1.2	Plano do curso e critérios de avaliação, no primeiro tempo. Newton e Einstein: duas visões de mundo, com os dois postulados e a falha da transformação de Galileu; Eventos, observadores e intervalo, com a prova da invariância pelo relógio de luz.
2	Tempo próprio e Lorentz	1.3, 1.4	Relatividade especial: Tempo próprio; Transformações de Lorentz, com o teste da transformação de Galileu contra o intervalo e a dedução a partir da invariância.
3	O que se mede, diagramas e gêmeos	1.5, 1.6, 1.7	Relatividade especial: Consequências — contração de Lorentz, reciprocidade e composição de velocidades, todas deduzidas de (1.4). Apoio opcional: Apêndice B, a demonstração geral da invariância. Diagramas de Minkowski, construção dos eixos de S' e hipérbolas invariantes; Paradoxo dos gêmeos.
4	Sem postular a luz, e oficina	1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15	Relatividade especial: A velocidade invariante é única (aprofundamento, dispensável em primeira leitura); Problemas orientados; Exemplos resolvidos adicionais. Resolução numérica (Python e Mathematica); Exercícios.
5	Vetores e produto escalar	2.1, 2.2	Vetores e momento relativístico: o critério de transformação que define um quadri vetor; produto escalar e métrica de Minkowski.

Aula	Foco	Seções	Conteúdo
6	Quadrivelocidade e quadrimomento	2.3, 2.4	Vetores e momento relativístico: Quadrivelocidade, incluindo a aceleração própria constante e o horizonte de Rindler; o Interlúdio sobre os vetores da base, com a métrica como tabela de produtos escalares (Schutz §2.2); Quadrimomento.
7	Conservação e energia	2.5, 2.6	Vetores e momento relativístico: Conservação do quadrimomento; Energia como componente temporal e massa invariante de sistemas.
8	Centro de momento e colisões	2.7, 2.8	Vetores e momento relativístico: Centro de momento; Partículas massivas e partículas sem massa.
9	Compton, Doppler e foguete	2.9, 2.10	Vetores e momento relativístico: Problemas orientados; Exemplos resolvidos adicionais.
10	Oficina computacional II	2.11, 2.12, 2.13	Vetores e momento relativístico: Resolução numérica; Exercícios; Conteúdo extra.
11	1-formas e a base dual	3.1, 3.2	Tensores no espaço-tempo plano: o gradiente transforma com a matriz inversa e por isso não é vetor; a pilha de superfícies, e o que muda ao dobrar a seta ou dobrar a pilha; o Interlúdio sobre os axiomas de espaço vetorial, com o paralelo entre 1-formas e os bras da mecânica quântica; a base dual. Apoio: Apêndice A, A filosofia dos índices e Delta de Kronecker.
12	Tensores, índices e simetrias	3.3, 3.4, 3.5	Tensores no espaço-tempo plano: tensores de tipo (r, s) e a lei que os define; a regra dos índices e os três erros que dela decorrem; simetria e antissimetria, e a contração que se anula de graça. Apoio: Apêndice A, Índices mudos e troca de nomes.
13	A métrica como ponte	3.6, 3.7	Tensores no espaço-tempo plano: a métrica traduz vetores em 1-formas; métrica inversa e subida de índices; o que significa, afinal, uma equação tensorial. Apoio: Apêndice A, Tradução para relatividade.
14	Bases oblíquas e a derivada	3.8, 3.9, 3.10, 3.11	Tensores no espaço-tempo plano: componentes em uma base oblíqua e a base recíproca; Derivada de um tensor (e por que ela deixa de funcionar em espaço curvo); Exemplos resolvidos adicionais; Problemas orientados. Apoio: Apêndice A, Checklist para não errar.
15	Oficina computacional III	3.12, 3.13, 3.14	Tensores no espaço-tempo plano: Resolução numérica; Exercícios. Apoio opcional: Apêndice A, Símbolo de Levi-Civita e A identidade fundamental.
16	O que é um fluido	4.1, 4.2, 4.3	Fluidos relativísticos: o que é um fluido; poeira como o caso mais simples, com densidade e fluxo; o vetor fluxo de número.
17	Fluxo de número e conservação	4.4, 4.5, 4.6	Fluidos relativísticos: densidade como um fluxo temporal; 1-formas, superfícies e o fluxo invariante; conservação do número de partículas.
18	O tensor energia-momento	4.7, 4.8	Fluidos relativísticos: o tensor energia-momento componente a componente; tensões, e o argumento que força a simetria.
19	Fluido perfeito e Euler	4.9, 4.10, 4.11	Fluidos relativísticos: fluidos gerais, energia interna e a primeira lei; o fluido perfeito; a conservação que devolve continuidade e Euler.
20	Equações de estado e fechamento	4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18	Fluidos relativísticos: equações de estado; lei de Gauss em quatro dimensões; por que isso importa para a relatividade geral. Exemplos resolvidos, problemas orientados e exercícios.
21	Por que o espaço-tempo não é plano	5.1	Da gravidade à curvatura: O princípio da equivalência, e o argumento do redshift na torre — se o quadrilátero não fecha, a geometria não é a de Minkowski.

Aula	Foco	Seções	Conteúdo
22	Coordenadas curvilíneas e bases	5.2, 5.3	Da gravidade à curvatura: Coordenadas curvilíneas; bases coordenadas contra bases ortonormais, e por que as fórmulas do cálculo vetorial parecem diferentes.
23	Geodésicas e Christoffel	5.4	Da gravidade à curvatura: dedução da equação geodésica por princípio variacional, de onde sai a fórmula dos símbolos de Christoffel.
24	Christoffel não é força	5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9	Da gravidade à curvatura: Christoffel não é força; Marés como sinal de curvatura; Problemas orientados; Exercícios.
25	Variedades e derivada covariante	6.1, 6.2	Variedades, derivada covariante e curvatura: Variedades e métricas; Derivada covariante.
26	Compatibilidade métrica	6.4, 6.8	Variedades, derivada covariante e curvatura: Compatibilidade métrica; Problemas orientados, itens 1–3.
27	Riemann e suas simetrias	6.3, 6.5	Variedades, derivada covariante e curvatura: Curvatura; Simetrias do tensor de Riemann.
28	Curvatura intrínseca e desvio geodésico	6.6, 6.7	Variedades, derivada covariante e curvatura: Curvatura intrínseca e extrínseca; Desvio geodésico.
29	Oficina computacional IV	6.9, 6.10, 6.11, 6.12	Variedades, derivada covariante e curvatura: Resolução numérica — holonomia, Riemann por diferenças finitas e desvio geodésico; Exemplos resolvidos adicionais; Problemas orientados, itens 4–6; Exercícios. Resumo de fórmulas: Geometria.
30	Movimento livre e energia medida	7.1, 7.2	Física em espaço-tempo curvo: Movimento livre; Energia medida por um observador.
31	Simetrias e vetores de Killing	7.3	Física em espaço-tempo curvo: Simetrias e quantidades conservadas, com a equação de Killing e a demonstração da constante de movimento.
32	Observadores e tetradas	7.4, 7.5, 7.6	Física em espaço-tempo curvo: Observadores não são coordenadas; Tetradas locais; Constantes de movimento e energia local.
33	Oficina de física em espaço-tempo curvo	7.7, 7.8, 7.9	Física em espaço-tempo curvo: Problemas orientados; Exercícios.
34	A equação de campo	8.1, 8.4	Equações de Einstein: A equação de campo; Por que o tensor de Einstein.
35	Ação de Einstein–Hilbert	8.5	Equações de Einstein: A ação de Einstein–Hilbert; definição variacional de $T_{\mu\nu}$.
36	Traço e conservação local	8.3, 8.6, 8.10	Equações de Einstein: Traço das equações de campo; Conservação local; Exemplos resolvidos adicionais.
37	Limite newtoniano	8.2, 8.7	Equações de Einstein: Limite newtoniano; O limite fraco com mais detalhe.
38	Constante cosmológica e fechamento	8.8, 8.9, 8.11, 8.12	Equações de Einstein: Constante cosmológica como fluido; Problemas orientados; Exercícios. Resumo de fórmulas: Einstein.
39	Campo fraco e gauge	9.1, 9.5	Ondas gravitacionais: Campo fraco; Gauge e graus de liberdade.
40	Polarizações e partículas teste	9.2, 9.6	Ondas gravitacionais: Polarizações; Efeito sobre partículas teste.
41	Emissão e fórmula do quadrupolo	9.4	Ondas gravitacionais: Emissão.
42	Detectores e escalas	9.3, 9.7	Ondas gravitacionais: Detecção; Escalas de detecção.
43	Binárias compactas	9.8, 9.10	Ondas gravitacionais: Binárias compactas; Erros comuns e interpretação.
44	Oficina computacional V	9.11	Ondas gravitacionais: Resolução numérica, Python – anel de partículas, fórmula do quadrupolo e teste de Hulse–Taylor.
45	Oficina computacional VI	9.9, 9.11, 9.12, 9.13	Ondas gravitacionais: Resolução numérica, inspiral e bloco em Mathematica; Problemas orientados; Exercícios.

Aula	Foco	Seções	Conteúdo
46	Métrica de Schwarzschild	10.1, 10.5	Soluções esféricas, estrelas e Schwarzschild: Métrica de Schwarzschild; Coordenada areal.
47	Redshift gravitacional	10.2	Soluções esféricas, estrelas e Schwarzschild: Redshift gravitacional.
48	Geodésicas e potencial efetivo	10.3	Soluções esféricas, estrelas e Schwarzschild: Geodésicas e potencial efetivo.
49	Órbitas circulares e de fótons	10.6, 10.7	Soluções esféricas, estrelas e Schwarzschild: Órbitas circulares; Órbita de fótons.
50	Estrelas relativísticas	10.4	Soluções esféricas, estrelas e Schwarzschild: Estrelas relativísticas.
51	Testes clássicos e lentes	10.8, 10.9	Soluções esféricas, estrelas e Schwarzschild: Testes clássicos; Lentes gravitacionais.
52	Oficina computacional VII	10.10, 10.11, 10.12, 10.13, 10.14	Soluções esféricas, estrelas e Schwarzschild: Resolução numérica; Problemas orientados; Erros comuns e interpretação; Exercícios.
53	Horizonte	11.1, 11.5	Buracos negros: Horizonte; Horizonte versus singularidade.
54	Coordenadas regulares e diagramas causais	11.2, 11.6	Buracos negros: Coordenadas regulares; Diagramas causais.
55	Kerr e buracos negros reais	11.3, 11.7	Buracos negros: Buracos negros em rotação; Buracos negros reais.
56	Termodinâmica	11.4, 11.8	Buracos negros: Termodinâmica; Leis da mecânica de buracos negros.
57	Oficina computacional VIII	11.11	Buracos negros: Resolução numérica, Python – cones de luz, diagrama de Kruskal e marés no horizonte.
58	Oficina computacional IX	11.9, 11.10, 11.11, 11.12, 11.13	Buracos negros: Resolução numérica, Hawking, Kerr e bloco em Mathematica; Problemas orientados; Erros comuns; Exercícios. Resumo de fórmulas: Schwarzschild.
59	Princípio cosmológico e redshift	12.1, 12.2	Cosmologia relativística: Princípio cosmológico; Redshift cosmológico.
60	Equações de Friedmann	12.3, 12.6	Cosmologia relativística: Equações de Friedmann; Eras de dominação.
61	Distâncias e horizontes	12.4, 12.5	Cosmologia relativística: Distâncias em cosmologia; Horizontes cosmológicos.
62	Parâmetros e problemas abertos	12.7, 12.8	Cosmologia relativística: Parâmetros observacionais; Problemas conceituais.
63	Oficina computacional X	12.12	Cosmologia relativística: Resolução numérica, Python – escalas temporais, fator de escala e distâncias.
64	Oficina computacional XI	12.9, 12.10, 12.12, 12.13, 12.14	Cosmologia relativística: Resolução numérica, bloco em Mathematica; Problemas orientados; Erros comuns e interpretação; Exercícios. Resumo de fórmulas: Cosmologia.
65	Revisão técnica	A.1, A.9	Apêndice A integral, com ênfase no Checklist para não errar. Revisão de tensores, geodésicas, curvatura e equações de campo.
66	Projeto 1	13.1	Projetos finais: geodésicas em Schwarzschild. Definição de grupos, escopo, equações e entregáveis.
67	Projeto 2	13.2	Projetos finais: redshift gravitacional.
68	Projeto 3	13.3	Projetos finais: ondas gravitacionais; discussão de formas de onda e sirene padrão.
69	Projeto 4	13.4	Projetos finais: cosmologias simples; Friedmann numérico e critérios de avaliação.
70	Síntese conceitual	12.11	Cosmologia relativística: Síntese conceitual do curso. Resumo de fórmulas integral; Bibliografia comentada.
71	Reserva	—	Seminários, recuperação de atraso ou avaliação.
72	Reserva	—	Seminários, recuperação de atraso ou avaliação.

Relatividade especial

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Entender que a relatividade especial é a geometria do espaço-tempo plano. O estudante deve sair deste módulo vendo o intervalo como a grandeza invariante fundamental e o tempo próprio como quantidade física medida por um relógio ao longo de uma linha de mundo.

1.1 Newton e Einstein: duas visões de mundo

Vale começar pelo quadro que a relatividade veio substituir, porque a maior parte da dificuldade do curso não está na matemática — está em desmontar hipóteses que parecem óbvias por nunca terem sido enunciadas.

O mundo de Newton. Nos *Principia*, espaço e tempo são o palco onde a física acontece, e o palco não participa da peça. O espaço é absoluto: existe um “aqui” com sentido próprio, independente de qualquer corpo. O tempo é absoluto e universal, o mesmo para todos os observadores, correndo uniformemente sem relação com nada externo. Duas consequências vêm de graça e serão as primeiras a cair. A primeira é que a simultaneidade é absoluta: perguntar se dois eventos distantes aconteceram “ao mesmo tempo” tem uma resposta única, boa para todos. A segunda é que não existe velocidade máxima: velocidades simplesmente se somam, e nada impede que um corpo ultrapasse qualquer valor dado. Nesse mundo, a gravidade age instantaneamente à distância: mover o Sol agora mudaria a órbita da Terra agora.

O mundo de Einstein. A relatividade nasce da observação de que o tempo universal não sobrevive ao experimento. Dois relógios em movimento relativo marcam intervalos diferentes entre os mesmos dois eventos, e não há como eleger um deles como o certo — ambos estão certos. Em compensação, alguma coisa precisa ser comum a todos, ou não haveria física possível: o que é comum é a velocidade da luz e, junto com ela, uma combinação de tempo e distância chamada *intervalo*, que é o objeto da Seção 1.2. Tempo e espaço deixam de ser dois absolutos separados e passam a ser dois aspectos de uma única estrutura,

o espaço-tempo. Como existe uma velocidade máxima, nenhuma influência é instantânea, e a gravidade newtoniana — que é instantânea por construção — fica insustentável: é esse impasse que a relatividade geral vem resolver, transformando o palco em personagem.

	Newton	Einstein
Tempo	absoluto, universal	relativo ao observador
Espaço	absoluto, palco fixo	inseparável do tempo
Simultaneidade	absoluta	depende do referencial
Velocidade máxima	não existe	c , a mesma para todos
Soma de velocidades	$u' = u - v$	$u' = (u - v) / (1 - uv)$
O que é invariante	o tempo e a distância, separadamente	o intervalo ds^2 , que os combina
Gravidade	força instantânea à distância	curvatura do espaço-tempo (RG)

O resto desta seção torna a primeira coluna precisa: escreve a transformação que traduz o mundo de Newton e mostra exatamente onde ela falha.

A transformação de Galileu. Sejam S e S' dois referenciais inerciais com eixos paralelos, origens coincidentes em $t = 0$, e S' deslocando-se com velocidade v na direção $+x$ de S . A resposta de Galileu é a que o senso comum dita:

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.1)$$

A segunda equação apenas desconta o quanto a origem de S' andou. A primeira — $t' = t$ — é a hipótese forte, e passa despercebida justamente por parecer óbvia: é o tempo absoluto de Newton escrito em uma linha.

Três consequências saem de (1.1) imediatamente. *Primeira*, as velocidades se somam: derivando $x' = x - vt$ em relação a $t' = t$, uma partícula com velocidade u em S tem

$$u' = u - v \quad (1.2)$$

em S' — é a regra que todo mundo usa ao ultrapassar um carro na estrada. *Segunda*, a aceleração não muda: derivando mais uma vez, $a' = a$, porque v é constante. Como massas e forças também não mudam nessa descrição, $F = ma$ tem exatamente a mesma forma nos dois referenciais: a mecânica de Newton é insensível a (1.1), e é por isso que não se sente movimento uniforme dentro de um trem. *Terceira*, distâncias entre eventos simultâneos são preservadas, já que $\Delta t = 0$ implica $\Delta x' = \Delta x$. Note que esses dois últimos itens são o conteúdo da primeira coluna da tabela: o que Galileu preserva é o tempo de um lado e a distância do outro, cada um por si.

Onde isso quebra. O problema aparece ao aplicar (1.2) à luz. Se um pulso tem velocidade $u = c$ em S , então em S' ele teria velocidade $c - v$: um obser-

vador que corresse atrás do pulso o veria mais lento, e um que corresse com $v = c$ o veria parado. Duas coisas dizem que isso está errado. Uma é teórica: as equações de Maxwell fornecem a velocidade das ondas eletromagnéticas em termos de constantes do vácuo, sem qualquer referência a um observador — para que (1.1) valesse, elas teriam de mudar de forma de um referencial para outro, e nenhum experimento jamais mostrou isso. A outra é experimental: desde Michelson e Morley, medidas cada vez mais precisas procuram a variação de c com o movimento do laboratório e encontram sempre o mesmo valor.

Einstein tomou esse resultado não como um problema a ser explicado, mas como ponto de partida. Os dois postulados da relatividade restrita são:

1. as leis da física têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais — o princípio da relatividade, que já valia para Newton;
2. a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais, independentemente do movimento da fonte ou do observador.

O segundo postulado é incompatível com (1.1), logo a transformação de Galileu está errada — não como aproximação, mas como afirmação exata. E, como (1.1) decorre diretamente de $t' = t$, o que está errado é o tempo absoluto.

ONDE SE ERRA

A culpada é a primeira equação de (1.1), e não a segunda. Enquanto $t' = t$ estiver fixo, o tempo não participa da transformação, e a única coisa que sobra para ajustar é a posição — insuficiente para manter c fixo. Salvar o segundo postulado exige que o tempo de um referencial dependa também da *posição* no outro, isto é, que a simultaneidade deixe de ser absoluta. Esse é o preço, e é inegociável.

Nada disso torna (1.1) inútil. Para $v \ll c$ a diferença entre a transformação correta e a de Galileu é pequena demais para ser notada, e é por isso que a mecânica newtoniana descreve tão bem um avião, um planeta ou uma bala de canhão. O que vem a seguir não joga a transformação de Galileu fora: encontra a transformação exata, da qual (1.1) é o limite de baixas velocidades — e, antes disso, identifica a grandeza que substitui o tempo absoluto no papel de referência comum a todos os observadores.

Atividade 1.1. Um trem se move a v e um passageiro caminha a u' dentro dele, no sentido do movimento. Use (1.2) para obter a velocidade do passageiro em relação ao solo, e repita o raciocínio para um pulso de luz emitido de uma lanterna do passageiro. Aponte, em cada caso, qual afirmação experimental está sendo violada — ou não.

1.2 Eventos, observadores e intervalo

Um evento é algo que ocorre em um ponto do espaço e em um instante. Em um referencial inercial, escrevemos suas coordenadas como

$$x^\mu = (t, x, y, z),$$

onde adotaremos frequentemente unidades com $c = 1$. O intervalo entre dois eventos próximos é

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

A convenção de sinais usada aqui é $(-, +, +, +)$. O mesmo conteúdo físico pode ser escrito com a convenção oposta, desde que ela seja usada de modo consistente.

RESULTADO CENTRAL

O intervalo ds^2 é invariante sob transformações de Lorentz. Essa invariância substitui a noção newtoniana de tempo absoluto.

Essa afirmação é a base de tudo o que vem depois, e não é preciso esperar pelas transformações de Lorentz para justificá-la. Ela decorre do segundo postulado da Seção 1.1 — a luz tem a mesma velocidade em todos os referenciais inerciais — somado ao teorema de Pitágoras. O argumento abaixo é físico e usa apenas álgebra elementar; a demonstração geral, válida para uma transformação de Lorentz qualquer, está no Apêndice B e pode ser lida depois da Seção 1.4.

Primeiro caso: pares de eventos com $ds^2 = 0$. Antes de falar em invariância, vale perguntar o que a equação $ds^2 = 0$ diz sobre dois eventos. Ela diz

$$-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{|dt|} = 1,$$

ou seja: a distância entre os dois eventos, dividida pelo tempo que os separa, vale 1 — que, nas unidades adotadas, é c . Repare que essa é uma identidade algébrica, e ainda não uma afirmação sobre luz: $ds^2 = 0$ é o critério para que os dois eventos possam ser ligados por um sinal que se propague exatamente com velocidade c , seja ele qual for.

Quem liga esse critério à luz — e é aqui que a física entra — é o segundo postulado. Ele age nas duas direções:

- se os dois eventos estão sobre a trajetória de um pulso de luz, então esse pulso tem velocidade c em *qualquer* referencial inercial, que é o que o postulado afirma; logo o quociente acima vale 1 para todos eles, e $ds^2 = 0$ em qualquer referencial;

- reciprocamente, se algum observador encontra $ds^2 = 0$ para um par de eventos, então um pulso de luz emitido no primeiro evento, na direção certa, chega exatamente ao segundo — e recai-se no item anterior.

Portanto o conjunto dos pares de eventos com $ds^2 = 0$ é o mesmo para todos os observadores: nesse caso a invariância do intervalo não é um teorema, é o postulado traduzido para a linguagem de ds^2 . Mas convém ser preciso sobre o que isso ainda *não* garante: apenas que ds^2 se anula, ou não, simultaneamente para todos. Quando $ds^2 \neq 0$, nada até aqui impede que dois observadores atribuam números diferentes ao mesmo par de eventos. É o próximo caso que fecha essa lacuna.

Segundo caso: um relógio de luz. Construa um relógio com dois espelhos paralelos separados por uma distância L e um pulso de luz que vai e volta entre eles; cada ida e volta é um tique. Oriente o relógio de modo que a linha que une os espelhos seja *perpendicular* à direção do movimento (Figura 1.1).

No referencial S' em que o relógio está parado, o pulso sobe e desce na vertical. Como a luz percorre a distância $2L$ com velocidade 1, um tique dura

$$\Delta t' = 2L,$$

e os dois eventos que o delimitam — a emissão do pulso e o seu retorno ao espelho de baixo — acontecem no *mesmo lugar*, de modo que $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$. O intervalo entre eles, calculado em S' , é simplesmente

$$\Delta s'^2 = -\Delta t'^2 = -(2L)^2.$$

Agora descreva o mesmo tique em S , referencial no qual o relógio desliza com velocidade v ao longo de x . Durante o tique, o relógio avança $\Delta x = v \Delta t$, e o pulso, visto de S , não sobe na vertical: ele percorre dois lados de um triângulo isósceles, subindo na diagonal e descendo na diagonal. Cada diagonal é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos L e $\Delta x/2$, e o caminho total do pulso é

$$\text{caminho} = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} = \sqrt{4L^2 + \Delta x^2}.$$

Aqui entra o postulado, e é a única vez que ele é usado: em S a luz também viaja com velocidade 1, então o caminho percorrido é numericamente igual ao tempo gasto, $\text{caminho} = \Delta t$. Elevando ao quadrado,

$$\Delta t^2 = 4L^2 + \Delta x^2 \quad \implies \quad -\Delta t^2 + \Delta x^2 = -(2L)^2.$$

O lado esquerdo é Δs^2 calculado em S (as direções transversas não contribuem, porque o relógio se move ao longo de x) e o lado direito é o $\Delta s'^2$ obtido no pará-

grafo anterior. Ou seja,

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2.$$

RESULTADO CENTRAL

Dois observadores em movimento relativo, usando réguas e relógios diferentes e discordando tanto do tempo quanto da posição de cada evento, obtêm o mesmo número para essa combinação.

Uma hipótese ficou implícita: que a separação L entre os espelhos, que é transversal ao movimento, seja a mesma em S e em S' . Isso não é gratuito. Imagine dois anéis que, em repouso, são idênticos, aproximando-se um do outro ao longo do eixo comum. Se o movimento encolhesse comprimentos transversais, cada observador diria que o anel do outro é o menor e preveria que o *seu* anel passa por fora; mas qual anel passou por dentro de qual é um fato absoluto, registrado por qualquer marca de raspagem. A única possibilidade consistente é que comprimentos perpendiculares ao movimento não mudem.

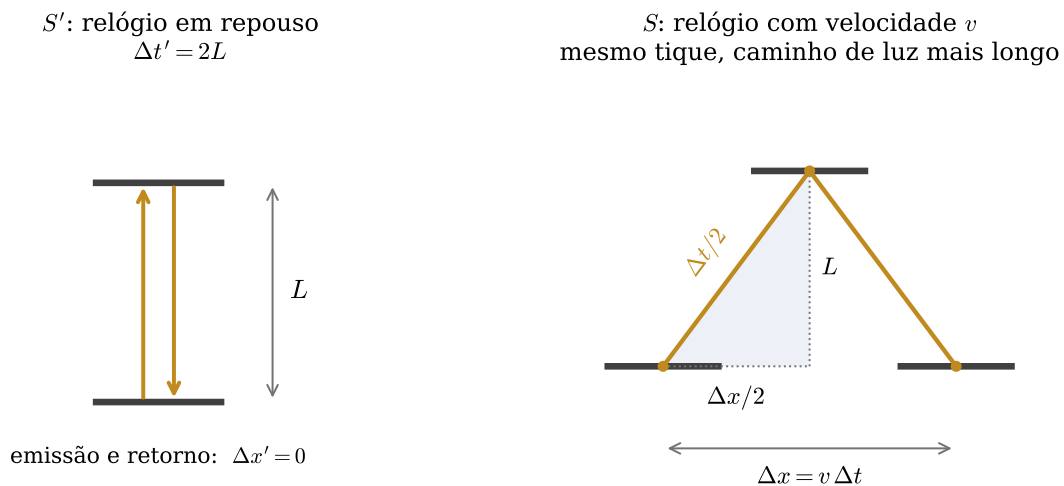


Figura 1.1. O relógio de luz. À esquerda, no referencial S' em que ele está parado: o pulso sobe e desce entre os espelhos e o tique dura $\Delta t' = 2L$. À direita, no referencial S , em que o relógio avança $\Delta x = v \Delta t$ durante o mesmo tique: o pulso percorre duas hipotenusas de catetos L e $\Delta x/2$. Como a velocidade da luz é a mesma nos dois quadros, o caminho mais longo à direita significa um tique mais demorado — e Pitágoras aplicado ao triângulo destacado dá $\Delta t^2 = (2L)^2 + \Delta x^2$, isto é, $-\Delta t^2 + \Delta x^2 = -\Delta t'^2$.

Por que um único tique já basta. O cálculo foi feito para uma ida e volta, mas nada muda se o relógio bater n vezes: o zigue-zague passa a ter $2n$ lados, o caminho total vira $\sqrt{(2nL)^2 + \Delta x^2}$ e a conclusão se repete com $\Delta t' = 2nL$. E qualquer par de eventos com separação temporal pode ser posto nessa forma — se uma partícula livre consegue estar presente nos dois eventos, basta imaginar o relógio embarcado nela. Nesse caso $-\Delta s^2 = \Delta t'^2$ é o quadrado do tempo marcado

pelo próprio relógio, ou seja, o número de tiques que aparece no mostrador. Esse número é um fato físico, e não uma convenção de quem descreve: pode ser anotado num papel e mostrado a qualquer observador. A invariância do intervalo é a tradução matemática dessa obviedade.

Sobram os pares com separação espacial, para os quais nenhum relógio consegue estar presente nos dois eventos. Eles ficam cobertos por continuidade: como nenhuma região do espaço-tempo é privilegiada, as coordenadas de S' dependem *linearmente* das de S , e portanto $\Delta s'^2$ é um polinômio de segundo grau nas diferenças $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$. Dois polinômios que coincidem em toda uma região — aqui, em todas as separações temporais, que preenchem o interior do cone de luz — coincidem em toda parte. O Apêndice B refaz esse último passo de forma direta, sem apelo à continuidade, e mostra além disso que a invariância não é uma propriedade accidental do relógio escolhido: dada a constância de c , ela é a única possibilidade.

ONDE SE ERRA

Invariante não é constante. Dizer que ds^2 é invariante significa que observadores diferentes, medindo o mesmo par de eventos com réguas e relógios diferentes, obtêm o mesmo número; não significa que ds^2 tenha o mesmo valor para pares de eventos diferentes. E a invariância é uma propriedade da *combinação* $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$: tomados isoladamente, dt e dx mudam de referencial para referencial, e é precisamente por isso que dilatação do tempo e contração do comprimento existem. Um erro relacionado é concluir de $ds'^2 = ds^2$ que $ds^2 > 0$ sempre; o sinal é invariante, mas pode ser dos três tipos.

Quando $ds^2 < 0$, a separação é temporal; quando $ds^2 = 0$, é nula; quando $ds^2 > 0$, é espacial. Partículas massivas percorrem curvas temporais. A luz percorre curvas nulas. A invariância recém-provada garante que essa classificação é absoluta: como o valor de ds^2 é o mesmo em todos os referenciais, o seu sinal também é, e dois observadores nunca discordam sobre se dois eventos podem ou não estar ligados por um sinal físico.

Cada um dos três casos tem uma leitura operacional, e vale enunciá-la agora porque é dela que sai toda a intuição causal do curso. Se $ds^2 < 0$, existe um referencial no qual os dois eventos ocorrem no *mesmo ponto* — é o referencial de uma partícula massiva que consegue estar presente nos dois, e foi exatamente o relógio embarcado do argumento acima. Se $ds^2 > 0$, existe um referencial no qual eles são *simultâneos*, e nenhum sinal limitado por c pode ligar um ao outro: o que acontece em um não pode influenciar o outro. Se $ds^2 = 0$, um raio de luz vai de um ao outro, e nada mais rápido existe para tentar.

A figura desse enunciado é o cone de luz.

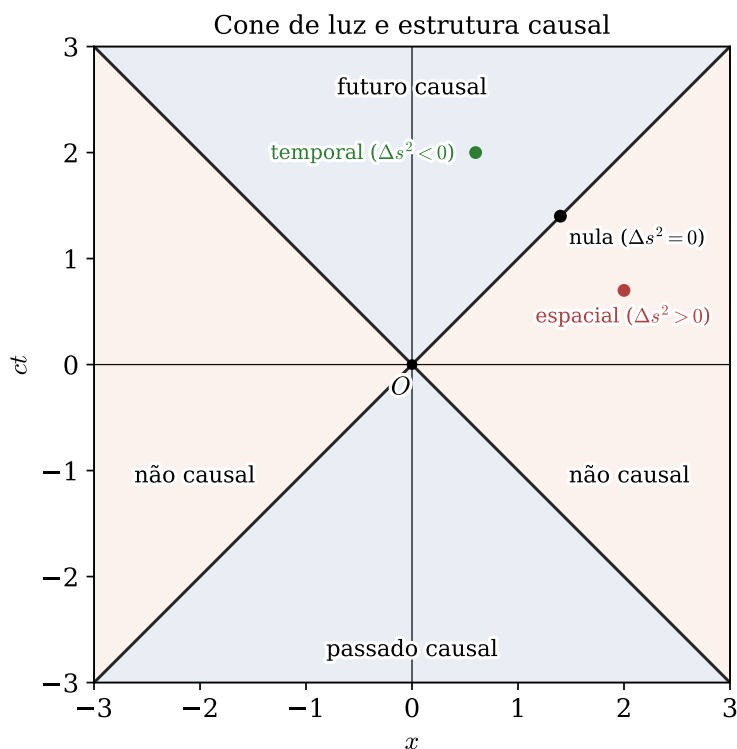


Figura 1.2. Cone de luz do evento O no plano (x, ct) . Eventos no futuro ou passado causal de O têm separação temporal; os eventos das duas cunhas laterais têm separação espacial e não podem ser causalmente ligados a O — daí o rótulo “não causal”. Os três pontos marcados retomam os Exemplos resolvidos desta seção.

Exemplo 1.1. Considere dois eventos separados por $\Delta t = 5$ e $\Delta x = 3$, em unidades com $c = 1$. O intervalo é

$$\Delta s^2 = -25 + 9 = -16.$$

A separação é temporal. O tempo próprio entre os eventos, ao longo da reta inercial que os conecta, é $\Delta\tau = 4$. Esse número é o tempo medido por um relógio que passa pelos dois eventos sem aceleração.

Exemplo 1.2. Agora tome $\Delta t = 2$ e $\Delta x = 5$. Temos

$$\Delta s^2 = -4 + 25 = 21.$$

A separação é espacial. Não faz sentido perguntar qual partícula massiva liga esses eventos, pois isso exigiria velocidade maior que a da luz. Contudo, faz sentido procurar um referencial no qual os eventos sejam simultâneos — e a Seção 1.5 mostra como encontrá-lo.

1.3 Tempo próprio

Ao longo da linha de mundo de uma partícula massiva a separação é temporal, de modo que $ds^2 < 0$ e $-ds^2$ é positivo. Define-se então o tempo próprio τ por

$$d\tau^2 = -ds^2.$$

O nome se justifica assim: no referencial que acompanha a partícula, ela está parada, $dx = dy = dz = 0$, e sobra $d\tau^2 = dt^2$. Ou seja, τ é o tempo marcado pelo relógio que viaja *com* a partícula — o relógio de luz da Seção 1.2 embarcado nela. E, como ds^2 é invariante, $d\tau$ também é: todos os observadores concordam sobre quanto esse relógio andou, ainda que discordem de dt .

Falta saber quanto vale $d\tau$ para quem *não* viaja com a partícula. Não é preciso conhecer as transformações de Lorentz para responder: basta a definição do intervalo e a definição de velocidade. Em um referencial em que a partícula se desloca com velocidade ordinária de módulo v , isto é $dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2 dt^2$, temos

$$d\tau^2 = -ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = dt^2 - v^2 dt^2 = (1 - v^2) dt^2,$$

e portanto

$$d\tau = dt \sqrt{1 - v^2}. \quad (1.3)$$

O fator $\sqrt{1 - v^2}$ apareceu de uma conta de duas linhas, não de uma hipótese nova. Ele é menor que 1 para qualquer $v \neq 0$: o relógio que viaja marca menos do que o tempo coordenado. Como o seu inverso reaparece o tempo todo, ele ganha nome próprio,

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \geq 1, \quad \text{de modo que} \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma}.$$

Por enquanto γ é apenas uma abreviação para esse fator. Na Seção 1.4 o mesmo símbolo aparecerá como coeficiente da transformação de Lorentz, e não por coincidência: os dois vêm da mesma combinação $1 - v^2$, que por sua vez vem da invariância do intervalo.

Esse resultado não é novo. O relógio de luz da Seção 1.2 já o continha: lá, um tique durava $\Delta t' = 2L$ no referencial do próprio relógio e Δt no referencial em que ele se move, com $\Delta t^2 = (2L)^2 + v^2 \Delta t'^2$. Isolando, $(2L)^2 = \Delta t'^2 (1 - v^2)$, ou seja $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2}$, que é exatamente (1.3) com $\Delta t' = \Delta \tau$. A dilatação do tempo, portanto, não é um efeito à parte: é a leitura de (1.3), e o zigue-zague da Figura 1.1 é o seu retrato.

1.4 Transformações de Lorentz

Agora que o intervalo está em mãos, dá para diagnosticar a transformação de Galileu com precisão, e não apenas dizer que ela contraria o postulado. Como (1.1) dá $dt' = dt$ e $dx' = dx - v dt$,

$$\begin{aligned} ds'^2 &= -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \\ &= -dt^2 + (dx - v dt)^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \underbrace{-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}_{ds^2} - 2v dt dx + v^2 dt^2. \end{aligned}$$

Sobrou o termo $-2v dt dx + v^2 dt^2$, que só se anula em situações particulares (por exemplo $dt = 0$, ou $v = 0$): a transformação de Galileu *não* preserva o intervalo. E o vilão é o termo cruzado $dt dx$ — exatamente o tipo de termo cujo cancelamento fez a conta do relógio de luz fechar, na Seção 1.2. Para eliminá-lo é preciso que a nova coordenada temporal também contenha um pedaço de x , e é isso que a transformação correta vai fazer.

Em vez de simplesmente declará-la, vale a pena deduzi-la: ela é a única mudança de coordenadas linear que preserva o intervalo ds^2 entre referenciais inerciais. Essa dedução mostra que a forma de γ não é um acidente, mas uma consequência direta de dois fatos geométricos.

RESULTADO CENTRAL

Dedução a partir da invariância do intervalo. Restrinja-se a 1 + 1 dimensões (coordenadas t, x ; as direções y, z transversas ao movimento não são afetadas). Como o espaço-tempo é homogêneo, a transformação entre dois referenciais inerciais S e S' deve ser *linear*:

$$t' = At + Bx, \quad x' = Ct + Dx,$$

com A, B, C, D dependendo apenas da velocidade relativa v . Duas condições fixam completamente essas constantes.

Condição 1 – a origem de S' se move com velocidade v em S . O ponto $x' = 0$ corresponde a $x = vt$, logo $Ct + Dvt = 0$ para todo t , ou seja $C = -Dv$.

Condição 2 – o intervalo é invariante. Substituindo t', x' em $-dt'^2 + dx'^2 = -dt^2 + dx^2$ e igualando os coeficientes de dt^2 , dx^2 e $dt dx$, obtém-se

$$-A^2 + C^2 = -1, \quad -B^2 + D^2 = 1, \quad -AB + CD = 0.$$

Usando $C = -Dv$, essas três equações ficam

$$A^2 - D^2v^2 = 1, \quad D^2 - B^2 = 1, \quad AB = -D^2v.$$

Elas já determinam tudo, e o caminho é curto: *isole B na terceira, substitua na segunda e fatore*. A primeira garante $A^2 = 1 + D^2v^2 \geq 1$, logo $A \neq 0$ e a terceira dá $B = -D^2v/A$. Levando à segunda e multiplicando por A^2 ,

$$D^2(A^2 - D^2v^2) = A^2,$$

e o parêntese vale 1 pela primeira equação: sobra $D^2 = A^2$. Dos dois sinais, $D = -A$ dá $x' = -A(x - vt)$, o mesmo movimento composto com a reflexão $x \rightarrow -x$, que não tende à identidade quando $v \rightarrow 0$. Fica $A = D$. Chamando esse valor comum de $\gamma(v)$, a primeira equação dá $\gamma^2(1 - v^2) = 1$, isto é,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

com $\gamma > 0$ pelo mesmo critério. Então $B = -D^2v/A = -\gamma v$:

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.4)$$

Duas observações tornam essa dedução mais transparente. Primeiro, nenhuma hipótese sobre luz foi usada diretamente – apenas linearidade e invariância de uma forma quadrática. A velocidade da luz aparece como a velocidade invariante permitida por essa geometria, não como um ingrediente extra. Segundo, a relatividade especial contém a mecânica newtoniana como caso limite — com um cuidado que a notação $c = 1$ esconde. Fazer $\gamma \rightarrow 1$ sozinho deixaria $t' = t - vx$, que não é (1.1). Restaurando c ,

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad x' = \gamma(x - vt),$$

os dois termos cruzados não são da mesma ordem: um carrega $1/c^2$, o outro não. O limite newtoniano é $c \rightarrow \infty$ com v fixo — e não $v \rightarrow 0$, que daria a identidade. Aí $\gamma \rightarrow 1$, o termo vx/c^2 desaparece e sobra exatamente (1.1). O que morre é justamente o termo de simultaneidade, em acordo com a Seção 1.1: $x' = x - vt$ é cinemática trivial e sobrevive intacta, enquanto $t' = t$ — a hipótese forte — só se recupera no limite.

A transformação preserva o intervalo e mistura tempo com espaço. A relatividade da simultaneidade nasce desse acoplamento: eventos com $dt = 0$ em S têm, em geral, $dt' = -\gamma v dx \neq 0$ em S' .

Atividade 1.2. Mostre que dois eventos simultâneos em S , separados por $\Delta x \neq 0$, não são simultâneos em S' se $v \neq 0$. Use a Figura 1.3 como guia e refaça a construção geométrica para $v < 0$.

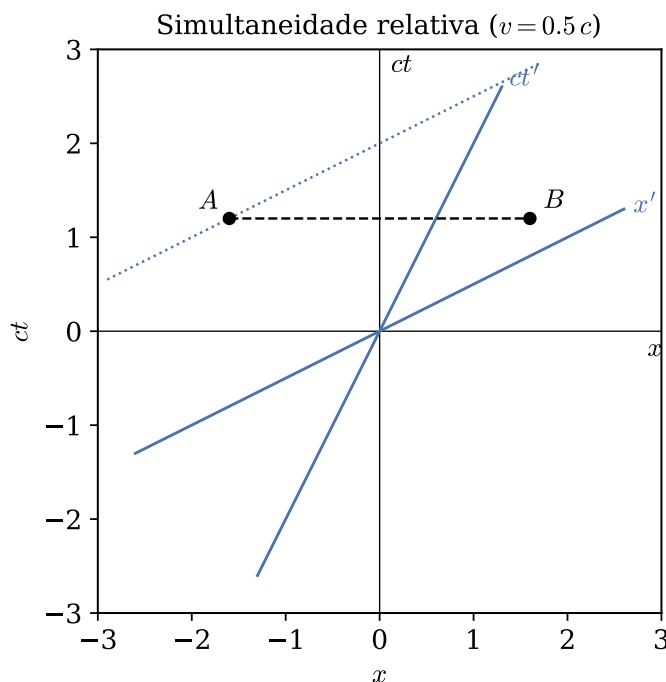


Figura 1.3. Diagrama de Minkowski: os eixos ct' e x' de S' aparecem inclinados em relação aos eixos de S pelo mesmo ângulo $\arctan v$. A reta tracejada liga dois eventos A e B simultâneos em S (mesma ct); a reta pontilhada é a reta de simultaneidade de S' passando por A – ela não contém B .

1.5 Consequências: o que se mede

A transformação de Lorentz não é um resultado final: é a ferramenta com que se respondem perguntas concretas. Esta seção usa (1.4) três vezes, para os três fatos que todo curso de relatividade precisa ter deduzido — e não apenas anunciado.

Um comprimento é uma medida simultânea. Uma barra em repouso em S' ocupa o intervalo entre x'_A e x'_B ; seu *comprimento próprio* é $L_0 = x'_B - x'_A$, e ele não depende de quando cada extremidade foi observada, porque a barra não se move em S' . Em S , onde a barra desliza, isso deixa de valer: anotar a ponta esquerda agora e a direita daqui a um segundo daria qualquer resposta que se quisesse. Medir o comprimento em S é, por definição, registrar as *duas* extremidades no mesmo instante de S .

Essa exigência — $\Delta t = 0$ em S — é toda a conta. De (1.4), $x' = \gamma(x - vt)$, tomada entre as duas extremidades com $\Delta t = 0$:

$$L_0 = \Delta x' = \gamma \Delta x \quad \implies \quad L = \Delta x = \frac{L_0}{\gamma}. \quad (1.5)$$

Como $\gamma \geq 1$, a barra em movimento é medida *mais curta* que em repouso.

ONDE SE ERRA

Repare que γ aparece aqui *dividindo*, enquanto em (1.3) ele aparecia multiplicando o tempo próprio. A assimetria não é um descuido de notação, e sim a diferença entre as duas situações. Para o tempo, os dois eventos acontecem no mesmo lugar do referencial próprio ($\Delta x' = 0$) e a pergunta é quanto tempo passou. Para o comprimento, os dois eventos acontecem ao mesmo tempo do referencial que mede ($\Delta t = 0$) e a pergunta é qual a distância. São condições diferentes impostas a lados diferentes da transformação — daí os fatores em posições opostas. Quem tenta decorar “ γ em cima ou embaixo” erra; quem se pergunta “o que está sendo mantido fixo?” acerta sempre.

Nenhum dos dois está enganado. A contração é recíproca: uma barra parada em S é medida mais curta por S' , pela mesma conta com os papéis trocados. Isso não é contradição, pela mesma razão que a dilatação recíproca do tempo não é: cada observador está medindo um *par de eventos diferente*. Quando S registra as duas pontas simultaneamente segundo o seu relógio, esses dois registros *não* são simultâneos para S' — e o que S' vê S fazendo é medir a ponta da frente e a de trás em instantes distintos, o que naturalmente dá um número menor. A geometria de Minkowski organiza essas comparações sem precisar eleger um observador certo.

ONDE SE ERRA

Nada disso significa que “o tempo realmente fica lento” ou que “a barra realmente encolhe” em algum sentido absoluto. Tempo próprio e comprimento próprio são propriedades de objetos e de linhas de mundo, e ninguém discorda deles. O que depende do observador é o resultado de uma *medida* que envolve simultaneidade — e simultaneidade é justamente o que a Seção 1.4 mostrou não ser absoluto.

Velocidades não se somam. A pergunta que abriu este capítulo — e se eu correr atrás da luz? — agora tem resposta exata. Uma partícula tem velocidade $u = dx/dt$ em S ; qual é a sua velocidade $u' = dx'/dt'$ em S' ? Basta dividir uma linha de (1.4) pela outra:

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - v dx)} = \frac{dx/dt - v}{1 - v dx/dt'}$$

onde os fatores γ se cancelam — eles são os mesmos em cima e embaixo. Logo

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv}. \quad (1.6)$$

Para $u, v \ll 1$ o denominador é praticamente 1 e recupera-se (1.2), a soma ingênua. É o denominador que carrega toda a diferença, e ele faz duas coisas notáveis.

A primeira: se $u = 1$, então $u' = (1 - v)/(1 - v) = 1$ para qualquer v . A velocidade c é ponto fixo da composição — correr atrás da luz não a alcança nem um pouco. Isso não é uma coincidência aritmética: é o segundo postulado reaparecendo do outro lado da dedução, agora como teorema.

A segunda: velocidades subluminais nunca compõem para dar uma superluminal. Para ver isso, o que interessa não é u' em si, mas o quanto falta para ela chegar a 1. Eleve (1.6) ao quadrado, subtraia de 1 e reduza ao denominador comum:

$$1 - u'^2 = 1 - \frac{(u - v)^2}{(1 - uv)^2} = \frac{(1 - uv)^2 - (u - v)^2}{(1 - uv)^2}.$$

O numerador que apareceu é a diferença entre o quadrado do denominador de (1.6) e o quadrado do seu numerador, e ele se fatora:

$$(1 - uv)^2 - (u - v)^2 = 1 + u^2v^2 - u^2 - v^2 = (1 - u^2)(1 - v^2).$$

Chega-se assim a uma identidade que vale a pena guardar,

$$1 - u'^2 = \frac{(1 - u^2)(1 - v^2)}{(1 - uv)^2}. \quad (1.7)$$

Se $|u| < 1$ e $|v| < 1$, os dois fatores do numerador são positivos, o denominador é um quadrado, e o lado direito inteiro é positivo — ou seja, $1 - u'^2 > 0$, isto é, $|u'| < 1$. A barreira da velocidade da luz não é imposta por decreto: ela é uma consequência algébrica da forma da transformação.

Atividade 1.3. Duas naves partem da Terra em sentidos opostos, cada uma com $v = 0,8$ medida da Terra. Use (1.6) para calcular a velocidade de uma medida pela outra. Compare com 1,6, que é o que a soma ingênua daria, e verifique (1.7) nesse caso.

1.6 Diagramas de Minkowski e hipérboles invariantes

Um diagrama de espaço-tempo desenha o tempo na vertical e uma direção espacial na horizontal, de modo que a linha de mundo de um objeto parado em S é uma reta vertical e um raio de luz é uma reta a 45° . A pergunta útil é onde ficam, nesse mesmo papel, os eixos de um segundo observador.

Os dois eixos de S' . Cada eixo é um lugar geométrico, e (1.4) o entrega de imediato:

- o eixo t' é o conjunto dos eventos com $x' = 0$. Como $x' = \gamma(x - vt)$, isso é a

reta $x = vt$ — a própria linha de mundo da origem de S' , o que é natural: o eixo do tempo de alguém é a sua história;

- o eixo x' é o conjunto dos eventos com $t' = 0$, isto é, os eventos que S' considera simultâneos à origem. Como $t' = \gamma(t - vx)$, isso é a reta $t = vx$.

As duas retas têm inclinações $1/v$ e v no plano (x, t) : são simétricas em relação à reta $t = x$, e cada uma faz com o eixo correspondente de S o mesmo ângulo $\arctan v$, mas em sentidos opostos. Os eixos de S' se *fecham* sobre a linha de luz, e tanto mais quanto maior v — no limite $v \rightarrow 1$ eles colapsam sobre ela. É essa tesoura que a Figura 1.3 mostra, e é dela que sai visualmente a relatividade da simultaneidade: a reta de simultaneidade de S' é inclinada, então eventos sobre uma horizontal (simultâneos em S) não estão sobre ela.

Falta a escala. Saber a *direção* dos eixos não basta para ler coordenadas: é preciso saber onde fica $t' = 1$ sobre o eixo t' . E aqui a intuição euclidiana atrapa-lha, porque o papel é euclidiano e o espaço-tempo não é. Não se pode marcar a unidade com uma régua.

Quem resolve isso é o próprio invariante. O lugar geométrico dos eventos que distam $\Delta s^2 = -1$ da origem é

$$-t^2 + x^2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - x^2 = 1,$$

uma hipérbole com assíntotas $t = \pm x$, isto é, o próprio cone de luz. Ela cruza o eixo t em $t = 1$. Mas o intervalo é invariante — todos os eventos sobre essa curva estão à mesma “distância” de Minkowski da origem, para *qualquer* observador. Logo ela cruza o eixo t' exatamente onde $t' = 1$. As *hipérboles invariantes* são, portanto, o compasso desse desenho: elas transportam a unidade de um sistema de eixos para o outro.

RESULTADO CENTRAL

Para calibrar o eixo t' de um diagrama, desenhe a hipérbole $t^2 - x^2 = 1$ e marque sua interseção com o eixo t' : ali está $t' = 1$. Analogamente, $x^2 - t^2 = 1$ calibra o eixo x' .

ONDE SE ERRA

No papel, a unidade de t' aparece *maior* que a de t — e isso não significa que o segundo de S' seja mais longo. A interseção da hipérbole com o eixo t' está, em coordenadas de S , no ponto $(t, x) = (\gamma, \gamma v)$, cuja distância euclidiana até a origem é $\gamma\sqrt{1 + v^2} > 1$. O papel mede comprimentos euclidianos; a física mede intervalos. Os dois segmentos valem um segundo próprio cada, e o desenho não tem como representar isso sem distorcer — exatamente como um mapa-múndi não consegue preservar áreas e ângulos ao mesmo

tempo.

Atividade 1.4. Desenhe os eixos de S' para $v = 0,5$ e a hipérbole $t^2 - x^2 = 1$. Marque $t' = 1$ e, a partir dele, a reta de simultaneidade de S' que passa por esse ponto. Em seguida marque $t = 1$ sobre o eixo t e verifique graficamente que S e S' discordam sobre qual dos dois relógios está atrasado — e que cada um está comparando um par de eventos diferente.

1.7 Paradoxo dos gêmeos

Dois gêmeos se separam. Um fica na Terra; o outro parte numa nave a uma velocidade próxima à da luz, viaja durante algum tempo, dá meia-volta e retorna. Quando se reencontram, o viajante está mais jovem que o irmão — e não em aparência ou em sensação, mas em contagem: se cada um tiver marcado o próprio tempo desde a partida, o viajante terá marcado menos.

O que faz disso um paradoxo aparente não é a diferença de idade em si, e sim a *simetria* que parece haver entre os dois irmãos. A dilatação do tempo é recíproca, como a contração da Seção 1.5: enquanto se afastam, o gêmeo da Terra diz que o relógio da nave anda devagar, e o gêmeo da nave diz exatamente o mesmo sobre o relógio da Terra. Nenhum dos dois está enganado, e não há como eleger um deles. Se a situação fosse simétrica do começo ao fim, cada um deveria encontrar o outro mais jovem no reencontro.

E *isso* seria uma contradição de verdade. Enquanto os gêmeos estão separados, comparar os dois relógios exige decidir quais eventos distantes são simultâneos, e já sabemos que essa decisão depende do referencial. No reencontro, não. Ali os dois estão no *mesmo evento*, com os dois relógios lado a lado, e a comparação é local: ou o viajante marcou menos, ou não marcou. Um fato local não admite duas respostas.

A saída é que a simetria não existe: as duas linhas de mundo entre os eventos “partida” e “reencontro” não são equivalentes, e a assimetria não está em quem se move — movimento é relativo — mas em quem *desviou*. O tempo próprio acumulado é

$$\tau = \int \sqrt{1 - v(t)^2} dt.$$

Entre dois eventos fixos em espaço-tempo plano, a linha de mundo inercial maximiza o tempo próprio. Essa é a afirmação que resolve o paradoxo, e ela não precisa ser aceita de boa fé — a prova é curta.

RESULTADO CENTRAL

A linha de mundo inercial é a de maior tempo próprio. Sejam A e B dois eventos com separação temporal. Pela leitura operacional da Seção 1.2, existe um referencial inercial em que os dois acontecem no *mesmo lugar*; nele, B está diretamente no futuro de A , separado por um tempo coordenado T . Trabalhar nesse referencial não custa generalidade nenhuma, porque τ é invariante: o número que sai é o mesmo que qualquer outro observador calcularia.

Uma linha de mundo temporal qualquer ligando A a B , parametrizada pelo tempo coordenado t desse referencial, acumula, por (1.3),

$$\tau = \int_0^T \sqrt{1 - v(t)^2} \, dt.$$

E acabou, porque o integrando nunca passa de 1:

$$\sqrt{1 - v^2} \leq 1 \quad \implies \quad \tau \leq \int_0^T dt = T,$$

com igualdade *se e somente se* $v(t) = 0$ em todo instante — isto é, exatamente para a linha de mundo que fica parada nesse referencial, que é a reta inercial de A a B . Qualquer desvio, por menor que seja, torna o integrando estritamente menor que 1 em algum trecho e reduz τ .

Vale notar o que essa desigualdade tem de estranho. No plano euclidiano, o caminho reto entre dois pontos é o mais *curto*, e desviar sempre alonga. No espaço-tempo, a linha de mundo reta é a mais *longa* em tempo próprio, e desviar sempre encurta: a desigualdade triangular vale invertida. O sinal menos de $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ está por trás disso — o termo espacial *subtrai*, então mover-se no espaço custa tempo próprio.

ONDE SE ERRA

Isso reenquadra o paradoxo dos gêmeos, e vale mais que a discussão usual sobre quem acelerou. O viajante não envelhece menos *por causa* da aceleração: ele envelhece menos porque *desviou*, e desviar custa tempo próprio, como a conta acima mostra sem mencionar aceleração nenhuma. A aceleração entra apenas como aquilo que torna o desvio possível — é o preço de ir e voltar, não a causa do efeito. Tanto assim que a diferença de idades pode ser calculada, como acima, sem saber quando ou com que intensidade ele acelerou: basta conhecer $v(t)$.

O gêmeo que acelera para retornar percorre, portanto, uma linha de mundo com menor tempo próprio.

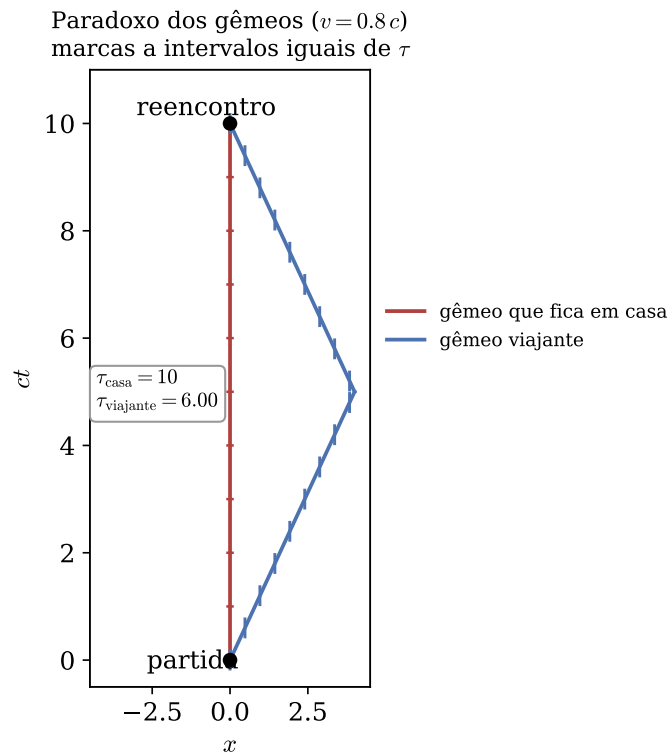


Figura 1.4. Diagrama de Minkowski do paradoxo dos gêmeos, com $v = 0.8$. As marcas transversais indicam intervalos *iguais* de tempo próprio ao longo de cada linha de mundo. O gêmeo viajante acumula visivelmente menos marcas entre a partida e o reencontro, mesmo percorrendo o mesmo par de eventos que o gêmeo que fica em casa.

Vale insistir no que a figura mostra: as marcas não representam “tique-taques que ficam mais lentos” em algum sentido absoluto. Cada marca é um intervalo igual de tempo próprio – o tempo lido por um relógio que acompanha aquele observador especificamente. A diferença entre τ_{casa} e τ_{viajante} é puramente geométrica: é a diferença entre o “comprimento” (no sentido de Minkowski) de duas curvas com os mesmos pontos extremos.

Exemplo 1.3. Ida a Arcturus, com escala. Dois gêmeos são separados ao nascer. Um permanece na Terra. O outro parte para Arcturus, a 36,7 anos-luz, viajando a 96,8% da velocidade da luz; lá ele fica *dois anos* e volta à mesma velocidade. Quantos anos tem cada um no reencontro?

O fator de Lorentz da viagem é

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,968^2}} \approx 3,98.$$

As duas pernas. Medido da Terra, cada trecho leva

$$t = \frac{D}{v} = \frac{36,7}{0,968} \approx 37,9 \text{ anos},$$

e o relógio da nave, por (1.3), acumula nesse trecho $t/\gamma \approx 9,5$ anos.

A escala. Aqui está o detalhe que o problema acrescenta. Parado em Arcturus, o viajante está em repouso em relação à Terra: não há velocidade relativa, logo não há dilatação nenhuma entre os dois. Os dois anos de escala são dois anos *para ambos*. A diferença de idade não cresce um único dia enquanto ele está parado.

O reencontro. Somando:

$$\tau_{\text{casa}} = 2 \times 37,9 + 2 \approx 77,8 \text{ anos}, \quad \tau_{\text{viajante}} = 2 \times 9,5 + 2 \approx 21,0 \text{ anos}.$$

O irmão que ficou reencontra um homem de 21 anos com quase 78 nas costas. Toda a diferença de 56,8 anos foi acumulada nas duas pernas de viagem, e nenhuma na escala.

E do lado da nave? Nada de estranho aconteceu: os 21 anos passaram um segundo após o outro. O que ele mede diferente é a *distância* — para ele, Arcturus não está a 36,7 anos-luz, e sim contraída por γ ,

$$D' = \frac{36,7}{3,98} \approx 9,2 \text{ anos-luz},$$

que a 0,968 da velocidade da luz se percorrem em 9,5 anos — exatamente o que o relógio dele marcou. Os dois gêmeos concordam sobre todos os fatos, e apenas os atribuem a grandezas diferentes: para quem ficou, o relógio da nave andou devagar; para quem viajou, o caminho é que era curto.

1.8 A velocidade invariante é única

Esta seção é um aprofundamento: nada do que vem depois depende dela, e uma primeira leitura pode pulá-la. Ela responde a uma pergunta que costuma incomodar quem já entendeu a dedução da Seção 1.4: a velocidade da luz entrou ali como postulado, quase por decreto. Seria possível chegar à mesma estrutura *sem* falar de luz?

A resposta é sim, e o que se ganha com ela é grande: a relatividade deixa de parecer uma teoria sobre eletromagnetismo e passa a ser o que de fato é — uma afirmação sobre a estrutura do espaço-tempo, na qual a luz apenas *ocupa* um lugar que já existia. Schutz não faz esta dedução; ela é o argumento clássico de Ignatowski, redescoberto várias vezes desde 1910.

As hipóteses. Nenhuma menciona luz:

1. *Homogeneidade* — nenhum ponto ou instante é privilegiado, o que já usamos para exigir que a transformação seja linear;
2. *Isotropia* — nenhuma direção é privilegiada, de modo que inverter o eixo x equivale a trocar v por $-v$;
3. *Princípio da relatividade* — os referenciais inerciais são todos equivalentes; em particular, a transformação de S' para S tem a mesma forma que a de S para S' , com v trocado por $-v$.

RESULTADO CENTRAL

Dedução. Pela hipótese 1 a transformação é linear, e pela condição de que a origem de S' se mova com velocidade v (a mesma *Condição 1* da Seção 1.4) ela tem necessariamente a forma

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - \beta x),$$

onde γ e β dependem só de v e o fator comum γ foi posto em evidência por conveniência. Nada até aqui fixa β ; em Galileu, $\beta = 0$ e $\gamma = 1$.

Agora a hipótese 2. Para que lado o eixo x aponta é convenção nossa, não física — e uma convenção não pode alterar a forma da transformação. Vire o eixo, então: chame $X = -x$ e $X' = -x'$. Nas coordenadas novas S' se afasta no sentido oposto, com velocidade $-v$, e a transformação tem de ter exatamente a mesma forma de antes:

$$X' = \gamma(-v)(X - (-v)t), \quad t' = \gamma(-v)(t - \beta(-v)X).$$

Traduza de volta, com $X = -x$ e $X' = -x'$. A primeira vira $-x' = \gamma(-v)(-x + vt)$, ou seja $x' = \gamma(-v)(x - vt)$; comparada com a declarada, $x' = \gamma(v)(x - vt)$, ela obriga

$$\gamma(-v) = \gamma(v).$$

Sabendo disso, a segunda vira $t' = \gamma(v)(t + \beta(-v)x)$; comparada com $t' = \gamma(v)(t - \beta(v)x)$, os fatores γ cancelam e sobra

$$\beta(-v) = -\beta(v).$$

Isto é: γ é função *par* de v , e β é *ímpar*. O resultado é razoável antes mesmo da conta. O fator γ é uma escala, e uma escala não sabe distinguir esquerda de direita — só pode depender de v^2 . Já β multiplica x , que *trocou de sinal* quando o eixo foi virado; para o produto βx sobreviver à troca, β tem de trocar de sinal junto.

Agora a hipótese 3. Em forma matricial a transformação é

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

com determinante $\gamma^2(1 - \beta v)$. Invertendo,

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta v)} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Mas o princípio da relatividade diz que essa inversa é a transformação direta com $v \rightarrow -v$. Escrevendo essa última e usando as duas paridades que a hipótese 2 acabou de estabelecer,

$$\gamma(-v) \begin{pmatrix} 1 & -\beta(-v) \\ v & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ v & 1 \end{pmatrix}.$$

Repare no que cada hipótese fez. Sem a paridade, o lado esquerdo ficaria preso a $\gamma(-v)$ e $\beta(-v)$, funções ainda desconhecidas, e não haveria o que comparar: é a hipótese 2 que *prepara* a comparação, e a hipótese 3 que *autoriza*.

Temos agora duas expressões para a mesma inversa, e elas têm a *mesma matriz* — só os fatores à frente diferem. Igualando-os,

$$\frac{1}{\gamma(1 - \beta v)} = \gamma,$$

ou seja

$$\gamma^2(1 - \beta v) = 1. \quad (1.8)$$

Falta relacionar β a v , e é aqui que entra a última exigência, também contida na hipótese 3: *compor* duas dessas transformações tem de dar outra do mesmo tipo, porque o resultado de trocar duas vezes de referencial inercial é ainda uma troca de referencial inercial.

Multiplique então as matrizes de v_1 e de v_2 :

$$\gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -v_2 & 1 \end{pmatrix} \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -v_1 & 1 \end{pmatrix} = \gamma_1 \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 + \beta_2 v_1 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ -(v_1 + v_2) & 1 + \beta_1 v_2 \end{pmatrix}.$$

Agora compare com a forma que o resultado precisa ter. Numa matriz do tipo $\gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -v & 1 \end{pmatrix}$ os dois elementos da diagonal são *o mesmo número*: ambos valem γ . No produto acima eles são $\gamma_1 \gamma_2(1 + \beta_2 v_1)$ e $\gamma_1 \gamma_2(1 + \beta_1 v_2)$, em geral diferentes — e enquanto forem diferentes não há fator nenhum que se

possa pôr em evidência para deixar 1 nas duas posições. Ou seja: o produto *não* seria uma transformação do mesmo tipo. Exigir que seja obriga

$$1 + \beta_2 v_1 = 1 + \beta_1 v_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta_2 v_1 = \beta_1 v_2,$$

e basta dividir por $v_1 v_2$ para obter

$$\frac{\beta(v_1)}{v_1} = \frac{\beta(v_2)}{v_2} \quad \text{para quaisquer } v_1, v_2.$$

Não há nada de especial no quociente β/v , e ele não foi escolhido: é simplesmente o que sobra ao igualar as duas diagonais. O que ele afirma, esse sim, é forte — dois valores *quaisquer* de velocidade produzem o mesmo quociente, e uma quantidade que não depende de v é uma constante. Chame-a de K :

$$\beta = Kv, \quad \text{e de (1.8)} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}}.$$

E acabou: sem nunca mencionar luz, a estrutura ficou determinada a menos de *uma única constante universal* K , com dimensão de inverso de velocidade ao quadrado. Restam três casos, e a natureza escolhe um deles por medida, não por dedução:

- $K = 0$. Então $\gamma = 1$ e $t' = t$: é exatamente (1.1). A transformação de Galileu não é rival da de Lorentz — é o caso particular $K = 0$ da mesma família.
- $K > 0$. Escreva $K = 1/c^2$, o que define uma velocidade c . Substituindo em (1.6), a composição fica $u' = (u - v)/(1 - uv/c^2)$, e $u = c$ dá $u' = c$: existe uma velocidade invariante, a mesma para todos os observadores. Recupera-se tudo o que este capítulo deduziu.
- $K < 0$. Aí $\gamma = 1/\sqrt{1 + |K|v^2}$, e agora é o *denominador* que nunca se anula: γ jamais diverge, nenhum valor de v fica excluído e não existe velocidade limite. É o oposto do caso anterior, em que o denominador zera em $v = c$ e é justamente essa divergência que barra velocidades maiores. As transformações passam a ser rotações euclidianas comuns num plano (t, x) . Uma rotação suficientemente grande leva qualquer evento para o passado de qualquer outro: não sobra ordem causal nenhuma, e causa e efeito perdem o sentido. Este caso é descartado pela experiência mais banal.

ONDE SE ERRA

O ponto desta dedução não é dispensar o experimento — K tem de ser medido, e é. O ponto é *onde* o experimento entra. Ele não determina a forma das equações, que já estava fixada por homogeneidade, isotropia e relati-

dade sozinhas; determina apenas o valor de um número. E, medido $K > 0$, a existência de uma velocidade invariante é consequência, não hipótese: ela existiria mesmo que o fóton tivesse massa. A luz é rápida porque o fóton não tem massa; c é invariante porque o espaço-tempo é assim.

1.9 As transformações em forma matricial

Até aqui a transformação de Lorentz apareceu como um par de equações. Isso basta enquanto há um boost só. Quando começarmos a compor transformações — e a oficina computacional deste capítulo já pede isso — escrever quatro equações a cada passo fica insustentável. A saída é a mesma da álgebra linear: uma transformação linear é uma matriz, e compor transformações é multiplicar matrizes.

Reúna as quatro coordenadas de um evento em uma coluna e a transformação (1.4) em uma matriz:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

de modo que $x' = \Lambda x$ reproduz, linha a linha, exatamente $t' = \gamma(t - vx)$, $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$ e $z' = z$. As duas últimas linhas são a identidade porque o boost não mexe nas direções transversais; toda a física está no bloco 2×2 do canto superior esquerdo, e é por isso que os programas trabalham com uma matriz 2×2 quando o movimento é ao longo de um eixo só.

Em componentes, escreve-se

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta, \quad (1.10)$$

com a convenção de soma: um índice repetido, uma vez em cima e uma vez embaixo, está somado de 0 a 3. O índice de cima numera a *linha* e o de baixo a *coluna*. Essa notação parece um preciosismo agora — e é, para um boost — mas é ela que sobrevive ao capítulo de tensores e à relatividade geral, onde as matrizes deixam de ser constantes.

CONVENÇÃO DE SOMA DE EINSTEIN

A regra. Um índice que aparece *duas vezes* no mesmo termo, uma vez em cima e uma vez embaixo, está somado de 0 a 3. O sinal de somatório não se

escreve:

$$\Lambda^\alpha_\beta x^\beta \equiv \sum_{\beta=0}^3 \Lambda^\alpha_\beta x^\beta = \Lambda^\alpha_0 x^0 + \Lambda^\alpha_1 x^1 + \Lambda^\alpha_2 x^2 + \Lambda^\alpha_3 x^3.$$

Dois tipos de índice. O β acima é *mudo*: ele desaparece na soma e seu nome não importa — $\Lambda^\alpha_\beta x^\beta$ e $\Lambda^\alpha_\mu x^\mu$ são a mesma coisa. Já o α é *livre*: aparece uma única vez e sobrevive, dizendo qual das quatro equações estamos escrevendo. A equação $x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$ não é uma equação: são quatro, uma para cada valor de α , cada uma com quatro termos somados.

Três verificações que pegam quase todo erro de índice.

1. Os índices *livres* têm de ser os mesmos, e na mesma posição (em cima ou embaixo), nos dois lados da igualdade e em cada termo de uma soma.
2. Um índice não pode aparecer *três* vezes no mesmo termo. Se apareceu, houve colisão de nomes: renomeie um dos mudos.
3. Todo índice repetido deve estar uma vez em cima e uma vez embaixo. Dois índices repetidos na mesma altura são sinal de erro — a posição vai significar algo a partir do Capítulo 3.

Vale insistir no terceiro item. Por ora a distinção entre índice em cima e índice embaixo parece só uma regra de arrumação, e nada se perderia escrevendo tudo embaixo. A partir do capítulo de tensores ela passa a distinguir dois objetos genuinamente diferentes — vetores e 1-formas —, e a convenção soma exatamente o par que produz um número independente de coordenadas. Escrever os índices na altura certa desde agora é o que evita ter de desaprender depois.

CURIOSIDADE

Einstein introduziu a convenção em 1916, no artigo que apresentou a relatividade geral, com uma única frase de nota: “uma olhada nas fórmulas deste parágrafo mostra que sempre se soma sobre índices que aparecem duas vezes”. Anos depois, segundo o colega Louis Kollros, teria comentado com um amigo:

“Fiz uma grande descoberta na matemática: suprimi o sinal de somatório toda vez que a soma deve ser feita sobre um índice que aparece duas vezes.”

E é uma grande descoberta. Enxuga tanto a página que torna praticável escrever à mão as equações de campo, onde os somatórios explícitos se contariam às dezenas.

A condição que define uma transformação de Lorentz

O intervalo também tem forma matricial. Definindo a *métrica de Minkowski*

$$\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1), \quad \Delta s^2 = \Delta x^T \eta \Delta x = \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \quad (1.11)$$

o produto $\Delta x^T \eta \Delta x$ devolve $-\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, que é o intervalo com que trabalhamos desde a Seção 1.2.

Agora a pergunta central do capítulo tem uma resposta de uma linha. Exigir que Λ preserve o intervalo é exigir que $\Delta x'^T \eta \Delta x' = \Delta x^T \eta \Delta x$ para *todo* Δx . Como $\Delta x' = \Lambda \Delta x$, o lado esquerdo é $\Delta x^T (\Lambda^T \eta \Lambda) \Delta x$, e a igualdade para todo Δx obriga

$$\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta} \quad (1.12)$$

RESULTADO CENTRAL

A equação (1.12) é a definição de transformação de Lorentz. Tudo o que deduzimos na Seção 1.4 — a forma de γ , o termo $-vx$ no tempo, a impossibilidade de $t' = t$ — está contido nela. Boosts em qualquer direção e rotações espaciais a satisfazem, e são as únicas transformações lineares que a satisfazem.

Vale conferir uma vez, à mão, que o boost (1.9) cumpre a condição. Restringindo ao bloco 2×2 , onde $\eta = \text{diag}(-1, 1)$:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} -1+v^2 & 0 \\ 0 & 1-v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde o último passo usa $\gamma^2(1-v^2) = 1$ — a mesma identidade que define γ . Não é coincidência: foi exatamente a invariância do intervalo que fixou γ lá atrás.

Compor é multiplicar

O ganho aparece agora. Dois boosts colineares sucessivos são o produto $\Lambda(w)\Lambda(v)$, e o resultado é

$$\Lambda(w) \Lambda(v) = \Lambda\left(\frac{v+w}{1+vw}\right), \quad (1.13)$$

que é a lei de composição (1.6) outra vez — agora como uma propriedade de fechamento: *o produto de dois boosts é um boost*. Verificar isso multiplicando as matrizes com γ explícito é possível, mas desagradável. Com a rapidez do Exem-

plo 1.6, $v = \tanh \varphi$, a matriz fica

$$\Lambda(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

e a conta some: pelas fórmulas de adição de cossenos e senos hiperbólicos,

$$\Lambda(\varphi) \Lambda(\psi) = \Lambda(\varphi + \psi).$$

Os boosts colineares formam um grupo de um parâmetro, e o parâmetro que soma é a rapidez — não a velocidade. Comparada com a rotação usual, a única mudança foi trocar $\cos, \sin$ por $\cosh, \sinh$ e o sinal de um termo: uma rotação preserva $x^2 + y^2$, esta preserva $-t^2 + x^2$.

A RAPIDEZ TEM UNIDADE? DÁ PARA MEDI-LA?

Unidade: nenhuma. Em $\varphi = \operatorname{artanh}(v/c)$ o argumento já é adimensional, e o resultado também — a rapidez é um número puro, como o ângulo em radianos. E o paralelo é literal: assim como o ângulo em radianos é o *dobro da área* do setor circular de raio 1, a rapidez é o dobro da área do setor hiperbólico. Daí o nome das funções inversas: em artanh e arcosh , o “ar” é de *área* — ao contrário do arctan , que tem arco. A rapidez é, literalmente, um ângulo hiperbólico.

Medida: mais direta que a da velocidade. Medir velocidade a distância exige uma régua e *dois relógios sincronizados*, isto é, exige escolher uma convenção de simultaneidade — exatamente o que este capítulo mostrou depender do referencial. A rapidez escapa disso de três maneiras:

- **Efeito Doppler.** O fator Doppler é $k = \sqrt{(1+v)/(1-v)} = e^\varphi$, de modo que $\varphi = \ln k$. Medir uma razão de frequências é das medidas mais precisas da física, e é feita *em um ponto só*, sem sincronizar relógio nenhum.
- **Acelerômetro e relógio de bordo.** Com aceleração própria a , a rapidez acumulada é $\varphi = \int a \, d\tau$. As duas grandezas são medidas a bordo: o astronauta sabe a própria rapidez sem olhar pela janela. A *velocidade*, não — ela precisa ser relativa a alguém.
- **Física de partículas.** Aceleradores reportam rapidez, $y = \frac{1}{2} \ln \frac{E+p_z}{E-p_z}$, e não velocidade, porque *diferenças* de rapidez não mudam sob boosts ao longo do feixe. Quando a massa não é conhecida usa-se a pseudorapidez $\eta = -\ln \tan(\theta/2)$, que sai direto do ângulo medido no detector.

A intuição pede velocidade; o Doppler, o acelerômetro e o detector entregam rapidez.

Duas consequências saem de graça de (1.12). Tomando o determinante, $(\det \Lambda)^2 =$

1; os boosts têm $\det \Lambda = +1$. E a inversa é

$$\Lambda(v)^{-1} = \Lambda(-v), \quad (1.15)$$

que é a afirmação óbvia de que desfazer um boost é aplicar o boost contrário — e a versão matricial da simetria que já usamos ao exigir que a transformação de S' para S tivesse a mesma forma com $v \rightarrow -v$.

ONDE SE ERRA

Matrizes não comutam, e isso é física. Para boosts colineares a ordem não importa, porque as rapidezzes simplesmente somam. Para boosts em direções *diferentes*, importa: $\Lambda_x(v_1)\Lambda_y(v_2) \neq \Lambda_y(v_2)\Lambda_x(v_1)$, e nenhum dos dois produtos é um boost puro — cada um é um boost composto com uma rotação espacial. Essa rotação não é artifício de conta: é a *rotação de Wigner*, responsável pela precessão de Thomas do spin do elétron no átomo. O primeiro problema do Conteúdo extra pede para encontrá-la numericamente, e é para isso que a forma matricial era necessária: com pares de equações soltas, compor dois boosts perpendiculares seria quase impraticável.

1.10 Problemas orientados

1. **Relógio de luz.** Monte o argumento da dilatação temporal usando dois espelhos separados por uma distância L . Primeiro calcule o período no referencial do relógio. Depois calcule o caminho diagonal percorrido pela luz quando o relógio se move com velocidade v . A pista é aplicar Pitágoras ao triângulo formado por metade do percurso.
2. **A barra e o celeiro.** Uma barra de comprimento próprio L_0 atravessa um celeiro de comprimento próprio $L_0/2$, com v tal que $\gamma = 2$. Para o fazendeiro, a barra contraída mede $L_0/2$ e cabe inteira, com as duas portas fechando ao mesmo tempo. Para o piloto da barra, é o celeiro que mede $L_0/4$, e a barra não cabe de jeito nenhum. Os dois não podem estar errados sobre um fato — a barra ficou ou não ficou presa. Resolva localizando os *quatro* eventos (cada porta fechando, cada ponta da barra passando por ela) e mostrando que “as duas portas fecham ao mesmo tempo” vale em um referencial e não no outro. Conclua o que de fato acontece.
3. **Ordem temporal.** Escolha dois eventos com separação espacial. Encontre uma velocidade v tal que a ordem temporal dos eventos seja invertida. Discuta por que isso não viola causalidade.
4. **Tempo próprio máximo.** Compare uma linha de mundo inercial com uma trajetória formada por dois trechos retilíneos de velocidades opostas. Calcule

o tempo próprio total e interprete a desigualdade resultante.

5. **Velocidades transversais e aberração.** A Seção 1.5 compôs velocidades ao longo do movimento. Refaça a conta para uma partícula que, em S , tem *também* componente u_y , lembrando que $y' = y$ mas $dt' \neq dt$, e obtenha

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v)}.$$

Note que $u'_y \neq u_y$ mesmo sem contração transversal: a diferença vem inteira do tempo. Aplique a um raio de luz com $u_x = 0$, $u_y = 1$ e mostre que em S' ele chega inclinado — este é o fenômeno da *aberração estelar*, que muda a posição aparente das estrelas ao longo do ano e foi medido por Bradley em 1728, bem antes de haver relatividade para explicá-lo.

6. **Rapidez.** Defina a rapidez φ por $v = \tanh \varphi$. Mostre que transformações de Lorentz sucessivas na mesma direção somam rapidezzes. Essa variável revela a estrutura hiperbólica da relatividade.

1.11 Exemplos resolvidos adicionais

Exemplo 1.4. Simultaneidade relativa. Dois eventos ocorrem em S com $\Delta t = 0$ e $\Delta x = L$. Em S' , que se move com velocidade v em relação a S ,

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) = -\gamma vL.$$

Logo os eventos não são simultâneos em S' . O sinal negativo indica que, para $v > 0$, o evento com maior x ocorre antes em S' . Essa conta simples é a origem operacional da contração de comprimentos: medir uma barra em movimento requer escolher eventos simultâneos no referencial de medida.

Exemplo 1.5. Invariância do cone de luz. Se $\Delta x = \Delta t$ em uma dimensão espacial, então a separação é nula. Aplicando Lorentz,

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) = \gamma\Delta t(1 - v),$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma\Delta t(1 - v).$$

Portanto $\Delta x' = \Delta t'$. Um raio de luz continua sendo raio de luz para qualquer observador inercial.

Exemplo 1.6. Rapidez e composição. Escreva $v = \tanh \varphi$. Então $\gamma = \cosh \varphi$ e $\gamma v = \sinh \varphi$. A transformação de Lorentz em 1 + 1 dimensões fica

$$t' = t \cosh \varphi - x \sinh \varphi, \quad x' = x \cosh \varphi - t \sinh \varphi.$$

Ela se parece com uma rotação hiperbólica. Duas transformações sucessivas somam os parâmetros φ , o que explica por que a lei de adição de velocidades não é simplesmente soma de velocidades.

Exemplo 1.7. Tempo próprio em trajetória por partes. Uma nave afasta-se da Terra com velocidade v durante tempo coordenado $T/2$ e retorna com velocidade $-v$ durante $T/2$. O tempo próprio acumulado é

$$\tau = T\sqrt{1 - v^2}.$$

O relógio terrestre, aproximadamente inercial nesse modelo idealizado, acumula T . A diferença não é causada apenas pelo instante de aceleração, mas pela geometria total da linha de mundo escolhida.

1.12 Resolução numérica

Esta seção resolve dois problemas do capítulo por computador: (i) verificar numericamente que os boosts de Lorentz preservam o intervalo e compõem-se pela fórmula relativística de adição de velocidades, e não pela soma ingênua; (ii) calcular o tempo próprio do gêmeo viajante quando a velocidade varia suavemente no tempo, caso em que a integral $\tau = \int \sqrt{1 - v(t)^2} dt$ não tem forma fechada simples e precisa ser tratada numericamente. Os dois problemas são resolvidos em Python e, de forma simbólica, em Mathematica. Os scripts completos estão na pasta `codigo/` que acompanha esta apostila.

1.12.1 Python

O primeiro script constrói a matriz de boost 2×2 e testa numericamente, com velocidades aleatórias, que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ e que a composição de dois boosts colineares reproduz a fórmula de adição de velocidades (e não $v_1 + v_2$).

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap01_boosts.py`

Invariância do intervalo, composição de boosts e aditividade da rapidez, testadas com velocidades aleatórias.

A execução confirma as três propriedades com resíduo numérico da ordem de 10^{-16} (erro de arredondamento de ponto flutuante, não erro físico): a invariância do intervalo, a composição correta de boosts e a aditividade da rapidez $\varphi = \operatorname{artanh} v$.

O segundo script resolve o paradoxo dos gêmeos para um perfil de velocidade suave, $v(t) = v_0 \sin(\pi t/T)$, que parte e retorna ao repouso continuamente (sem o salto instantâneo de velocidade do modelo idealizado). A integral do tempo próprio é calculada por quadratura adaptativa.

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap01_tempo_proprio.py`

Tempo próprio do gêmeo viajante por quadratura adaptativa, para um perfil de velocidade suave.

Com $T = 10$ e $v_0 = 0,8$, a integração numérica dá $\tau_{\text{viajante}} \approx 8,1255$, contra $T = 10$ para o gêmeo que fica em casa – uma diferença de cerca de 18%. O script também mostra por que não se pode simplesmente usar o fator de Lorentz da velocidade *média*: $T/\gamma(\bar{v}) \approx 8,61$ subestima o efeito, porque γ é uma função convexa de v^2 e não comuta com a média temporal (desigualdade de Jensen). A Figura 1.5 mostra o perfil de velocidade e o tempo próprio acumulado.

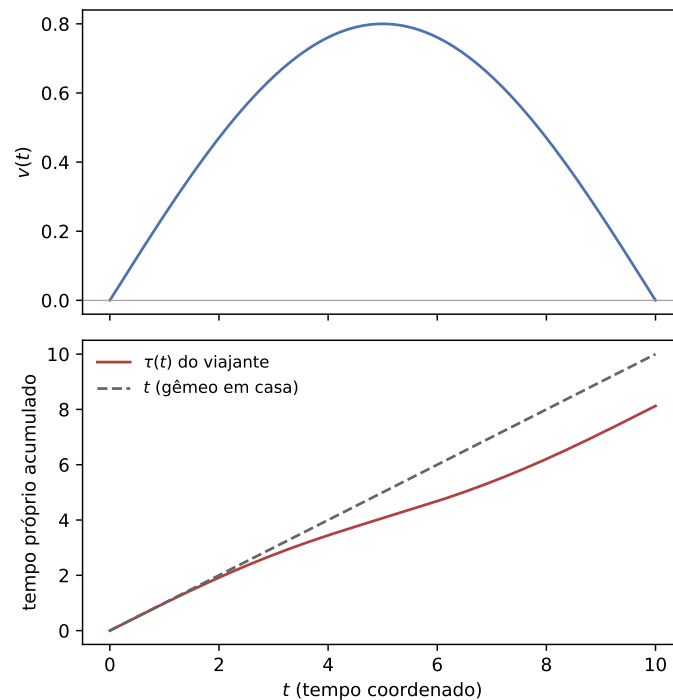


Figura 1.5. Acima: perfil de velocidade suave $v(t) = v_0 \sin(\pi t/T)$ do gêmeo viajante. Abaixo: tempo próprio acumulado $\tau(t)$ (integração numérica, vermelho) comparado ao tempo coordenado t do gêmeo em casa (tracejado).

1.12.2 Mathematica

O mesmo conjunto de verificações pode ser feito simbolicamente. Aqui o valor do Mathematica não é confirmar números, mas provar as identidades algebricamente para *qualquer* v_1, v_2 no intervalo físico $(-1, 1)$, sem depender de amostragem aleatória.

PROGRAMA

`codigo/cap01_boosts.wl`

[baixar →](#)

As mesmas três identidades, provadas simbolicamente para v_1 e v_2 arbitrários.

Os três primeiros Print produzem a matriz nula 2×2 : isso é a prova simbólica de que (i) o intervalo é invariante, (ii) a composição de dois boosts colineares é exatamente o boost com a velocidade relativística combinada, e (iii) na variável rapidez a composição é simplesmente soma. O último bloco resolve, por eliminação direta (sem supor a resposta), a velocidade efetiva de dois boosts sucessivos e recupera

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2},$$

fechando o ciclo: a fórmula de adição de velocidades (1.6), deduzida na Seção 1.5

dividindo uma linha da transformação pela outra, reaparece aqui de modo puramente algébrico — como a simples soma dos parâmetros de duas rotações hiperbólicas, sem qualquer apelo a diagramas ou limites físicos.

1.13 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 1.1. FÁCIL Schutz §1.6

Dois eventos têm coordenadas $A = (0, 0)$ e $B = (4, 3)$ em um referencial S , em unidades com $c = 1$. Calcule Δs^2 e classifique a separação. Existe um referencial inercial em que os dois eventos sejam simultâneos? Se existir, determine sua velocidade em relação a S ; se não, explique o que impede.

Exercício 1.2. FÁCIL Schutz §1.8

Uma régua de comprimento próprio 1,00 m move-se com $v = 0,60$ ao longo de seu próprio eixo. (a) Qual o comprimento medido no laboratório? (b) Um relógio preso à régua avança 1,00 s entre dois eventos; quanto avança o relógio do laboratório entre os mesmos eventos? (c) Justifique por que as duas respostas usam fatores γ em posições opostas.

Exercício 1.3. MÉDIO Schutz §1.10

Partindo das transformações de Lorentz, deduza a lei de composição de velocidades colineares $u' = (u - v)/(1 - uv)$. Verifique que $u = 1$ implica $u' = 1$ para qualquer v , e mostre que, se $|u| < 1$ e $|v| < 1$, então $|u'| < 1$ — isto é, nenhuma composição de velocidades subluminais produz uma velocidade superluminal.

Exercício 1.4. MÉDIO Schutz §1.7

As hipérboles invariantes são o instrumento gráfico que calibra os eixos de um diagrama de Minkowski. (a) Mostre que o lugar geométrico dos eventos com $\Delta s^2 = -1$ é uma hipérbole que cruza o eixo t em $t = 1$. (b) Desenhe o diagrama para $v = 0,5$ e use a interseção da hipérbole com o eixo t' para marcar a unidade de t' . (c) Explique por que essa unidade aparece *maior* que a de t no papel, embora ambas valham um segundo próprio.

Exercício 1.5. DIFÍCIL Schutz §1.11

Duas naves partem da Terra simultaneamente em sentidos opostos, cada uma com $v = 0,8$ medida da Terra. Cada capitão afirma que o relógio da outra nave atrasa. (a) Calcule a velocidade relativa entre as naves. (b) No referencial da nave 1, quanto tempo próprio decorre na nave 2 enquanto a nave 1 acumula 1 ano? (c) As duas afirmações são contraditórias? Resolva o aparente paradoxo

identificando explicitamente qual par de eventos cada capitão está comparando, e mostre em um diagrama de Minkowski que os dois pares são diferentes.

1.14 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **A rotação de Wigner.** Em `cap01_boosts.py`, troque a matriz 2×2 por uma 4×4 e componha dois boosts em direções *perpendiculares*, $\Lambda_x(v_1)\Lambda_y(v_2)$. Mostre numericamente que o produto não é um boost puro: ele preserva o intervalo, mas contém uma rotação espacial. Extraia o ângulo dessa rotação e verifique que, para $v_1 = v_2 = 0,6$, ele vale $12,7^\circ$ — compare com a fórmula fechada $\tan \theta = \gamma_1 \gamma_2 v_1 v_2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$. Esse é o efeito que produz a precessão de Thomas no átomo.
2. **Qual perfil de viagem envelhece menos?** Em `cap01_tempo_proprio.py`, o gêmeo viaja com $v(t) = v_0 \sin(\pi t/T)$. Substitua por outros três perfis com o *mesmo* T e a *mesma* velocidade máxima v_0 : um trapézio, uma onda quadrada suavizada e $v_0 \sin^2(\pi t/T)$. Calcule τ para cada um e ordene-os. Qual perfil minimiza o tempo próprio, e por quê? Cuidado com a justificativa: como todos têm o mesmo v_0 , o que decide a ordem é $\sqrt{1-v^2}$ ser *decrecente* em $|v|$ — ganha quem passa mais tempo perto do máximo. A *concavidade* de $\sqrt{1-v^2}$ responde a uma pergunta diferente, que o próprio script já ilustra: por que $T/\gamma(\bar{v})$, calculado com a velocidade *média*, superestima τ . Explique as duas coisas separadamente.
3. **O horizonte de Rindler.** Em `cap01_figuras.py`, acrescente ao diagrama do cone de luz a linha de mundo hiperbólica de um observador com aceleração própria constante a_0 , $x^2 - t^2 = 1/a_0^2$ (a Seção 2.3 a deduziu). Desenhe também a assíntota $x = t$. Um fóton emitido em $t = 0$ da posição x_0 , rumo a $+x$, tem $x = x_0 + t$: imponha o encontro com a hipérbole e mostre que ele ocorre em

$$t = \frac{1/a_0^2 - x_0^2}{2x_0}.$$

Verifique que esse tempo é positivo (o fóton alcança) somente para $0 < x_0 < 1/a_0$, e que para $x_0 \leq 0$ o encontro nunca acontece. Note que $x_0 = 0$ é o caso *crítico*: o fóton emitido exatamente da origem persegue o observador para sempre sem jamais alcançá-lo, porque viaja paralelamente à assíntota. A reta $x = t$ é, portanto, um *horizonte* — nada emitido à esquerda dela chega ao observa-

dor acelerado, mesmo viajando à velocidade da luz e mesmo sem gravidade nenhuma.

1.15 Indo além: a rapidez e o fator Doppler

LEITURA ORIENTADA

Esta seção é opcional em primeira leitura. Ela retoma a rapidez introduzida na Seção 1.9, mostra que a lei estranha de composição de velocidades é o que *qualquer* rotação faz quando descrita pelo parâmetro errado, e deduz o fator Doppler — que acaba sendo a maneira mais direta de medir a rapidez de uma fonte.

A rapidez como ângulo hiperbólico

Partindo das transformações na forma $t' = \gamma t - \gamma v x$ e $x' = \gamma x - \gamma v t$, faça a substituição

$$v = \tanh \varphi, \quad \gamma = \cosh \varphi \quad \implies \quad \gamma v = \sinh \varphi,$$

onde a última igualdade sai de $\cosh \varphi \tanh \varphi = \sinh \varphi$. A transformação fica

$$t' = t \cosh \varphi - x \sinh \varphi, \quad x' = x \cosh \varphi - t \sinh \varphi, \quad (1.16)$$

uma *rotação hiperbólica* de parâmetro φ — a **rapidez**, adimensional. Compare com a rotação euclidiana usual, $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ e $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$: a única mudança foi trocar $\cos, \sin$ por $\cosh, \sinh$ e um sinal.

Componha agora duas dessas transformações. Aplicando (1.16) com φ_2 ao resultado da primeira,

$$t'' = t' \cosh \varphi_2 - x' \sinh \varphi_2 = (t \cosh \varphi_1 - x \sinh \varphi_1) \cosh \varphi_2 - (x \cosh \varphi_1 - t \sinh \varphi_1) \sinh \varphi_2,$$

e reagrupando em t e x :

$$t'' = t(\cosh \varphi_1 \cosh \varphi_2 + \sinh \varphi_1 \sinh \varphi_2) - x(\sinh \varphi_1 \cosh \varphi_2 + \cosh \varphi_1 \sinh \varphi_2).$$

Os dois parênteses são exatamente $\cosh(\varphi_1 + \varphi_2)$ e $\sinh(\varphi_1 + \varphi_2)$, de modo que

$$t'' = t \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - x \sinh(\varphi_1 + \varphi_2).$$

RESULTADO CENTRAL

Compor duas transformações de Lorentz é *somar* as rapidezzes. A velocidade,

por sua vez, é a “inclinação hiperbólica” $v = \tanh \varphi$ — e é por isso que a composição *dela* tem uma forma complicada.

Em Euclides e no espaço-tempo

Vale ver os dois casos lado a lado, porque a semelhança desfaz a impressão de que a relatividade inventou uma regra bizarra.

No plano euclidiano. Duas rotações de θ_1 e θ_2 compõem numa de $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ — soma trivial. Mas se cada uma for descrita pela *inclinação* $m = \tan \theta$, então

$$m_3 = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2},$$

e dividindo numerador e denominador por $\cos \theta_1 \cos \theta_2$:

$$m_3 = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}. \quad (1.17)$$

No espaço-tempo. Com $v_1 = \tanh \varphi_1$ e $v_2 = \tanh \varphi_2$,

$$v_3 = \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\sinh \varphi_1 \cosh \varphi_2 + \sinh \varphi_2 \cosh \varphi_1}{\cosh \varphi_1 \cosh \varphi_2 + \sinh \varphi_1 \sinh \varphi_2},$$

e dividindo por $\cosh \varphi_1 \cosh \varphi_2$:

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}. \quad (1.18)$$

UM SINAL, DUAS FÍSICAS

As fórmulas (1.17) e (1.18) diferem por *um sinal* no denominador, e é esse sinal que decide tudo. Em $1 - m_1 m_2$ o denominador zera quando $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, e a inclinação escapa para o infinito — embora o ângulo não tenha nada de especial ali. Já $1 + v_1 v_2$ *nunca* zera para $|v| < 1$: nada diverge, e nenhuma composição de velocidades subluminais alcança a luz.

O fator Doppler, deduzido

Uma fonte emite pulsos a intervalos T *no relógio dela* e se afasta com velocidade v . Qual o intervalo T_{rec} entre as recepções, medido pelo observador? Três efeitos se somam, e vale separá-los:

1. **O relógio da fonte bate mais devagar.** Para o observador, o intervalo entre

duas emissões não é T , e sim $\Delta t_{\text{em}} = \gamma T$.

2. **A fonte recuou entre uma emissão e outra.** Nesse intervalo ela percorreu $\Delta x = v \Delta t_{\text{em}} = v\gamma T$, de modo que o segundo pulso parte de mais longe e leva um tempo extra $\Delta x/c = v\gamma T$ (com $c = 1$) para chegar.

3. **Soma.** O intervalo entre as duas recepções é

$$T_{\text{rec}} = \gamma T + v\gamma T = \gamma T(1 + v).$$

Definindo o *fator Doppler* k como a razão entre o intervalo recebido e o emitido,

$$k \equiv \frac{T_{\text{rec}}}{T} = \gamma(1 + v) = \frac{1 + v}{\sqrt{(1 + v)(1 - v)}} = \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}}. \quad (1.19)$$

Como o intervalo entre pulsos é o inverso da frequência, o mesmo k mede a razão das frequências: $k = \nu_{\text{em}}/\nu_{\text{rec}}$.

Por que a rapidez é o que se mede

Escreva k em termos da rapidez. De (1.19), $k = \gamma + \gamma v = \cosh \varphi + \sinh \varphi$, e como $\cosh \varphi = \frac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi})$ e $\sinh \varphi = \frac{1}{2}(e^\varphi - e^{-\varphi})$, a soma colapsa:

$$\boxed{k = e^\varphi} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \ln k. \quad (1.20)$$

RESULTADO CENTRAL

A rapidez é o *logaritmo* do fator Doppler. E $k = \nu_{\text{em}}/\nu_{\text{rec}}$ é uma razão entre duas medidas **locais** — uma feita por quem emite, outra por quem recebe. Não é preciso régua, nem sincronizar relógios distantes, nem escolher uma convenção de simultaneidade: o que se compara são duas frequências.

Isto também explica por que compor boosts fica tão simples nessa linguagem: como $k = e^\varphi$ e as rapidezes somam, os fatores Doppler *multiplicam*,

$$k_1 k_2 = e^{\varphi_1} e^{\varphi_2} = e^{\varphi_1 + \varphi_2} = k_3.$$

Duas fontes a $v = 0,6$ em série dão $2 \times 2 = 4$, que é o fator de $v_3 = 0,882$. É sobre essa observação que Bondi construiu uma apresentação inteira da relatividade especial contando apenas sinais de luz — o chamado *k-calculus*.

Como se conhece ν_{em} : o espectro de um elemento

Fica uma pergunta honesta: para calcular $k = \nu_{\text{em}}/\nu_{\text{rec}}$ o observador precisa saber a frequência *emitida*, e a fonte está longe. De onde ele a tira?

Da estrutura do espectro. Cada elemento emite um conjunto característico de linhas, com posições conhecidas em laboratório. Quando a fonte se afasta, (1.20) multiplica *todas* as frequências pelo mesmo fator k — e uma multiplicação global preserva as razões entre elas. O padrão desloca-se inteiro, sem se deformar.

ONDE SE ERRA

É por isso que se identifica hidrogênio numa galáxia distante mesmo com todas as linhas fora do lugar: o que identifica o elemento não é a posição absoluta de cada linha, e sim o *espaçamento relativo* do conjunto, que o fator k não altera. Reconhecido o padrão, a comparação com o laboratório dá k , e (1.20) dá a rapidez da fonte.

Vetores e momento relativístico

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Construir a linguagem de quadrivetores e usá-la para resolver problemas de cinemática e dinâmica relativística sem depender de componentes particulares.

2.1 Vetores no espaço-tempo

Antes de construir quadri-velocidade e quadri-momento, é preciso dizer o que é um vetor aqui — porque a resposta não é “uma lista de quatro números”.

O critério é a transformação. Um evento tem coordenadas x^μ que mudam de um referencial $\mathcal{O}$ para outro, $\mathcal{O}'$, pela transformação de Lorentz da Seção 1.4, que podemos escrever de forma compacta como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (2.1)$$

onde Λ^μ_ν é a matriz de coeficientes de (1.4) e vale a convenção de soma de (1.10). *Um quadrivetor é qualquer conjunto de quatro números que se transforme exatamente assim.* Essa é a definição inteira, e ela tem consequência prática imediata: quatro números juntos num parêntese não formam um vetor até que se verifique como eles mudam de referencial.

O exemplo que interessa é dx^μ , o deslocamento entre dois eventos vizinhos: por ser diferença de coordenadas, ele se transforma como (2.1). Dividi-lo por um *escalar* — um número igual em todos os referenciais — devolve outro vetor, porque a matriz Λ passa direto pela divisão. É essa observação, e só ela, que fará da quadri-velocidade um vetor na Seção 2.3.

ONDE SE ERRA

Dividir por dt não produziria um vetor: dt é a componente temporal de dx^μ , e muda de referencial para referencial. O conjunto $dx^\mu/dt = (1, \mathbf{v})$ não é, portanto, um quadrivetor — é por isso que a velocidade ordinária

v obedece à lei de composição desajeitada (1.6), em vez de se transformar linearmente. (Isso não quer dizer que v esteja banida do formalismo: ela reaparece, corrigida por um fator γ , como parte espacial da quadrivelocidade e do quadrimomento.) O que salva a construção é existir um escalar natural ao longo da linha de mundo: o tempo próprio.

2.2 Produto escalar

A operação que dá conteúdo geométrico a tudo o que vem a seguir é o produto escalar. Ele já existe, disfarçado: o intervalo $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ é o produto de dx^μ consigo mesmo. Generalizando para dois vetores quaisquer A^μ e B^μ ,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu, \quad (2.2)$$

onde a última forma introduz a *métrica de Minkowski*

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1),$$

que é apenas a tabela de sinais de (2.2) escrita como matriz. A convenção de soma faz o resto.

RESULTADO CENTRAL

O produto escalar é invariante: $\vec{A} \cdot \vec{B}$ tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais.

Metade da demonstração já está pronta e nem precisa ser refeita. Aplicada a $\vec{A} = \vec{B} = d\vec{x}$, a definição (2.2) devolve ds^2 , cuja invariância foi estabelecida no capítulo anterior.

Falta um passo que é curto mas não é vazio: passar de $d\vec{x}$ para um vetor *qualquer*. Dizer que ds^2 é invariante para *todo* deslocamento dx^μ é dizer algo sobre a matriz Λ , e só sobre ela — precisamente que $\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu}$. Mas essa é a única propriedade de Λ que a conta usa, e todo quadrivetor se transforma com essa *mesma* matriz — é o que a Seção 2.1 tomou como definição. Logo a *norma* $\vec{A} \cdot \vec{A}$ — um vetor consigo mesmo — é a mesma em todos os referenciais, seja $\vec{A}$ um deslocamento ou não.

Falta o produto de dois vetores *diferentes*, e o resto do argumento é curto. Se a norma de qualquer vetor é invariante, então a norma de $\vec{A} + \vec{B}$ também é — afinal $\vec{A} + \vec{B}$ é um vetor como outro qualquer. Mas essa norma, expandida pela definição (2.2), vale

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} + 2 \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (2.3)$$

Agora repare no que já sabemos sobre cada pedaço de (2.3). O lado esquerdo é invariante, por ser uma norma. Os dois primeiros termos da direita são invariantes, pelo mesmo motivo. Numa igualdade em que todas as parcelas menos uma já são as mesmas em qualquer referencial, a que sobra não tem escolha: $2 \vec{A} \cdot \vec{B}$ é invariante, e portanto $\vec{A} \cdot \vec{B}$ também.

A MANOBRA, EM UMA FRASE

Não foi preciso calcular nada: bastou somar dois vetores e olhar para a norma da soma. É um truque que vale a pena guardar, porque reaparece o curso inteiro — *quando uma soma é invariante e todas as parcelas menos uma também são, a última herda a invariância.*

Por que isso é a ferramenta central. Um produto escalar é um número que não depende de quem calcula. Sempre que uma pergunta física for respondida por um produto escalar, a resposta pode ser obtida no referencial mais conveniente e depois usada em qualquer outro. Boa parte da eficiência do formalismo relativístico é essa, e não outra.

Uma abreviação de notação. Escrever $\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ o tempo todo cansa, e é usual definir

$$A_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad \text{de modo que} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_\mu B^\mu. \quad (2.4)$$

Em componentes, isso apenas troca o sinal da componente temporal: $A_0 = -A^0$ e $A_i = A^i$. Por ora trate (2.4) como o que ela é — uma abreviação cômoda. O objeto A_μ tem vida geométrica própria (é uma *1-forma*, e a métrica é o que permite associá-la a A^μ), mas isso é assunto do Capítulo 3; nada neste capítulo depende dessa leitura mais profunda.

Classificação. O sinal da norma classifica vetores exatamente como classificava separações entre eventos:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} < 0 \text{ (temporal)}, \quad \vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \text{ (nulo)}, \quad \vec{A} \cdot \vec{A} > 0 \text{ (espacial)}.$$

Como o produto escalar é invariante, essa classificação não depende do observador: o que é temporal para um é temporal para todos, e o mesmo vale para espacial e para nulo.

Dois vetores são ditos *ortogonais* quando $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. Convém tomar cuidado com a palavra, porque aqui ela não quer dizer “perpendicular no papel”. Um vetor nulo, por exemplo, é ortogonal a si mesmo — algo impossível no espaço euclidiano, onde o único vetor ortogonal a si próprio é o vetor zero.

A Figura 2.1 dá a leitura geométrica que torna isso menos estranho. Dentro de um plano t - x , dois vetores são ortogonais em Minkowski quando um é o *reflexo* do outro na linha de luz — equivalentemente, quando fazem ângulos iguais com ela, em lados opostos. Um vetor nulo está *sobre* essa linha, e portanto é o seu

próprio reflexo: daí ser ortogonal a si mesmo, sem nenhuma mágica. (A restrição ao plano importa: em quatro dimensões há pares ortogonais que nada têm de reflexos um do outro, como $(0, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$, cujo produto escalar é zero pelo motivo euclidiano de sempre.)

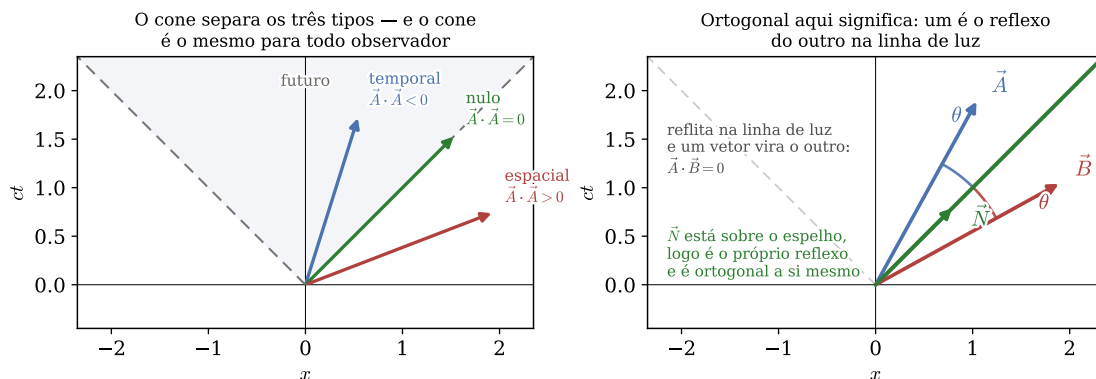


Figura 2.1. À esquerda, a classificação: o cone de luz separa vetores temporais, nulos e espaciais, e é o mesmo para todo observador — por isso a classificação é invariante. À direita, a ortogonalidade lida como reflexão: $\vec{A}$ e $\vec{B}$ fazem ângulos iguais com a linha de luz e satisfazem $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, enquanto o vetor nulo $\vec{N}$, deitado sobre ela, é o próprio reflexo.

Vale ligar isso ao capítulo anterior: os eixos ct' e x' de um observador, construídos na Seção 1.6, são exatamente um par desses — fecham-se sobre a linha de luz pelo mesmo ângulo, em sentidos opostos. Aquela “tesoura” era, o tempo todo, a afirmação de que os dois eixos de um mesmo observador são ortogonais entre si.

Atividade 2.1. Sejam $\vec{A}$ e $\vec{B}$ os vetores de componentes $(2, 1, 0, 0)$ e $(1, 1, 0, 0)$ em algum referencial. Classifique cada um, calcule $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e verifique que $\vec{B}$ é ortogonal a si mesmo. Em seguida aplique um boost de $v = 0,5$ às componentes dos dois e confirme, com números, que os três produtos escalares não mudaram.

2.3 Quadrivelocidade

A linha de mundo de uma partícula é parametrizada por $x^\mu(\tau)$, e o tempo próprio é o escalar de que a Seção 2.1 precisava: ele é o mesmo para todos os observadores. Dividir o deslocamento por ele produz, portanto, um quadrivetor legítimo — a *quadrivelocidade*

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Suas componentes num referencial inercial saem de $d\tau = dt/\gamma$, isto é, $d/d\tau = \gamma d/dt$:

$$U^\mu = \gamma \frac{d}{dt}(t, \mathbf{x}) = \gamma(1, \mathbf{v}).$$

Note o contraste com o aviso da Seção 2.1: a velocidade ordinária v não era parte de vetor nenhum, e o único acréscimo que a torna vetorial é o fator γ — que é exatamente o preço de trocar dt por $d\tau$.

Sua norma é fixa, e o jeito mais curto de ver isso é escolher bem o referencial — que é justamente o que a Seção 2.2 recomendou fazer. *No referencial da própria partícula*, ela está parada: $v = 0$, $\gamma = 1$, e a quadrivelocidade tem componentes

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

Ou seja: quem viaja com a partícula a vê avançar apenas no *tempo*, à taxa de um segundo de tempo próprio por segundo de tempo próprio — o que é uma tautologia, e é essa tautologia que faz a conta desaparecer. A norma sai por inspeção, sem nenhum γ :

$$U^\mu U_\mu = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1.$$

E aqui entra o argumento que dispensa refazer o cálculo em qualquer outro lugar: **o produto escalar é invariante**. Se $U^\mu U_\mu$ vale -1 no referencial de repouso da partícula, vale -1 para todo observador inercial, por mais depressa que a partícula passe por ele.

CONFERINDO EM OUTRO REFERENCIAL

Refazer a conta num referencial $\mathcal{O}$ onde a partícula se move com velocidade v ao longo de x vale menos pelo resultado — que não pode mudar — do que pelo caminho, porque é o primeiro exercício de aplicar uma transformação de Lorentz a um vetor que não é o vetor posição. E é onde se erra o sinal. Parta das componentes no referencial de repouso, $U^{\nu'} = (1, 0, 0, 0)$, e transforme para $\mathcal{O}$. A matriz de que se precisa é a que vai de $\mathcal{O}'$ para $\mathcal{O}$ — e não a da equação (1.9), que faz o caminho contrário. Como a inversa de um *boost* é o mesmo *boost* com o sinal da velocidade trocado,

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^\mu = \Lambda^\mu_{\nu'} U^{\nu'} = (\gamma, \gamma v, 0, 0),$$

que é o $\gamma(1, v)$ de antes. Usar por engano a matriz (1.9), com $-v$, devolve $(\gamma, -\gamma v, 0, 0)$: a norma *continua* dando -1 , porque o sinal da parte espacial some no quadrado, e o engano passa despercebido — só que a partícula fica viajando para o lado errado.

Repare em como a conta se resolveu. Como $U^{\nu'}$ só tem componente temporal, a soma sobre ν' na convenção (1.10) tem um único termo sobrevivente, e o que resta de Λ é apenas sua *primeira coluna*: $U^\mu = \Lambda^\mu_{0'}$. Essa coluna

é a inclinação do eixo t' desenhada no diagrama de espaçotempo do Capítulo 1 — e tinha de ser: no seu próprio referencial a partícula não sai do lugar, avança só no tempo, então sua quadrivelocidade aponta ao longo de t' e nada mais. Toda a estrutura de U^μ vista de $\mathcal{O}$ é a inclinação daquele eixo.

Fechando com a verificação direta:

$$U^\mu U_\mu = -\gamma^2 + \gamma^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\gamma^2(1 - v^2) = -1,$$

usando $\gamma^2 = 1/(1 - v^2)$. Mas note que essa conta *confirma*, não demonstra: a demonstração já estava feita no referencial de repouso, e é o produto escalar ser invariante que a transporta para os demais. É a primeira vez no curso em que se paga para ver a economia prometida pela Seção 2.2, e não será a última.

Isso mostra que a quadrivelocidade não é uma velocidade comum em quatro dimensões — seu “tamanho” é sempre o mesmo, -1 — mas o vetor tangente normalizado à linha de mundo, parametrizada pelo tempo próprio.

Uma consequência imediata aparece ao derivar essa identidade em relação a τ . Como $U^\mu U_\mu$ é constante,

$$\frac{d}{d\tau} (U^\mu U_\mu) = 2U^\mu \frac{dU_\mu}{d\tau} = 2U^\mu A_\mu = 0,$$

onde $A^\mu = dU^\mu/d\tau$ é a quadriaceleração. Logo $A^\mu U_\mu = 0$ sempre: a quadriaceleração é ortogonal (no sentido de Minkowski) à quadrivelocidade. No referencial instantaneamente comóvel à partícula, $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, e a ortogonalidade força $A^0 = 0$: naquele referencial a aceleração é puramente espacial, exatamente como se espera de uma força comum.

Aceleração própria constante

Vale gastar meia página no único movimento acelerado que se resolve exatamente, porque ele responde a uma pergunta que todo estudante faz — “e se eu simplesmente continuar acelerando?” — e porque a resposta reaparece, anos depois, no estudo de horizontes.

Um foguete cujo motor mantém aceleração constante *medida a bordo* tem, por definição, $A^\mu A_\mu = a_0^2$ com a_0 fixo (o número que um acelerômetro preso à parede registra). Restringindo-se a 1 + 1 dimensões, duas condições valem simultaneamente:

$$U^\mu U_\mu = -1 \quad \text{e} \quad A^\mu A_\mu = a_0^2.$$

A primeira diz que $U^\mu = (\cosh \varphi, \sinh \varphi)$ para alguma função $\varphi(\tau)$ — essa é a

parametrização geral de um vetor de norma -1 , exatamente como $(\cos \theta, \sin \theta)$ é a de um vetor unitário euclidiano. É a rapidez do Exemplo 1.6 reaparecendo, agora como coordenada natural ao longo da linha de mundo.

Derivando, $A^\mu = \dot{\varphi} (\sinh \varphi, \cosh \varphi)$, cuja norma é $A^\mu A_\mu = \dot{\varphi}^2 (-\sinh^2 \varphi + \cosh^2 \varphi) = \dot{\varphi}^2$. A segunda condição dá então $\dot{\varphi} = a_0$, isto é

$$\varphi = a_0 \tau$$

a menos da origem de τ . A rapidez cresce linearmente com o tempo próprio — e essa é a formulação correta de “acelerar sempre igual”. A velocidade $v = \tanh(a_0 \tau)$ cresce, mas satura em 1: nenhuma quantidade de combustível a ultrapassa, e nada foi imposto para impedir isso além da geometria.

Da quadrivelocidade à linha de mundo. Falta integrar U^μ mais uma vez. A integração é componente a componente, e o único ponto que pede atenção é a escolha das constantes. Com $\varphi = a_0 \tau$, as componentes de $U^\mu = dx^\mu / d\tau$ são

$$\frac{dt}{d\tau} = \cosh(a_0 \tau), \quad \frac{dx}{d\tau} = \sinh(a_0 \tau),$$

duas quadraturas elementares — e é a derivada interna a_0 que produz o fator $1/a_0$ em cada primitiva:

$$t(\tau) = \frac{1}{a_0} \sinh(a_0 \tau) + C_1, \quad x(\tau) = \frac{1}{a_0} \cosh(a_0 \tau) + C_2.$$

A condição inicial $x^\mu(0) = (0, 1/a_0)$ fixa as duas de uma vez. Em $\tau = 0$ vale $\sinh 0 = 0$, e a primeira equação deixa $C_1 = 0$; vale também $\cosh 0 = 1$, de modo que o primeiro termo de x já entrega $1/a_0$ sozinho, e sobra $C_2 = 0$. Aí está o truque de bastidor: a posição inicial $1/a_0$ não foi escolhida por acaso — ela é exatamente o valor que anula C_2 e deixa as duas expressões limpas. Qualquer outra escolha apenas desloca a hipérbole ao longo de x , e é disso que trata (2.6) logo adiante.

Ficamos, portanto, com

$$t(\tau) = \frac{1}{a_0} \sinh(a_0 \tau), \quad x(\tau) = \frac{1}{a_0} \cosh(a_0 \tau),$$

e agora o tempo próprio se elimina sem esforço, porque as duas componentes são exatamente o par que a identidade hiperbólica combina:

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{a_0^2} \cosh^2(a_0 \tau) - \frac{1}{a_0^2} \sinh^2(a_0 \tau) = \frac{1}{a_0^2} \underbrace{[\cosh^2(a_0 \tau) - \sinh^2(a_0 \tau)]}_{=1},$$

isto é

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{a_0^2}. \quad (2.5)$$

O parâmetro desapareceu: (2.5) é a linha de mundo em forma implícita, uma curva que já não precisa de τ para ser desenhada. A trajetória é uma *hipérbole* — e não uma parábola, como seria em Newton. Mais que isso: é uma das hipérboles invariantes da Seção 1.6, agora com significado físico em vez de papel auxiliar de calibração.

A Figura 2.2 mostra o que (2.5) está dizendo, e vale percorrê-la devagar, porque cada elemento do desenho corresponde a uma linha da conta. O número $1/a_0$ é a *distância mínima ao vértice do cone de luz* — quanto maior a aceleração, mais perto do vértice a curva passa. Ali, em $\tau = 0$, a linha de mundo sobe *reta*: é a partícula em repouso, com $U^\mu = (1, 0)$ apontando só no tempo. Dali em diante ela se inclina, e a inclinação é a velocidade: a tangente vai se deitando na direção da reta da luz sem jamais alcançá-la, que é a versão geométrica de $v = \tanh(a_0\tau)$ saturar em 1. E os pontos marcados sobre a curva estão igualmente espaçados em tempo *próprio*: o modo como eles se espalham à medida que sobem é a dilatação temporal aparecendo sozinha no desenho, sem que se precise falar dela — cada segundo de bordo custa cada vez mais tempo coordenado.

Convém fixar agora duas leituras da mesma curva, porque trocar uma pela outra é o erro mais comum daqui em diante. A equação (2.5) põe a hipérbole na posição em que ela é mais simples — centrada na origem, com o foguete partindo de $x(0) = 1/a_0$. Já a *distância percorrida*, que é o que se mede numa viagem, conta-se a partir do ponto de partida:

$$\Delta x(\tau) \equiv x(\tau) - x(0) = \frac{1}{a_0} [\cosh(a_0\tau) - 1], \quad (2.6)$$

que parte de zero e cresce. As duas descrevem o mesmo movimento e diferem só por onde se põe a origem espacial: (2.5) é a forma geométrica, boa para falar de assíntotas e horizonte, e (2.6) é a forma de quem faz contas de viagem, que é a usada nos Problemas orientados, na Figura 2.8 e nos programas.

ONDE SE ERRA

A hipérbole (2.5) tem as retas $x = \pm t$ como assíntotas, e delas sai uma consequência que não tem análogo newtoniano. Dispare um sinal de luz de trás do foguete — do ponto x_0 , no instante t_0 , rumo a $+x$. Sua linha de mundo é

$$x = t + (x_0 - t_0),$$

uma reta *paralela* à assíntota $x = t$, afastada dela exatamente por $x_0 - t_0$. Se $x_0 - t_0 > 0$ ela corre acima da assíntota e acaba cruzando a hipérbole; se

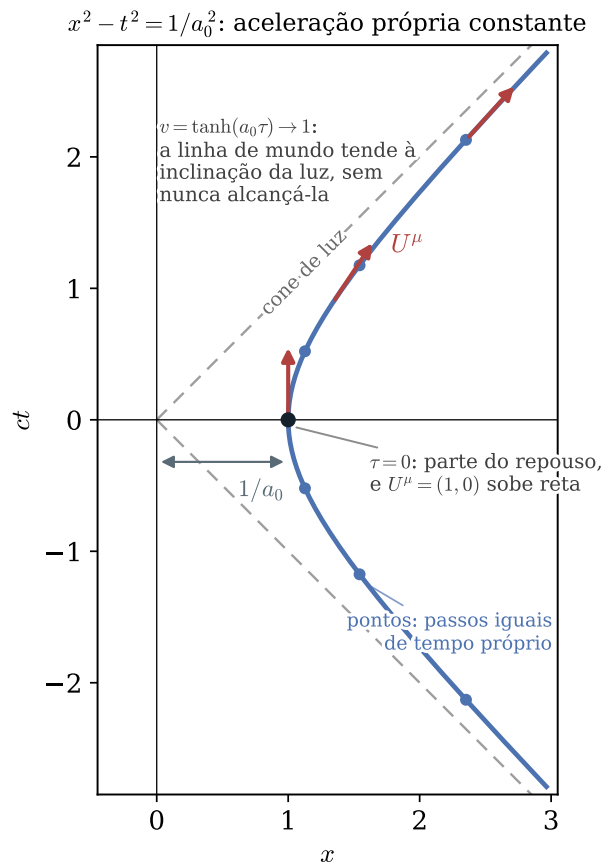


Figura 2.2. A linha de mundo (2.5) de um observador com aceleração própria constante. O vértice, à distância $1/a_0$ da origem, é o instante de repouso: ali $U^\mu = (1, 0)$ e a linha de mundo sobe reta. As setas são a quadri-velocidade em três instantes — ela se deita progressivamente em direção ao cone de luz, sem nunca alcançá-lo, que é $v = \tanh(a_0 \tau)$ saturando em 1. Os pontos são passos iguais de tempo próprio: espalham-se em t porque cada segundo de bordo custa cada vez mais tempo coordenado.

$x_0 - t_0 \leq 0$, nunca cruza, por mais que persiga — luz correndo paralela à assíntota jamais a atravessa.

O critério é, portanto, desconfortavelmente simples: *o sinal alcança o foguete se e somente se $x_0 > t_0$* . Disparado de $x = 0$, ele só chega se partir *antes* de $t = 0$; disparado exatamente da origem, em $t_0 = 0$, viaja sobre a própria assíntota e fica eternamente atrás. Esse é o caso crítico, e ele mostra onde está a fronteira: tudo o que está à esquerda da reta nula $x = t$ é uma região do espaço-tempo da qual nenhuma notícia chega a quem acelera para sempre — um *horizonte*, produzido só por aceleração, sem gravidade nenhuma. É o horizonte de Rindler, e é o modelo mais simples do que acontecerá na superfície de um buraco negro. O *Conteúdo extra* do Capítulo 1 refaz essa conta em números.

INTERLÚDIO • OS VETORES DA BASE

A seta que estava faltando. Até aqui escrevemos coisas como $U^\mu = \gamma(1, v)$, e não há erro nisso: o índice à mostra avisa que o lado esquerdo já são *componentes*, e componentes podem ser igualadas a componentes. O problema aparece quando se quer dizer a mesma coisa a respeito do *vetor*, sem índice. Escrever $\vec{U} = (\gamma, \gamma v)$ seria falso: à esquerda está um objeto que não depende de referencial nenhum, à direita quatro números que só existem depois de escolhidos os eixos. O Schutz separa as duas coisas com um símbolo próprio,

$$\vec{A} \xrightarrow{\mathcal{O}} (A^0, A^1, A^2, A^3),$$

que se lê “ $\vec{A}$ tem componentes (A^0, A^1, A^2, A^3) no referencial $\mathcal{O}$ ”. A letra embaixo da seta diz *quem* está medindo. O vetor $\vec{A}$ é o objeto geométrico — a flecha entre dois eventos, a tangente à linha de mundo — e existe antes de qualquer referencial; a quádrupla é o que sobra dele depois que alguém escolhe eixos. Usar $\xrightarrow{\mathcal{O}}$ entre os dois esconde exatamente a distinção que o capítulo inteiro está tentando construir.

Daqui em diante a seta aparece sempre que a distinção importar. Assim, para o mesmo vetor visto de dois referenciais,

$$\vec{A} \xrightarrow{\mathcal{O}} (A^0, A^1, A^2, A^3), \quad \vec{A} \xrightarrow{\mathcal{O}'} (A^{0'}, A^{1'}, A^{2'}, A^{3'}),$$

e note que do lado esquerdo *nada mudou*: é o mesmo $\vec{A}$ nas duas linhas.

Onde vai a marca do referencial. O Schutz marca o segundo referencial com uma barra sobre o índice — $A^{\bar{\alpha}}, \vec{e}_{\bar{\alpha}}$ —; esta apostila usa uma linha, $A^{\alpha'}$, e as duas convenções são a mesma coisa. O que não é indiferente é *onde* a marca vai. Ela pertence ao índice, não ao símbolo: escrever $\vec{A}'$ sugeriria um segundo vetor, e é precisamente isso que não acontece. Por isso, daqui em diante, a linha migra do símbolo para o índice: a transformação de Lorentz (1.10), que a Seção 1.9 escreveu como $x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$, passa a ser

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta}.$$

É a mesma equação, com a marca no lugar certo — e é assim que a Seção 2.3 já a usou, ao transformar $U^{\nu'}$. Um índice com linha e um sem linha nunca podem ser trocados um pelo outro, mesmo sendo mudos: $\{A^{\alpha'}\}$ e $\{A^{\alpha}\}$ são conjuntos diferentes de números, assim como $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ é um conjunto de vetores diferente de $\{\vec{e}_{\alpha}\}$.

Os quatro vetores da base. Em qualquer referencial $\mathcal{O}$ existem quatro

vetores privilegiados, definidos pelas suas componentes *nesse* referencial:

$$\begin{aligned}\vec{e}_0 &\xrightarrow{\mathcal{O}} (1, 0, 0, 0), \\ \vec{e}_1 &\xrightarrow{\mathcal{O}} (0, 1, 0, 0), \\ \vec{e}_2 &\xrightarrow{\mathcal{O}} (0, 0, 1, 0), \\ \vec{e}_3 &\xrightarrow{\mathcal{O}} (0, 0, 0, 1).\end{aligned}\tag{2.7}$$

São os *vetores da base* de $\mathcal{O}$. A mesma receita em $\mathcal{O}'$ produz outros quatro, $\vec{e}_{0'} \xrightarrow{\mathcal{O}'} (1, 0, 0, 0)$ e assim por diante — e em geral $\vec{e}_{0'} \neq \vec{e}_0$, porque foram definidos em referenciais diferentes. A definição (2.7) se resume a uma linha:

$$(\vec{e}_\alpha)^\beta = \delta_\alpha^\beta,\tag{2.8}$$

isto é, a componente β do vetor $\vec{e}_\alpha$ é o delta de Kronecker, que vale 1 se $\beta = \alpha$ e 0 caso contrário.

Com eles, a quádrupla de números vira de novo um vetor: dado um $\vec{A}$ de componentes (A^0, A^1, A^2, A^3) em $\mathcal{O}$, tem-se

$$\vec{A} = A^0 \vec{e}_0 + A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3 = A^\alpha \vec{e}_\alpha.\tag{2.9}$$

A segunda forma usa a convenção de soma, e é por isso que o índice de $\vec{e}$ se escreve *embaixo*: só assim ele se opõe ao índice de cima de A^α e a soma fica implícita. Vale reparar no que (2.9) arrumou. Um quadrvetor deixou de ser “uma lista de quatro números que se transforma direito” e passou a ser uma *soma*: a componente A^α é quanto se toma do vetor $\vec{e}_\alpha$, e nada mais. Componente e vetor da base são as duas metades de uma mesma frase, e é a segunda metade que estava implícita desde a Seção 2.1.

Como a base muda de referencial. O raciocínio de (2.9) vale em qualquer referencial, então também $\vec{A} = A^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$. As duas somas têm parcelas diferentes, mas o total é o mesmo vetor:

$$A^\alpha \vec{e}_\alpha = A^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}.\tag{2.10}$$

Isso basta para descobrir como a base se transforma. Use $A^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_\beta A^\beta$ no lado direito de (2.10) e junte os fatores de outro modo — são todos números, a ordem não importa:

$$A^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_\beta A^\beta \vec{e}_{\alpha'} = A^\beta (\Lambda^{\alpha'}_\beta \vec{e}_{\alpha'}).$$

Comparando com o lado esquerdo de (2.10), reescrito com o índice mudo

chamado β , sobra $A^\beta (\Lambda^{\alpha'}_\beta \vec{e}_{\alpha'} - \vec{e}_\beta) = 0$. E como $\vec{A}$ é arbitrário, o parêntese tem de se anular para cada β :

$$\vec{e}_\beta = \Lambda^{\alpha'}_\beta \vec{e}_{\alpha'}. \quad (2.11)$$

Vale parar um instante em (2.11), porque ela *não* é uma transformação de componentes, e o contraste com a lei que já conhecíamos é o ponto:

$$\underbrace{A^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_\beta A^\beta}_{\text{componentes: de } \mathcal{O} \text{ para } \mathcal{O}'} \quad \underbrace{\vec{e}_\beta = \Lambda^{\alpha'}_\beta \vec{e}_{\alpha'}}_{\text{base: de } \mathcal{O}' \text{ para } \mathcal{O}}$$

A mesma matriz Λ aparece nas duas, mas levando em sentidos opostos: as componentes vão da base sem linha para a com linha, a base faz o caminho inverso. E tem de ser assim — é exatamente esse cancelamento que mantém a soma $A^\alpha \vec{e}_\alpha$ igual a si mesma, isto é, que faz de $\vec{A}$ um objeto independente de quem o descreve. É daí que vêm os dois nomes: as componentes, de índice em cima, transformam-se *contravariantemente* — ao contrário da base —, enquanto os objetos de índice embaixo, a começar pelos próprios $\vec{e}_\alpha$, transformam-se *covariantemente*, isto é, junto com ela. O Capítulo 3 volta a essa distinção quando ela deixar de ser questão de nomenclatura e passar a separar dois tipos de objeto.

Um exemplo, e é o de sempre. Para um *boost* de velocidade v ao longo de x , a matriz $\Lambda^{\alpha'}_\beta$ é a de (1.9), e (2.11) dá a base de $\mathcal{O}$ escrita na de $\mathcal{O}'$:

$$\vec{e}_0 = \gamma \vec{e}_{0'} - \gamma v \vec{e}_{1'}, \quad \vec{e}_1 = -\gamma v \vec{e}_{0'} + \gamma \vec{e}_{1'}, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_{2'}, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_{3'}.$$

Mais útil para desenhar é a leitura inversa, com $v \rightarrow -v$: as componentes da base de $\mathcal{O}'$ medidas em $\mathcal{O}$ são

$$\vec{e}_{0'} \xrightarrow{\mathcal{O}} \gamma(1, v, 0, 0), \quad \vec{e}_{1'} \xrightarrow{\mathcal{O}} \gamma(v, 1, 0, 0). \quad (2.12)$$

Esses números não são novidade nenhuma: são as duas primeiras colunas da matriz do *boost* inverso, a mesma que a Seção 2.3 usou para transformar U^μ . O que é novo é a leitura. $\gamma(1, v, 0, 0)$ é a inclinação do eixo t' e $\gamma(v, 1, 0, 0)$ é a do eixo x' : os vetores da base de $\mathcal{O}'$ apontam ao longo dos eixos de $\mathcal{O}'$, e a “tesoura” da Seção 1.6 era, o tempo todo, o desenho de (2.12).

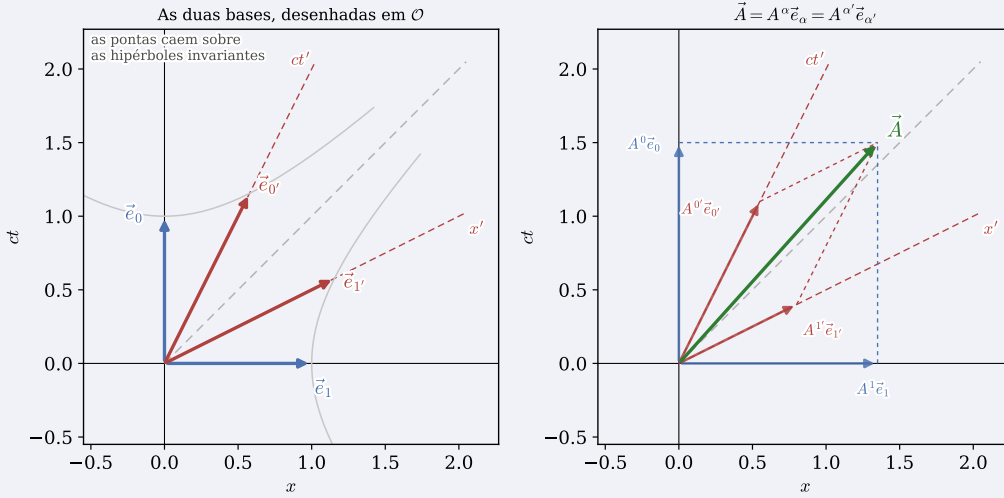


Figura 2.3. As duas bases e o mesmo vetor, tudo desenhado no papel de $\mathcal{O}$, com $v = 0,5$. À esquerda, $\vec{e}_0$ e $\vec{e}_1$ apontam ao longo dos eixos t' e x' e têm as pontas *sobre* as hipérboles invariantes — parecem mais longos que $\vec{e}_0$ e $\vec{e}_1$ numa folha euclidiana, mas são igualmente unitários em Minkowski. À direita, a regra do paralelogramo nas duas bases devolve o mesmo $\vec{A}$, que é todo o conteúdo de $\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha = A^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$. Numericamente, para o $\vec{A}$ de componentes $(1,5; 1,35; 0; 0)$ em $\mathcal{O}$, isso dá $A^0 = 0,953$ e $A^1 = 0,693$.

Releitura: a quadrivelocidade é um vetor da base. Compare (2.12) com a quadrivelocidade da Seção 2.3, $\vec{U} \xrightarrow{\mathcal{O}} \gamma(1, v)$. São o mesmo objeto:

$$\vec{U} = \vec{e}_{0'}, \quad \text{com } \mathcal{O}' \text{ o referencial de repouso da partícula.} \quad (2.13)$$

A quadrivelocidade de uma partícula é o vetor *temporal* da base do referencial que viaja com ela — e é só isso. As duas afirmações que custaram meia página lá atrás tornam-se leituras diretas de (2.13): que $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ no referencial próprio é a definição (2.7) de $\vec{e}_{0'}$, e que $\vec{U} \cdot \vec{U} = -1$ é a norma de um vetor de base, que o próximo parágrafo calcula de uma vez para todos.

Base e métrica: o fecho. Agora o produto escalar. Escreva os dois vetores na base e use que ele é bilinear:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A^\alpha \vec{e}_\alpha) \cdot (B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta). \quad (2.14)$$

O que (2.14) está dizendo é que o produto escalar de dois vetores *quaisquer* está inteiramente determinado por dezesseis números: os produtos escalares dos vetores da base entre si. Esses dezesseis já podem ser calculados, porque as componentes da base são conhecidas — (2.7) — e a regra do pro-

duto é (2.2):

$$\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = -1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = +1, \quad \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

que é uma *tétrade ortonormal*: quatro vetores mutuamente ortogonais e de norma unitária — entendido que “unitário” para um vetor temporal quer dizer norma -1 . As três linhas cabem em uma:

$$\boxed{\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}} \quad (2.15)$$

E aqui o interlúdio se paga. A métrica de Minkowski entrou na Seção 2.2 como “apenas a tabela de sinais escrita como matriz” — correto, mas insatisfatório: uma tabela de sinais vinda de onde? A resposta é (2.15). *A métrica é a tabela dos produtos escalares dos vetores da base*. Ela não foi imposta de fora; ela é o que sobra quando se pergunta como os quatro eixos de um observador se relacionam entre si. Substituída em (2.14), devolve $\vec{A} \cdot \vec{B} = \eta_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$, que era a definição (2.2) — só que agora deduzida, e não postulada.

Duas consequências que se colhem de graça. A primeira dá sentido geométrico à abreviação (2.4): projetando $\vec{A}$ sobre um vetor da base,

$$\vec{A} \cdot \vec{e}_\alpha = A^\beta \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\alpha = A^\beta \eta_{\beta\alpha} = A_\alpha,$$

isto é, *a componente de índice baixo é a projeção do vetor sobre o eixo correspondente*. Baixar um índice deixa de ser uma manobra de sinais e passa a ser uma operação com desenho. (Numa base ortonormal, A_α e A^α diferem só pelo sinal da componente temporal, e a distinção parece supérflua. Ela deixa de parecer na Seção 3.8, com uma base oblíqua, e é o que o Capítulo 3 vai precisar.)

A segunda é a ponte para a Seção 2.6. Junte (2.13) com a projeção que acabamos de obter: para um observador de quadrivelocidade $\vec{U} = \vec{e}_{0'}$,

$$-\vec{p} \cdot \vec{U} = -\vec{p} \cdot \vec{e}_{0'} = -p_{0'} = p^{0'},$$

que é a componente temporal do quadrimomento *na base desse observador*. A fórmula $E = -\vec{p} \cdot \vec{U}$ das convenções (p. ii) não é, portanto, uma definição nova de energia: é a componente temporal de sempre, escrita sem mencionar componentes. É o primeiro exemplo de uma manobra que o curso repete até o fim — *trocar “a componente 0 no referencial de fulano” por “o produto escalar com a quadrivelocidade de fulano”* —, e é o que permite que a Seção 2.6 escreva resultados válidos também em espaço curvo.

O que muda em espaço curvo (e o que não muda). Nada em (2.9),

(2.14) ou (2.15) usou que o espaço-tempo é plano. Em espaço curvo a definição da métrica é a *mesma*, $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$; o que se perde é o direito de dizer que essa tabela vale $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ em toda parte, com os mesmos números em todo ponto. É essa perda, e só ela, que o Capítulo 6 chama de curvatura.

Atividade 2.2. Com $v = 0,5$, tome $\vec{e}_{0'}$ e $\vec{e}_{1'}$ nas componentes (2.12) e verifique que $\vec{e}_{0'} \cdot \vec{e}_{0'} = -1$, $\vec{e}_{1'} \cdot \vec{e}_{1'} = +1$ e $\vec{e}_{0'} \cdot \vec{e}_{1'} = 0$ — dois vetores que a Figura 2.3 desenha em ângulo bem agudo. Em seguida, para o $\vec{A}$ de componentes $(1,5; 1,35; 0; 0)$ em $\mathcal{O}$, obtenha $A^{0'}$ e $A^{1'}$ e confirme, somando $A^{0'}\vec{e}_{0'} + A^{1'}\vec{e}_{1'}$ em componentes de $\mathcal{O}$, que se recupera $\vec{A}$.

2.4 Quadrimomento

A definição não tem índices. A massa de repouso m — a massa que se mede no referencial em que a partícula está parada — é um *escalar*: um único número, o mesmo para todos os observadores, por construção. E multiplicar um vetor por um escalar devolve outro vetor. É só disso que a definição do *quadrimomento* precisa:

$$\vec{p} = m \vec{U} \quad (2.16)$$

Repare no que (2.16) *não* tem: nenhum índice, nenhum referencial, nenhuma componente. Ela é uma afirmação sobre dois objetos geométricos — a flecha $\vec{U}$ tangente à linha de mundo, e a flecha $\vec{p}$, que aponta na mesma direção e é m vezes mais comprida. Tudo o que vem a seguir nesta seção é a leitura de (2.16) em algum referencial; a equação em si já está pronta, e já vale em todos eles.

As componentes, e o nome da primeira. Escolhido um observador $\mathcal{O}$, o vetor se expande na base dele, $\vec{p} = p^\alpha \vec{e}_\alpha$, e a quádrupla que sobra é

$$\vec{p} \xrightarrow{\mathcal{O}} (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, \mathbf{p}). \quad (2.17)$$

A componente temporal ganha nome próprio — *energia da partícula em $\mathcal{O}$* , $E \equiv p^0$ — e as três espaciais formam o trimomento $\mathbf{p}$. Por ora são apenas nomes; o que os justifica é o limite de v pequeno, calculado no fim desta seção. E a seta de (2.17) está trabalhando: trocá-la por um sinal de igual diria que o vetor *é* aquela lista, quando a lista muda de observador para observador e o vetor não.

Os números saem sozinhos. Aqui o bloco de interlúdio sobre vetores da base pode ser aplicado. Não é preciso transformar nada à mão: pela releitura (2.13), a quadri-velocidade é o vetor temporal da base do referencial próprio $\mathcal{O}'$

da partícula,¹ e portanto

$$\vec{p} = m \vec{e}_{0'}. \quad (2.18)$$

O quadrimomento é o vetor temporal da base de quem viaja com a partícula, esticado por m , e nada mais. Suas componentes em $\mathcal{O}$ já estão calculadas: são as de $\vec{e}_{0'}$, dadas por (2.12). Para um *boost* de velocidade v ao longo de x ,

$$p^\alpha = m (\vec{e}_{0'})^\alpha = m \Lambda^\alpha_{0'} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} \xrightarrow{\mathcal{O}} \gamma m (1, v, 0, 0), \quad (2.19)$$

e, para uma direção qualquer de v ,

$$\vec{p} \xrightarrow{\mathcal{O}} \gamma m (1, v), \quad \text{isto é} \quad E = \gamma m, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}. \quad (2.20)$$

Nenhuma conta nova apareceu. $\Lambda^\alpha_{0'}$ é a primeira coluna da matriz do *boost* inverso — a mesma que a Seção 2.3 já havia encontrado ao transformar U^μ , e a mesma que o diagrama de Minkowski desenha como inclinação do eixo t' . O que mudou foi a leitura: *a energia e o momento que $\mathcal{O}$ mede são a coluna temporal da transformação que leva de $\mathcal{O}$ ao referencial da partícula*. Dizer que uma partícula é energética, para $\mathcal{O}$, é dizer que o eixo do tempo dela está muito inclinado em relação ao dele.

ONDE SE ERRA

Um cuidado com (2.20): o fator γ pertence à *componente*, não à massa. É tentador ler $E = \gamma m$ como “a massa aumentou para γm ” — a chamada massa relativística, que sobrevive em textos de divulgação —, mas isso confunde as duas metades de (2.17). Em $\vec{p} = m \vec{U}$, m é o escalar, fixo; quem depende do referencial é a expansão de $\vec{U}$ na base de quem mede. Neste curso m é sempre a massa de repouso, e é um invariante.

A norma, e a massa de volta. O produto de (2.16) consigo mesma custa uma linha, porque a norma $\vec{U} \cdot \vec{U} = -1$ já veio da Seção 2.3:

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 (\vec{U} \cdot \vec{U}) = -m^2. \quad (2.21)$$

Em componentes de $\mathcal{O}$, com (2.17) e a regra (2.2), isso é $-E^2 + \mathbf{p}^2 = -m^2$, ou seja

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (2.22)$$

a *relação de dispersão*. As duas equações dizem a mesma coisa; a diferença é que (2.21) a diz sem escolher observador e (2.22) a diz depois de escolher um. Esse par — afirmação geométrica de um lado, leitura em componentes do outro — é a forma que os resultados vão tomar daqui até o fim do curso, e a Seção 2.6 faz a

¹No caso de a partícula estar acelerada, o referencial próprio é chamado de **referencial instantaneamente comóvel**.

mesma ponte para a energia.

O que $E = \gamma m$ esconde quando v é pequeno. Vale abrir a expressão em potências de v antes de seguir, porque é aí que aparece a afirmação mais famosa da relatividade:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^4 + \dots \quad (2.23)$$

O segundo termo é a energia cinética de Newton — que não foi postulada em lugar nenhum, saiu sozinha de $E = \gamma m$; e, com ela, fica justificado o nome *energia* dado à componente p^0 , assim como $\mathbf{p} \simeq m\mathbf{v}$ justifica o nome *momento* dado às outras três. Quem chama a atenção é o primeiro termo: uma partícula *parada* tem energia $E = m$. Essa *energia de repouso* é invisível para a mecânica newtoniana, que só mede diferenças de energia, e é o que se lê, com as constantes restauradas, como $E = mc^2$. Daí a energia cinética relativística ser definida por

$$T \equiv E - m = (\gamma - 1)m,$$

e não por algum remendo da fórmula newtoniana: é o que sobra da energia quando se desconta o que a partícula tem por simplesmente existir.

E os fótons? Pondo $m = 0$ em (2.21) e (2.22), o quadrimomento fica *nulo*, $\vec{p} \cdot \vec{p} = 0$, com $E = |\mathbf{p}|$. Mas note que a definição (2.16) não é o caminho até lá: um fóton não tem referencial de repouso, seu tempo próprio não corre, não há $\vec{e}_{0'}$ para ele — $\vec{U}$ simplesmente não existe. Para partículas sem massa o quadrimomento é o objeto primário, definido diretamente como o vetor nulo tangente ao raio de luz, e $m = 0$ é consequência da norma, não hipótese. A Seção 2.8 volta a isso.

Atividade 2.3. Uma partícula de massa m move-se com $v = 0,5$ ao longo de x em $\mathcal{O}$. Escreva o mesmo $\vec{p}$ nas duas bases — $\vec{p} = p^\alpha \vec{e}_\alpha$ em $\mathcal{O}$ e $\vec{p} = p^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$ no referencial de repouso —, usando (2.12) para as componentes de $\vec{e}_{0'}$ e $\vec{e}_{1'}$ em $\mathcal{O}$. Confirme que a segunda soma tem uma única parcela, $m\vec{e}_{0'}$, e que ela reproduz a primeira. Em seguida verifique (2.21) nas duas leituras, e note que a segunda dispensa qualquer γ .

2.5 Conservação

A lei, e o que ela soma. Numa interação — uma colisão, um decaimento, uma captura —, some os quadrimomentos de todas as partículas envolvidas. O resultado é um único vetor,

$$\vec{P} \equiv \sum_a \vec{p}_a, \quad (2.24)$$

e a lei de conservação afirma que ele é o mesmo antes e depois:

$$\boxed{\vec{P}_{\text{antes}} = \vec{P}_{\text{depois}}} \quad (2.25)$$

De novo, nenhum índice e nenhum referencial — e, de novo, é isso que dá força ao enunciado. Mas vale reparar em uma hipótese que (2.24) usa sem dizer: somar $\vec{p}_a$ é somar *flechas ancoradas em eventos diferentes*, e isso só faz sentido porque o espaço-tempo é plano. Num espaço-tempo curvo não há como transportar um vetor de um ponto a outro sem que o resultado dependa do caminho, e a conservação sobrevive apenas na forma *local* $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, do Capítulo 4. Aqui, no plano, o transporte é trivial e a soma é livre.

Quatro leis pelo preço de uma. Escolha um observador $\mathcal{O}$ e escreva (2.25) na base dele, com (2.9). Os $\vec{e}_\alpha$ são os mesmos dos dois lados — o observador não troca de referencial no meio da colisão —, então a diferença entre antes e depois é

$$(P_{\text{antes}}^\alpha - P_{\text{depois}}^\alpha) \vec{e}_\alpha = \vec{0},$$

e como os quatro vetores da base são linearmente independentes, cada parêntese tem de se anular por conta própria:

$$P_{\text{antes}}^\alpha = P_{\text{depois}}^\alpha \quad \text{para cada } \alpha. \quad (2.26)$$

A componente $\alpha = 0$ é a conservação da energia; as três espaciais, a do momento. As duas leis que a mecânica newtoniana enunciava separadamente — com dimensões diferentes, deduzidas de argumentos diferentes — são as quatro componentes de uma só. É o mesmo movimento do Capítulo 1, que fez de espaço e tempo as componentes de um evento; aqui ele se repete com energia e momento.

Cada observador conserva a sua energia. A energia que um observador de quadrivelocidade $\vec{U}$ atribui ao sistema é $-\vec{P} \cdot \vec{U}$, pela convenção da p. ii. Se $\vec{U}$ é fixo — o observador não acelera durante o processo —, o produto escalar com (2.25) dá imediatamente

$$-\vec{P}_{\text{antes}} \cdot \vec{U} = -\vec{P}_{\text{depois}} \cdot \vec{U}.$$

Cada observador inercial mede a *sua* energia, e cada um a vê conservada. Os números são diferentes de observador para observador; o que todos partilham é o vetor. Repare que essa versão da conservação da energia não menciona componente nem base: é a manobra que o interlúdio anunciou, trocar “a componente 0 de fulano” por “o produto escalar com a quadrivelocidade de fulano”, e é ela que atravessa intacta para o espaço curvo.

É um postulado, não um teorema. Nada do que veio antes *demonstra* (2.25).

O que se sabe é que as componentes de $\vec{p}$ se reduzem, para v pequeno, à energia e ao momento de Newton, que são conservados — mas isso não basta para fixar a lei relativística, porque muitas leis diferentes têm o mesmo limite newtoniano. A escolha de conservar o quadrivetor inteiro é um postulado a mais, de mesmo estatuto que os dois postulados do Capítulo 1, e o que o sustenta é o experimento: nenhuma colisão jamais violou (2.25).

O que não se conserva: a soma das massas. Uma consequência que não existia em Newton. Some as massas de repouso das partículas antes e depois: $\sum_a m_a$ não é conservada — e não há por que ser, já que ela nem aparece em (2.25). O que se conserva, além do vetor, é a norma dele,

$$M_{\text{sist}}^2 = -\vec{P} \cdot \vec{P}, \quad (2.27)$$

a massa invariante do sistema, de que a Seção 2.6 volta a tratar. E $M_{\text{sist}} \neq \sum_a m_a$ sempre que houver movimento relativo, porque a norma de uma soma de vetores não é a soma das normas. A diferença é exatamente a energia cinética interna — e a possibilidade de convertê-la: massa de repouso pode diminuir, e o que sobra sai como energia cinética e, depois, como calor. É o que acontece todo dia numa usina nuclear e no interior do Sol. A afirmação newtoniana “a massa se conserva” não é uma lei; é o que (2.25) parece dizer quando todas as velocidades são pequenas e a conversão é pequena demais para se notar.

“Antes” e “depois” segundo quem? Há um ponto que (2.25) passou por cima, e vale enfrentá-lo, porque a mesma dificuldade reaparece toda vez que uma lei de conservação for escrita neste curso. Somar os quadrimomentos “num certo instante” exige escolher um instante — isto é, uma fatia de simultaneidade — e o Capítulo 1 mostrou que observadores diferentes fatiam o espaço-tempo de modos diferentes. Em linguagem de base: a fatia de um observador é o conjunto de eventos simultâneos para ele, e ela é o plano ortogonal ao seu $\vec{e}_0$. Bases diferentes, fatias diferentes.

Considere então duas colisões, A e B, separadas por um intervalo tipo-espaço, como na Figura 2.4. Para $\mathcal{O}$, A já aconteceu e B ainda não: ele soma os produtos de A com os reagentes de B. Para $\mathcal{O}'$, as duas já aconteceram: ele soma os produtos de A com os produtos de B. São conjuntos *diferentes* de partículas — e há até referenciais em que a ordem de A e B se inverte, porque nenhum sinal pode ligar dois eventos separados por intervalo tipo-espaço, e portanto a ordem entre eles não é um fato absoluto.

E, ainda assim, não há problema nenhum. A colisão em B conserva o quadri-momento por conta própria, isto é, $\vec{p}_5 + \vec{p}_6 = \vec{p}_7 + \vec{p}_8$; trocar um par pelo outro na soma não muda o total. Os dois observadores somam listas diferentes de partículas e chegam ao *mesmo* vetor $\vec{P}$ — com componentes diferentes, ligadas por $P^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} P^{\beta}$, mas o mesmo vetor. Qualquer observador pode escolher a sua fa-

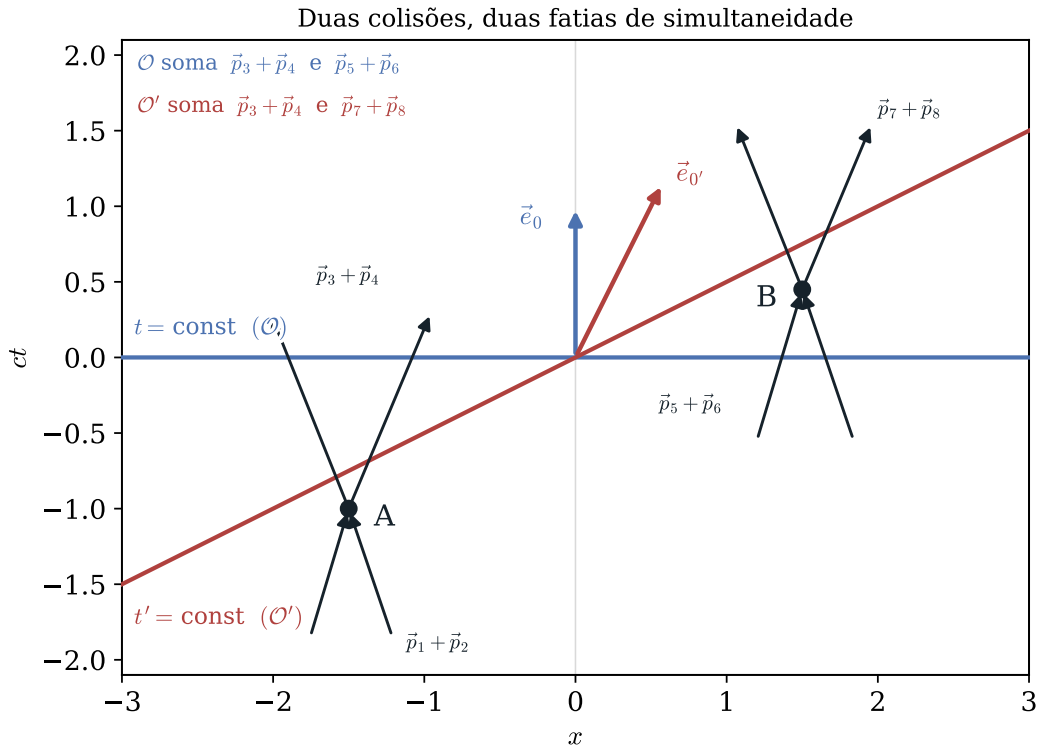


Figura 2.4. Duas colisões, A e B, separadas por intervalo tipo-espaço, e as fatias de simultaneidade de dois observadores — cada uma ortogonal ao $\vec{e}_0$ do seu. A fatia de O (azul) passa depois de A e antes de B, e cruza as linhas de mundo de $\vec{p}_3, \vec{p}_4$ e $\vec{p}_5, \vec{p}_6$; a de O' (vermelha) passa depois das duas, e cruza $\vec{p}_3, \vec{p}_4$ e $\vec{p}_7, \vec{p}_8$. Os dois somam listas diferentes de partículas e obtêm o mesmo vetor $\vec{P}$, porque a colisão em B, sozinha, garante $\vec{p}_5 + \vec{p}_6 = \vec{p}_7 + \vec{p}_8$.

tia, somar tudo o que a atravessa e obter o mesmo objeto geométrico. É isso que torna (2.25) uma afirmação sobre o espaço-tempo, e não sobre um referencial em particular.

Exemplo 2.1. Decaimento em duas partículas iguais. Uma partícula de massa M decai em duas de massa m . Trabalhe no referencial de repouso da inicial: lá, por (2.18), o quadrimomento inicial é o próprio vetor temporal da base, esticado por M , e a conservação (2.25) fica

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = M\vec{e}_0.$$

Essa única igualdade já resolve o problema, lida componente a componente. A parte espacial do lado direito é nula — é a definição (2.7) de $\vec{e}_0$ —, logo $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$: os produtos saem em sentidos opostos e com o mesmo módulo, sem que se precise invocar simetria. A parte temporal dá $E_1 + E_2 = M$; como as massas são iguais e os módulos dos momentos também, a relação de dispersão (2.22) força

$E_1 = E_2 = M/2$, e daí

$$|p| = \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2},$$

que só é um número real se $M \geq 2m$. O decaimento não acontece se a massa da partícula inicial não cobrir a das filhas, e o excedente $M - 2m$ é o que sai como energia cinética — massa virando movimento, no caso mais simples possível.

Atividade 2.4. Uma partícula de massa m e velocidade v atinge outra idêntica em repouso, e as duas emergem grudadas num único corpo. Use (2.25) para mostrar que a massa desse corpo é $M = m\sqrt{2(1 + \gamma)}$, e verifique que $M > 2m$ sempre que $v \neq 0$. Para onde foi a energia cinética que “desapareceu”? Confira o resultado calculando $\vec{P} \cdot \vec{P}$ dos dois lados.

2.6 Energia como componente temporal

No formalismo relativístico, energia não é uma quantidade isolada: ela é a componente temporal do quadrimomento. Isso ajuda a entender por que energia e momento se misturam sob transformações de Lorentz. Assim como tempo e espaço são partes de um mesmo objeto geométrico, energia e momento também são partes de um mesmo objeto. Uma colisão que parece envolver apenas energia em um referencial pode envolver energia e momento de modo inseparável em outro.

Componente temporal segundo quem? A frase pressupõe um referencial, e é fácil dar a ela uma forma que não pressupõe nenhum. Se o observador tem quadri-velocidade $\vec{U}$, a energia que *ele* mede para uma partícula de quadrimomento $\vec{p}$ é

$$E = -\vec{p} \cdot \vec{U} = -p_\mu U^\mu. \quad (2.28)$$

A conferência é imediata no referencial de repouso do observador, onde $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e o lado direito devolve $-p_0 = p^0 = E$. Mas o lado esquerdo é um produto escalar, e portanto *já está* escrito de um jeito que vale em qualquer referencial: (2.28) é a versão covariante de “ E é a componente temporal de p^μ ”, e é ela, e não $E = \gamma m$, que resolve as perguntas do tipo “que frequência este observador mede?”. É a ferramenta do item 5 e do Exemplo do Doppler transversal, e sobreviverá intacta ao espaço curvo: no Capítulo 7 ela é a *definição* de energia medida localmente.

O contraste com a massa. Vale pôr as duas lado a lado, porque é o contraste que fixa a ideia. A energia depende do observador — ela tem o $\vec{U}$ de alguém do lado direito de (2.28) —, enquanto a massa é a norma (2.21), que não tem observador nenhum do lado de dentro. Nesse sentido m é mais fundamental que $E = \gamma m$: uma é propriedade da partícula, a outra é propriedade da relação entre a partícula e quem a mede.

O mesmo par vale para um sistema inteiro. A energia total que $\vec{U}$ mede é $-\vec{P} \cdot \vec{U}$, com o $\vec{P}$ de (2.24), e a massa invariante do sistema é (2.27) — que, como a Seção 2.5 mostrou, inclui a energia cinética interna. Daí um gás quente confinado em uma caixa ter massa total ligeiramente maior que o mesmo gás frio, com o mesmo número de partículas: o calor tem peso.

Exemplo 2.2. Duas partículas sem massa, cada uma com energia E , movem-se em direções opostas. Seus quadrimomentos podem ser escritos como

$$p_1^\mu = (E, E, 0, 0), \quad p_2^\mu = (E, -E, 0, 0).$$

O quadrimomento total é $P^\mu = (2E, 0, 0, 0)$, logo

$$M_{\text{sist}} = 2E.$$

Embora cada partícula tenha massa zero, o sistema tem massa invariante não nula.

2.7 Centro de momento

O referencial do centro de momento é definido por $\mathbf{P} = 0$: nele o quadrimomento total aponta só no tempo, $\vec{P} \xrightarrow{\text{CM}} (E_{\text{tot}}, \mathbf{0})$. Ele simplifica problemas de colisão porque toda a energia disponível aparece como massa invariante do sistema. Em uma colisão de duas partículas, a física de partículas dá um nome próprio a essa norma:

$$s \equiv -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = M_{\text{sist}}^2, \quad (2.29)$$

que é a mesma quantidade (2.27) da Seção 2.5, com outro nome. Por ser um produto escalar, s é invariante; e no centro de momento, onde $\mathbf{P} = 0$, $\sqrt{s}$ é simplesmente a energia total. Em experimentos de altas energias, essa é a quantidade que determina quais partículas podem ser produzidas.

O critério de limiar. Essa última frase pode ser afiada até virar uma regra de cálculo. Fabricar um conjunto de partículas de massas $m_1, \dots, m_n$ custa, no mínimo, a energia de fabricá-las — e esse mínimo é atingido exatamente quando *nenhuma* delas sai com sobra de energia cinética, isto é, quando todas ficam paradas no centro de momento. Nessa configuração o quadrimomento total é $P^\mu = (\sum_a m_a, \mathbf{0})$, e portanto

$$s_{\text{limiar}} = \left(\sum_a m_a \right)^2. \quad (2.30)$$

Daí em diante a conta é sempre a mesma, e é curta: calcule s no referencial em que você conhece as energias — o laboratório, quase sempre — e iguale a (2.30).

O que sobra é uma equação para a incógnita que interessa. Note que (2.30) não sabe nada sobre *quem* colidiu com quem: ela é uma afirmação sobre o estado final, e vale igual para dois prótons, para um fóton contra um elétron, ou para qualquer outro par.

Atividade 2.5. Deduza as duas curvas da Figura 2.5, que são duas maneiras de obter uma grande energia de centro de momento com partículas de mesma massa m . No *colisor*, as duas chegam com energia E em sentidos opostos; no *alvo fixo*, uma chega com energia E e a outra está em repouso. Monte $\vec{P}$ em cada arranjo, calcule $s = -\vec{P} \cdot \vec{P}$ e obtenha $\sqrt{s} = 2E$ no primeiro caso e $\sqrt{s} = \sqrt{2m^2 + 2mE}$ no segundo. Em seguida explique, em uma frase, para onde vai no alvo fixo a energia que *não* aparece como $\sqrt{s}$.

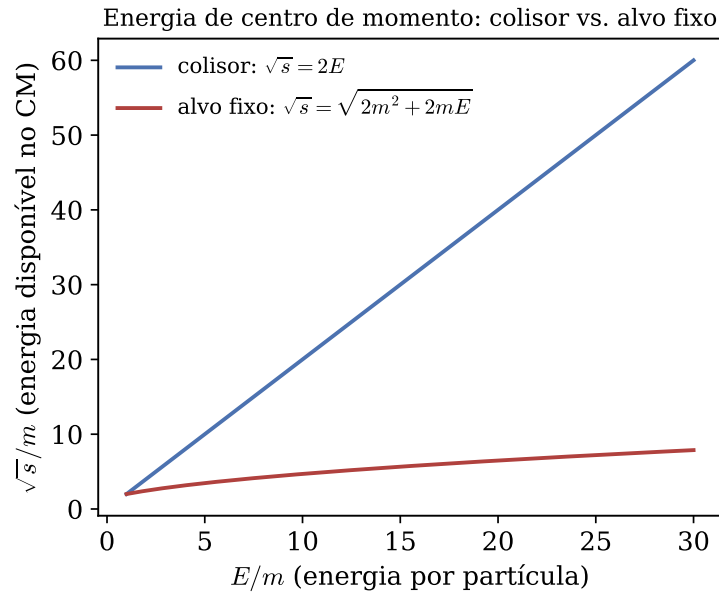


Figura 2.5. Energia disponível no referencial de centro de momento, $\sqrt{s}$, em função da energia E de cada partícula (mesma massa m nos dois casos). No colisor, $\sqrt{s} = 2E$ cresce linearmente com E . No alvo fixo, $\sqrt{s} = \sqrt{2m^2 + 2mE}$ cresce apenas com $\sqrt{E}$ para $E \gg m$. A defasagem entre as duas curvas é exatamente a energia “desperdiçada” em manter o centro de momento em movimento no laboratório.

2.8 Partículas massivas e partículas sem massa

Para partículas massivas, existe referencial de repouso. Nesse referencial $\mathbf{p} = 0$ e $E = m$. Para partículas sem massa, não há referencial de repouso: qualquer transformação de Lorentz admissível ainda observa a partícula se movendo à velocidade da luz. Essa diferença é geométrica. O quadrimomento de uma partícula massiva é temporal; o de um fóton é nulo.

A relação de dispersão (2.22) põe essa diferença em desenho. O lugar dos pares $(|\mathbf{p}|, E)$ acessíveis a uma partícula de massa m chama-se a *casca de massa* dela, e a Figura 2.6 mostra as duas formas que ela toma. Dizer que uma partícula “está na casca de massa” é apenas outro modo de dizer $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$ — e é esse vínculo que o Exemplo do espalhamento Compton usa para eliminar o elétron que não se mede.

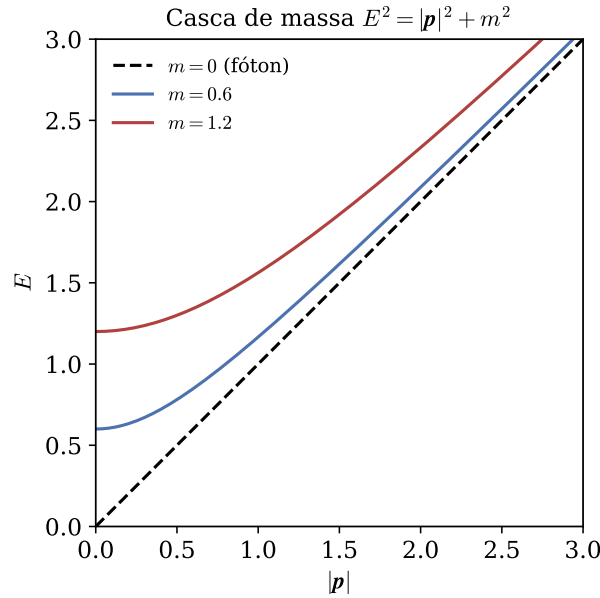


Figura 2.6. Casca de massa $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$ no plano $(|\mathbf{p}|, E)$. Para $m > 0$ a curva é um ramo de hipérbole que nunca toca a reta $E = |\mathbf{p}|$: por maior que seja o momento, $E > |\mathbf{p}|$ sempre. Para $m = 0$ a casca degenera na própria reta $E = |\mathbf{p}|$ — não há “folga” entre energia e momento para o fóton.

Essa distinção reaparece em relatividade geral. Partículas massivas seguem geodésicas temporais, parametrizadas naturalmente pelo tempo próprio. Fótons seguem geodésicas nulas, para as quais o tempo próprio ao longo da trajetória é zero. Isso não significa que “a luz não exista durante o percurso”, mas sim que não há relógio físico comóvel com um fóton.

2.9 Problemas orientados

1. **O foguete de 1 g.** Use o resultado (2.6) para a viagem que a ficção científica gosta: um foguete que mantém $a_0 = g$ (gravidade artificial confortável) rumo a Proxima Centauri, a $D = 4,2465$ anos-luz. (a) Mostre que, acelerando na primeira metade e freando na segunda, o tempo próprio total é $\tau = (2/g) \operatorname{arcosh}(1 + gD/2)$, em unidades com $c = 1$. (b) Calcule τ e o tempo decorrido na Terra, sabendo que $g \approx 1,0323 \text{ ano}^{-1}$ nessas unidades. (c) Repita para $D = 27\,000$ anos-luz (o centro da Galáxia) e comente: o que

limita a viagem não é o tempo do viajante.

2. **Energia de limiar.** Uma partícula de massa m atinge uma partícula idêntica em repouso e produz uma partícula de massa M além dos produtos originais. Use o critério (2.30) para encontrar a energia mínima no laboratório.
3. **Dcaimento em dois corpos.** Uma partícula de massa M decai em partículas de massas m_1 e m_2 . No referencial de repouso inicial, derive as energias finais usando conservação de quadrimomento.
4. **Sistema de fótons.** Dois fótons de energias E_1 e E_2 fazem ângulo θ . Mostre que a massa invariante do sistema satisfaz

$$M^2 = 2E_1E_2(1 - \cos \theta).$$

Discuta os casos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

5. **Doppler covariante.** Use $E = -p_\mu U^\mu$ para obter a mudança de frequência observada quando fonte e observador se movem ao longo da mesma linha. Compare com a fórmula clássica no limite $v \ll 1$.
6. **Colisão elástica.** No centro de momento, duas partículas idênticas colidem elasticamente. Explique por que as energias finais são iguais às iniciais e por que apenas as direções dos momentos mudam.

2.10 Exemplos resolvidos adicionais

Exemplo 2.3. Espalhamento Compton. Um fóton de energia E colide com um elétron em repouso (massa m_e) e é espalhado por um ângulo θ , saindo com energia E' . O elétron recua com quadrimomento $\vec{p}_e'$, que não medimos diretamente — a estratégia é eliminá-lo usando $\vec{p}_e' \cdot \vec{p}_e' = -m_e^2$.

Um aviso de notação. Neste exemplo a linha marca *depois da colisão*, e não outro referencial: tudo se passa num único referencial, o do elétron inicialmente em repouso, e $\vec{p}_\gamma$ e $\vec{p}_\gamma'$ são mesmo dois vetores diferentes. É o uso corrente na literatura de colisões, e não tem relação com a linha do interlúdio, que ia no *índice* e trocava de observador.

Conservação de quadrimomento dá $\vec{p}_\gamma + \vec{p}_e = \vec{p}_\gamma' + \vec{p}_e'$, ou seja $\vec{p}_e' = \vec{p}_\gamma + \vec{p}_e - \vec{p}_\gamma'$. Tomando o produto de Minkowski de cada lado consigo mesmo e usando $\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_\gamma = \vec{p}_\gamma' \cdot \vec{p}_\gamma' = 0$ (fótons) e $\vec{p}_e \cdot \vec{p}_e = -m_e^2$,

$$\begin{aligned} \vec{p}_e' \cdot \vec{p}_e' &= \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_\gamma + \vec{p}_e \cdot \vec{p}_e + \vec{p}_\gamma' \cdot \vec{p}_\gamma' + 2\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_e - 2\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_\gamma' - 2\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\gamma' \\ \implies \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_e &= \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_\gamma' + \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\gamma'. \end{aligned}$$

Nas coordenadas em que o elétron está inicialmente em repouso e o fóton incidente se move ao longo de x ,

$$\vec{p}_\gamma \xrightarrow{\mathcal{O}} (E, E, 0, 0), \quad \vec{p}_e \xrightarrow{\mathcal{O}} (m_e, 0, 0, 0), \quad \vec{p}_\gamma' \xrightarrow{\mathcal{O}} (E', E' \cos \theta, E' \sin \theta, 0),$$

onde as componentes temporais são as energias. Calculando os três produtos ($\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_e = -Em_e$, $\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_\gamma' = -EE'(1 - \cos \theta)$, $\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\gamma' = -m_e E'$) e substituindo,

$$-Em_e = -EE'(1 - \cos \theta) - m_e E' \implies \boxed{\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos \theta}{m_e}}.$$

Essa é a relação de Compton escrita em energias, sem precisar de h ou de λ . Usando $E = hc/\lambda$ (restaurando as constantes), ela é equivalente à forma mais conhecida

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Note a estrutura do método: nunca foi preciso calcular o quadrimomento do elétron espalhado — ele foi eliminado usando apenas sua casca de massa. Essa é a técnica padrão para resolver processos de espalhamento e decaimento em relatividade especial.

Exemplo 2.4. Efeito Doppler transversal. O item 5 pede o efeito Doppler quando fonte e observador se movem ao longo da *mesma linha*. Aqui tratamos o caso perpendicular, que não tem análogo clássico. Uma fonte tem quadri-velocidade

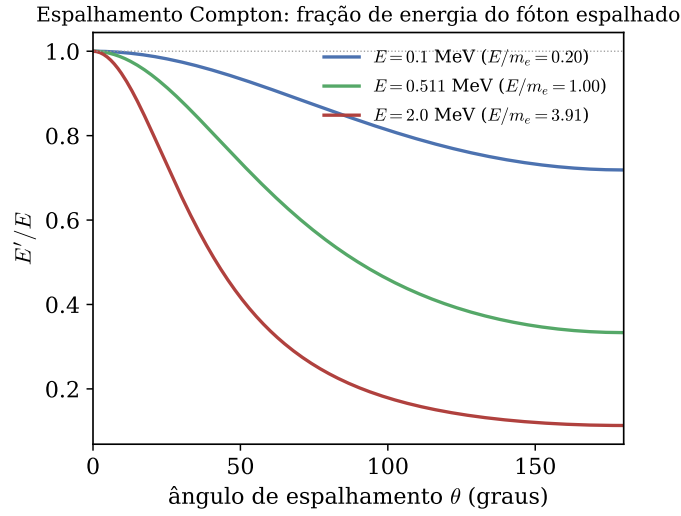


Figura 2.7. Fração de energia E'/E do fóton espalhado em função do ângulo θ , para três energias incidentes. Quanto maior E/m_e , mais forte o espalhamento (curva mais baixa): no limite $E \ll m_e$ (curva azul) o efeito quase desaparece e recupera-se o espalhamento Thomson clássico, $E' \approx E$.

$\vec{U}_{\text{fonte}} \xrightarrow{\mathcal{O}} \gamma(1, v, 0, 0)$ no referencial $\mathcal{O}$ do observador. No instante em que o observador (em repouso em $\mathcal{O}$) recebe o fóton *perpendicularmente* à velocidade da fonte, o quadrimomento do fóton é

$$\vec{p} \xrightarrow{\mathcal{O}} (v, 0, v, 0),$$

onde v é a frequência medida pelo observador. Aqui a energia do fóton está escrita *em unidades de frequência*: como $E = h\nu$ com o mesmo h para todos, o fator de Planck cancela na razão entre duas frequências, que é tudo o que este exemplo calcula.

A frequência própria ν_0 — a que a fonte mediria em seu próprio referencial de repouso — é a energia do fóton medida por um observador com quadravelocidade U_{fonte}^μ , ou seja $\nu_0 = -p_\mu U_{\text{fonte}}^\mu$:

$$\nu_0 = -[-v \cdot \gamma \cdot 1 + 0 \cdot \gamma v + v \cdot 0 + 0] = \gamma v \quad \implies \quad v = \frac{\nu_0}{\gamma}.$$

O observador mede uma frequência *menor* que a própria, mesmo sem nenhuma componente de velocidade ao longo da linha de visada. Esse redshift transversal é dilatação temporal pura — não existe efeito Doppler clássico correspondente, e sua medição (por exemplo em experimentos com rotores, ou no efeito Ives–Stilwell) é um teste direto de $d\tau = dt/\gamma$.

Exemplo 2.5. Foguete relativístico com aceleração própria constante. Este é o item 1 resolvido. Pela Seção 2.3, sob aceleração própria constante a_0 a trajetória

em $1 + 1$ dimensões é

$$t(\tau) = \frac{1}{a_0} \sinh(a_0 \tau), \quad \Delta x(\tau) = \frac{1}{a_0} [\cosh(a_0 \tau) - 1],$$

com Δx contado a partir do ponto de partida, como em (2.6). Considere uma nave que acelera a $a_0 = 1g$ durante metade da viagem e desacelera pelo mesmo tanto na segunda metade, chegando em repouso no destino. Para $a_0 = 1g \approx 1,0323 \text{ ano}^{-1}$ e uma distância $D = 4,2465$ anos-luz (Proxima Centauri), resolvendo $\Delta x(\tau_{1/2}) = D/2$ para o tempo próprio de meia viagem $\tau_{1/2}$ e depois dobrando por simetria, obtém-se

$$\tau_{\text{nave}} \approx 3,54 \text{ anos}, \quad t_{\text{Terra}} \approx 5,87 \text{ anos}.$$

A tripulação envelhece 3,54 anos; quem ficou na Terra espera 5,87 anos. A diferença não vem de nenhum efeito exótico — é a mesma geometria do paradoxo dos gêmeos (Figura 1.4 do Capítulo 1), agora com aceleração própria constante e explícita em vez de um salto instantâneo de velocidade.

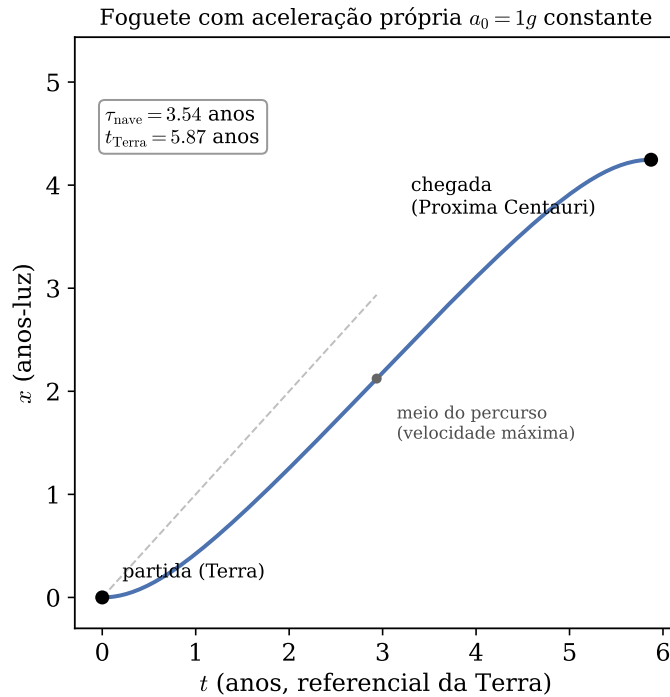


Figura 2.8. Trajetória no plano (t, x) do referencial da Terra para uma nave com aceleração própria constante $a_0 = 1g$, acelerando até o meio do percurso e desacelerando depois, para alcançar Proxima Centauri ($D = 4,25$ anos-luz) em repouso. A reta tracejada é o cone de luz ($x = t$): a trajetória nunca a alcança.

2.11 Resolução numérica

Esta seção trata por computador cinco problemas do capítulo: (i) verificar numericamente a normalização $U^\mu U_\mu = -1$ e a casca de massa $p^\mu p_\mu = -m^2$ para quadrvetores arbitrários; (ii) calcular a energia de limiar de uma reação (item 2) e comparar com um número físico conhecido; (iii) visualizar por que colisores são mais eficientes que alvos fixos (a Atividade da Seção 2.7, “Centro de momento”); (iv) resolver o espalhamento Compton por busca numérica de raiz, sem usar a fórmula fechada, como checagem independente do Exemplo de espalhamento Compton; (v) reproduzir os números do foguete relativístico da Figura 2.8. Os scripts completos estão em código/.

2.11.1 Python

PROGRAMA

[baixar →](#)

código/cap02_quadrvetores.py

Normalização da quadrvelocidade, casca de massa, decaimento em dois corpos e energia de limiar.

A energia de limiar calculada, $E_{\text{thr}} \approx 1217,9 \text{ MeV}$ para $p + p_{\text{repouso}} \rightarrow p + p + \pi^0$ (com $m_p = 938,272 \text{ MeV}$ e $m_{\pi^0} = 134,9768 \text{ MeV}$), corresponde a uma energia cinética de limiar de $E_{\text{thr}} - m_p \approx 279,7 \text{ MeV}$ — o valor conhecido experimentalmente para essa reação, que é o processo inelástico dominante quando prótons de alta energia colidem com prótons em repouso (por exemplo, raios cósmicos atingindo o meio interestelar). O script não usa a fórmula fechada: ele monta s no laboratório, iguala a (2.30) e resolve, conferindo o resultado contra a fórmula no fim. É essa função, `energia_de_limiar`, que o *Conteúdo extra* manda generalizar.

O segundo script ataca os dois problemas dos Exemplos resolvidos por um caminho diferente do algébrico: para o espalhamento Compton, resolve a condição de casca de massa do elétron espalhado por busca de raiz (`scipy.optimize.brentq`) em vez de usar a fórmula fechada, e confirma que os dois métodos concordam a 10^{-16} ; para o foguete, refaz a integração da trajetória hiperbólica e recupera exatamente $\tau_{\text{nave}} \approx 3,54$ anos e $t_{\text{Terra}} \approx 5,87$ anos.

PROGRAMA

[baixar →](#)

código/cap02_compton_foguete.py

Compton por busca de raiz, sem a fórmula fechada, e a trajetória do foguete de aceleração própria constante.

2.11.2 Mathematica

PROGRAMA[baixar →](#)`codigo/cap02_quadrivetores.wl`

Derivação simbólica da massa invariante de dois fótons e da energia de limiar.

O script deriva simbolicamente, em sequência: a normalização da quadrelocidade para uma 3-velocidade genérica; a fórmula do item 4 para a massa invariante de dois fótons; por eliminação direta (o critério (2.30) com o estado final $2m + M$, resolvido para E), a fórmula fechada

$$E_{\text{thr}} = m + 2M + \frac{M^2}{2m}$$

pedida no item 2; e, por fim, a mesma eliminação do quadrimomento do elétron usada no Exemplo de espalhamento Compton, resolvida agora simbolicamente para reproduzir $1/E' - 1/E = (1 - \cos \theta)/m_e$. A avaliação numérica de E_{thr} com as massas do próton e do pión neutro reproduz o mesmo número obtido em Python — uma checagem cruzada entre os dois ambientes.

2.12 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 2.1. FÁCIL Schutz §2.3

Uma partícula de massa de repouso m move-se com $v = 0,6$ na direção x . Escreva U^μ e p^μ em componentes e verifique explicitamente que $U^\mu U_\mu = -1$ e $p^\mu p_\mu = -m^2$. Qual é a energia cinética, isto é, $E - m$?

Exercício 2.2. FÁCIL Schutz §2.7

Um pión neutro em repouso decai em dois fótons. (a) Determine a energia de cada fóton em termos de m_π . (b) Agora o pión move-se com $\gamma = 10$ e decai emitindo os fótons ao longo do eixo de movimento; determine as energias dos dois fótons no laboratório. (c) Verifique que a massa invariante do par continua sendo m_π .

Exercício 2.3. MÉDIO Schutz §2.6

Um fóton de energia E colide frontalmente com um elétron de energia E_e que se move em sentido oposto (espalhamento Compton inverso, o mecanismo que produz raios X em jatos astrofísicos). Usando o invariante (2.29), obtenha a energia máxima que o fóton pode ter após o espalhamento no regime de Thomson — aquele em que a energia do fóton *vista pelo elétron* ainda é pequena, $\gamma_e E \ll m_e$, com $E_e = \gamma_e m_e \gg m_e$. Mostre que ela cresce como γ_e^2 . Verifique também que a hipótese $\gamma_e E \ll m_e$ é indispensável: quando ela falha, o fóton espalhado não pode passar de E_e , e o crescimento satura.

Exercício 2.4. MÉDIO Schutz §2.6

Um próton de energia E atinge um próton em repouso. (a) Calcule $\sqrt{s}$, a energia disponível no centro de momento. (b) Mostre que, para $E \gg m_p$, $\sqrt{s} \approx \sqrt{2m_p E}$, ao passo que em um colisor frontal com a mesma energia por feixe $\sqrt{s} = 2E$. (c) Que energia de laboratório seria necessária, em um experimento de alvo fixo, para igualar o $\sqrt{s} = 13$ TeV do LHC? Comente o resultado.

Exercício 2.5. DIFÍCIL Schutz §2.4

Um foguete de massa inicial M_0 acelera ejetando fótons para trás (propulsão por radiação, a mais eficiente possível). (a) Impondo conservação de quadri-momento, mostre que a massa restante M e a rapidez φ alcançada satisfazem $M/M_0 = e^{-\varphi}$. (b) Reescreva em termos da velocidade final v e mostre que

$M/M_0 = \sqrt{(1-v)/(1+v)}$. (c) Que fração da massa inicial resta ao atingir $v = 0,9$? Comente a viabilidade.

2.13 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **Um limiar para qualquer reação.** A função `energia_de_limiar` de `cap02_quadrivetores.py` resolve o critério (2.30) para um projétil que atinge um alvo *em repouso*. Generalize-a em duas frentes — e a segunda é a que dá trabalho.

(a) *Um estado final qualquer.* Faça a função aceitar uma lista de massas finais em vez da massa final total, e tabele o limiar de laboratório de $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$ (que deve reproduzir o número impresso acima, como conferência) e de $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Este segundo é o processo que produziu os primeiros antiprótons, em 1955, e o número que você obtiver explica por que a máquina que os produziu precisou ser projetada para 6 GeV.

(b) *Um estado inicial em que nada está parado.* A reação $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$ também acontece longe de qualquer laboratório: um próton de raio cósmico atinge um fóton da radiação cósmica de fundo. Aqui a função de (a) não serve, e não é por causa do estado final — é porque *nenhuma* das duas partículas está em repouso, e o fóton nem sequer poderia estar. Escreva uma segunda função para uma colisão frontal, que é a cinemática do Exercício 2.3. Com $p^\mu = (E, |\mathbf{p}|, 0, 0)$ para o próton e $q^\mu = (\varepsilon, -\varepsilon, 0, 0)$ para o fóton que vem de frente,

$$s = m_p^2 + 2\varepsilon(E + |\mathbf{p}|),$$

e igualar isso a (2.30) deixa uma equação para E . Tome o fóton com energia $\varepsilon = 6,3 \times 10^{-4}$ eV — a energia média de um fóton de corpo negro à temperatura $T_0 = 2,725$ K da radiação de fundo — e resolva para a energia do *próton*. Verifique que ela cai perto de 10^{20} eV, e refaça com $\varepsilon = kT_0$ para medir o quanto a resposta depende dessa escolha.

Um aviso numérico, que vale a pena colher. Não monte esse s somando quadri-vetores em ponto flutuante, como fizemos no resto do capítulo. Aqui $\varepsilon/E \sim 10^{-30}$, a soma $E + \varepsilon$ devolve E exatamente, e s sai zero — qualquer busca de raiz falha em seguida, sem explicar por quê. É um caso limpo de cancelamento catastrófico, e a lição é geral: quando duas escalas do problema diferem por trinta ordens de grandeza, a álgebra tem de ser feita à mão *antes* de o computador entrar. A expressão acima já é o resultado dessa simplificação.

Esse limiar tem nome: é o *corte GZK*. Acima dele um próton que viaje pelo espaço perde energia produzindo píons contra a própria radiação de fundo, e não consegue percorrer mais que algumas dezenas de megaparsecs sem cair abaixo do corte. O universo deveria, portanto, ser praticamente opaco a raios cósmicos acima de $\sim 10^{20}$ eV. Comente o que isso impõe sobre a origem dos poucos eventos já detectados acima desse valor.

2. **Aceleração própria contra aceleração coordenada.** Em `cap02_compton_foguete.py`, acrescente uma segunda estratégia para a *mesma* viagem: acelerar com d^2x/dt^2 constante e igual a g (aceleração *coordenada*, medida da Terra) até $v = 0,9$, seguir em cruzeiro, e frear com $-g$ até parar no destino — de modo que as duas estratégias partam do repouso e cheguem em repouso, e sejam portanto comparáveis. Compare τ_{nave} e t_{Terra} nos dois casos.

A segunda parece vencer nos dois relógios, e é aí que está a lição: calcule também a aceleração *própria* que a tripulação sente em cada estratégia, lembrando que $a_{\text{própria}} = \gamma^3 a_{\text{coord}}$ para movimento retilíneo. Quanto ela vale ao atingir $v = 0,9$? Uma das duas viagens é impossível para gente de verdade — diga qual, e por quê. Essa é a razão de a aceleração *própria* constante ser o cenário padrão da literatura, e não a coordenada.

Repare, de passagem, que a estratégia coordenada nem poderia continuar muito além do ponto em que a interrompemos: com $d^2x/dt^2 = g$ fixo, $v = gt$ ultrapassaria 1 em $t = 1/g \approx 0,97$ ano. A fase de aceleração termina antes disso, e por isso o absurdo não chega a aparecer — mas está a poucas semanas de distância, e é exatamente a objeção que a aceleração própria constante resolve de saída, com $v = \tanh(a_0\tau)$ saturando sozinha.

3. **A desigualdade da massa invariante.** Acrescente a `cap02_quadri vetores.py` uma rotina que sorteia N partículas com massas e momentos aleatórios e calcula a massa invariante do sistema. Verifique em mil sorteios que $M_{\text{sist}} \geq \sum_a m_a$ e determine numericamente em que condição vale a igualdade. Interprete o excesso.

Tensores no espaço-tempo plano

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Dominar a notação de índices, distinguir vetores de 1-formas, reconhecer simetrias e compreender a métrica como o objeto que traduz uma coisa na outra — e ver, na derivada, por que tudo isso ainda é fácil enquanto o espaço-tempo é plano.

LEITURA ORIENTADA

As marcas dos exercícios remetem ao Capítulo 3 do Schutz, mas a ordem aqui é outra, de propósito. Ele abre pela métrica e pela definição abstrata de tensor, e só chega ao gradiente na Seção 3.4; aqui o gradiente vem primeiro, porque é um objeto que você já usa há anos, e assim a 1-forma *aparece* em vez de ser postulada. A correspondência, para quem for consultar o livro: Seção 3.1 ↔ Schutz 3.3–3.4; Seção 3.2 ↔ 3.3; Seção 3.3 ↔ 3.2 e 3.7; Seção 3.5 ↔ 3.5; Seção 3.6 ↔ 3.1, 3.6 e 3.8; Seção 3.9 ↔ 3.9. A base oblíqua da Seção 3.8 ele só trata no Capítulo 5.

3.1 1-formas: por que elas existem

O Capítulo 2 tratou $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$ como uma abreviação cômoda, e prometeu que o objeto do lado esquerdo tem vida própria. Esta seção cumpre a promessa — e o melhor caminho não é definir a 1-forma e depois procurar exemplos, mas mostrar que você já usa uma há anos sem saber.

O gradiente não é um vetor. Seja $f(x^\mu)$ um campo escalar — a temperatura ao longo do espaço-tempo, digamos. Suas derivadas parciais $\partial_\mu f \equiv \partial f / \partial x^\mu$ formam quatro números, e a tentação é chamá-los de “o vetor gradiente”. Mas quatro números só são um vetor se transformarem como (2.1), e estes não transformam. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \quad , \quad (3.1)$$

enquanto as componentes de um vetor transformam com $\Lambda^{\mu'}_\nu$. As duas matrizes

em jogo, $\partial x^\nu / \partial x^{\mu'}$ e $\Lambda^{\mu'}_\nu$, são *inversas* uma da outra — não iguais. O gradiente se transforma com a matriz errada para ser um vetor.

Vale dar nome a essa inversa agora, para não ter de arrastar um quociente de derivadas pelo resto do capítulo:

$$\Lambda^\nu_{\mu'} \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \quad , \quad (3.2)$$

a mesma letra, com a ordem dos índices trocada. Não é símbolo novo: é a matriz que a caixa da Seção 2.3 usou para levar a quadrivelocidade do referencial de repouso da partícula para S . A posição da linha diz sozinha em que sentido ela age — linha embaixo, sai do referencial com linha; linha em cima, chega nele. Com esse nome, (3.1) fica

$$\partial_{\mu'} f = \Lambda^\nu_{\mu'} \partial_\nu f.$$

POR QUE O JACOBIANO É A MATRIZ DE LORENTZ

A equação (3.2) tem cara de definição, e não é: é uma conta de uma linha — e ela só fecha porque a transformação de Lorentz é *linear*.

Parta da transformação em índices, (1.10), e da sua inversa, $x^\nu = \Lambda^\nu_{\alpha'} x^{\alpha'}$. Derive a segunda em relação a $x^{\mu'}$:

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left(\Lambda^\nu_{\alpha'} x^{\alpha'} \right) = \Lambda^\nu_{\alpha'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda^\nu_{\alpha'} \delta^{\alpha'}_{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'}.$$

Dois passos fizeram o trabalho, e vale saber qual é qual. O primeiro foi tirar $\Lambda^\nu_{\alpha'}$ de dentro da derivada, o que só se pode fazer porque as entradas de Λ são *números fixos*: dependem apenas da velocidade relativa, não do evento em que se está. O segundo foi $\partial x^{\alpha'} / \partial x^{\mu'} = \delta^{\alpha'}_{\mu'}$, que vale porque as quatro coordenadas são independentes entre si — derivar x' em relação a t' dá zero.

Em números. Para um *boost* de velocidade v ao longo de x a relação inversa é $t = \gamma(t' + vx')$ e $x = \gamma(x' + vt')$, e as quatro derivadas dão

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix},$$

que é exatamente a matriz da caixa da Seção 2.3 — e que não depende nem de t' nem de x' , em nenhuma entrada.

E é aqui que a igualdade vai falhar. Em coordenadas curvilíneas a relação entre os dois sistemas deixa de ser linear: o jacobiano $\partial x^\nu / \partial x^{\mu'}$ passa a depender do ponto, e não existe matriz constante Λ nenhuma para batizá-lo. O jacobiano é o objeto geral; Λ é o caso particular em que ele é o mesmo em toda parte. Vale guardar a distinção agora, porque é dela que a Seção 3.9 e

todo o Capítulo 6 vão depender.

RESULTADO CENTRAL

Existem, portanto, dois tipos de objeto de quatro componentes no espaço-tempo, distinguidos por como mudam de base: os que transformam com Λ (*vetores*, índice em cima) e os que transformam com Λ^{-1} (*1-formas*, índice embaixo). O gradiente $\partial_\mu f$ é o exemplo mais natural de uma 1-forma, e é anterior a qualquer métrica.

E é por isso que a contração funciona. Aplicar uma 1-forma a um vetor,

$$\tilde{W}(\vec{V}) = W_\mu V^\mu,$$

produz um número igual em todas as bases: as duas matrizes se cancelam, $\Lambda^\nu_{\mu'} \Lambda^{\mu'}_\rho = \delta^\nu_\rho$. Nenhuma métrica foi usada — este é o ponto que o terceiro dos Exercícios, no fim do capítulo, explora. A contração de um índice em cima com um índice embaixo é a única operação que produz invariantes de graça, e é por isso que a notação insiste tanto na posição dos índices.

ONDE SE ERRA

Note a diferença de estatuto entre esta seção e o Capítulo 2. Lá, A_μ foi *fabricada* a partir de A^μ usando a métrica. Aqui, $\partial_\mu f$ já nasce 1-forma, sem que nenhuma métrica tenha sido invocada. 1-formas existem em variedades que não têm métrica nenhuma; o que a métrica faz — e é o assunto da Seção 3.6 — é permitir traduzir umas nas outras.

3.1.1 A imagem: uma pilha de superfícies

Vale ter uma imagem geométrica de por que vetores e 1-formas são objetos diferentes, e não apenas “vetores com índice em cima ou embaixo”. Um vetor é uma seta: tem magnitude e direção. Uma 1-forma é melhor visualizada como uma *pilha de superfícies* — as superfícies de nível de uma função linear $\varphi(x) = W_\mu x^\mu$. O valor $\tilde{W}(\vec{V})$ é, literalmente, o número de superfícies que a seta $\vec{V}$ perfura ao ir da origem até sua ponta. Superfícies mais próximas entre si representam uma 1-forma “mais forte” (maior magnitude); a orientação das superfícies codifica a direção da 1-forma.

E as superfícies não são uma analogia escolhida a dedo: para a 1-forma de componentes $\partial_\mu f$, elas são *literalmente* as superfícies de nível de f . Uma 1-forma forte é um campo que varia rápido, com as superfícies de nível apertadas — exatamente o que um mapa topográfico desenha com curvas de nível próximas onde

a encosta é íngreme. O gradiente aponta ladeira acima porque as curvas de nível estão ali; a 1-forma ω é o conjunto de curvas, não a seta.

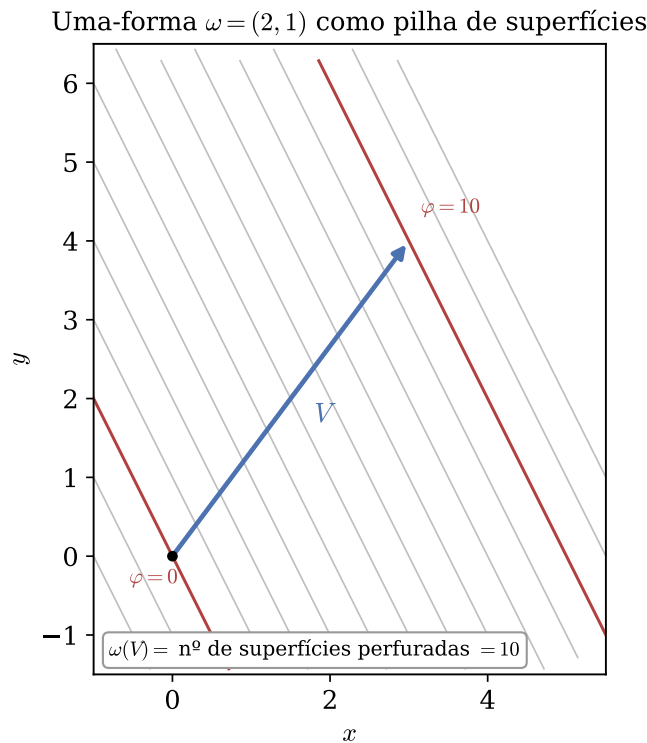


Figura 3.1. A 1-forma $\tilde{W}$, de componentes $(2, 1)$, representada como uma pilha de retas (superfícies de nível de $\varphi = 2x + y$, espaçadas de $\Delta\varphi = 1$). O vetor $\vec{V}$, de componentes $(3, 4)$, vai de $\varphi = 0$ a $\varphi = 10$, perfurando exatamente 10 retas – por isso $\tilde{W}(\vec{V}) = 10$. Esses são os mesmos $\tilde{W}$ e $\vec{V}$ do Exemplo 3.1.

Exemplo 3.1. Em duas dimensões euclidianas, seja $\tilde{W}$ de componentes $(2, 1)$ e $\vec{V}$ de componentes $(3, 4)$ em uma base cartesiana. A contração é $\tilde{W}(\vec{V}) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10$. Se mudarmos para uma base rotacionada, as componentes individuais mudam — as de $\tilde{W}$ com uma matriz, as de $\vec{V}$ com a inversa — mas o número obtido pela ação da 1-forma sobre o vetor permanece o mesmo: é o mesmo número de superfícies perfuradas na Figura 3.1, agora contado em coordenadas diferentes. Perfurar superfícies é um fato geométrico, e não depende de quem conta.

3.1.2 Dobrar a seta não é dobrar a pilha

A imagem só rende de verdade quando se pergunta o que acontece ao *multiplicar* cada um dos dois objetos por um número. Comece medindo o espaçamento. As folhas de $\tilde{W}$ são as superfícies $\varphi = 0, 1, 2, \dots$ da função $\varphi(x) = W_\mu x^\mu$, e duas

folhas vizinhas distam

$$\Delta\ell = \frac{1}{|\tilde{W}|} \quad (3.3)$$

uma da outra. Essa fórmula curta carrega toda a diferença entre os dois objetos:

A MAGNITUDE DE UMA 1-FORMA É O INVERSO DO ESPAÇAMENTO

Uma 1-forma *forte* tem folhas *apertadas* — não folhas grandes, nem folhas compridas. Quem chega das setas espera o contrário, e é aí que se erra: dobrar $\tilde{W}$ não estica nada, aperta a pilha pela metade.

Com (3.3) o número $\tilde{W}(\vec{V})$ ganha uma leitura só: é o comprimento de $\vec{V}$ medido com uma régua cujo passo é o espaçamento da pilha. E há dois jeitos de dobrar esse número, geometricamente distintos:

- **dobrar o vetor**, $\vec{V} \rightarrow 2\vec{V}$: a seta fica duas vezes mais comprida, a pilha não muda, e a seta atravessa duas vezes mais folhas;
- **dobrar a 1-forma**, $\tilde{W} \rightarrow 2\tilde{W}$: a seta é exatamente a mesma, mas a régua encolheu pela metade — as folhas ficam duas vezes mais juntas, e a mesma seta atravessa duas vezes mais.

Os dois dão $2\tilde{W}(\vec{V})$, e nenhuma conta os distingue. A figura distingue — e essa é a razão de a imagem valer a pena.

Escolhendo a 1-forma por uma função. O jeito mais econômico de produzir exemplos é dar a função e deixar $\tilde{W} = df$, porque aí as folhas são as curvas de nível de f e não é preciso desenhar nada à mão. Quatro casos, no plano:

f	$\tilde{W} = df$	O que se vê
$2x + y$	$(2, 1)$	retas paralelas, espaçadas de $1/\sqrt{5}$: é a Figura 3.1.
$4x + 2y$	$(4, 2)$	as <i>mesmas</i> retas, na mesma direção, com metade do espaçamento. Dobrar a função dobra a 1-forma.
$x^2 + y^2$	$(2x, 2y)$	folhas circulares, e $ df = 2r$: a pilha vai <i>fechando</i> conforme se afasta da origem. Um campo de 1-formas não tem uma densidade, tem uma em cada ponto.
xy	(y, x)	na origem $df = 0$ e não existe folha nenhuma — todo vetor atravessa zero delas.

Um exemplo físico fecha a ideia, e é o mesmo com que a seção começou. Se f é a temperatura, as folhas de df são as isotermas de grau em grau, e $df(\vec{V})$ é

quantos graus se ganham ao caminhar por $\vec{V}$. Meça a mesma temperatura em meios-graus: o campo físico não mudou nada, mas df dobrou, as isotermas dobraram de densidade e o mesmo passo $\vec{V}$ atravessa o dobro de folhas. A seta $\vec{V}$ ficou idêntica; foi a régua que mudou.

Atividade 3.1 (no **ÁLETRA**). O **ÁLETRA** desenha exatamente esta figura: as folhas dele são os níveis inteiros da 1-forma, e o numeral no alto é o número de folhas que a seta atravessa. Na tela ela se chama ω , e não $\tilde{W}$, e é assim que os rótulos são citados aqui. Roda no navegador, sem instalar nada. Abra, escolha Plano euclidiano no seletor de superfície e deixe a leitura em $\langle \omega, v \rangle$ — contar folhas. A 1-forma e o vetor se escrevem por extenso nos campos do painel, de modo que nada aqui depende de acertar um arrasto.

(a) **A seta cresce, a pilha não.** No bloco One-form ω escreva $\omega_x = 2$ e $\omega_y = 0$: a pilha vira um pente de retas verticais, espaçadas de $1/2$ pela (3.3). No bloco Vetor v escreva $v^x = 1$ e $v^y = 0$. O numeral marca 2,00, e as duas folhas atravessadas dão para contar no dedo. Agora dobre a seta, com $v^x = 2$: o numeral vai a 4,00 e a pilha continua com as mesmas 13 retas na tela. Só a seta mudou.

(b) **A pilha aperta, a seta não.** Volte a $v^x = 1$ e escreva $\omega_x = 4$. O numeral marca 4,00 de novo — mas a seta é a mesma de (a), e as retas passaram de 13 para 25. Desta vez foi a pilha que mudou. Os itens (a) e (b) dão o mesmo número por razões geométricas diferentes, e é a distinção que nenhuma conta faz e a figura faz.

(c) **A pilha vinda de uma função.** Troque a leitura para $d\omega(u, v)$ — circulação, escreva $2x + y$ no campo f e marque usar $\omega = df$. A pilha desenhada passa a ser a de df : as curvas de nível de f , que são a 1-forma (2, 1) da Figura 3.1. Troque f para $4x + 2y$ — mesma inclinação, e as folhas passam de 17 para 35. (O numeral marca zero, e vai marcar zero sempre: uma pilha que veio de uma função não circula, o que é o teorema $d^2f = 0$ e está fora do programa deste curso. Aqui o que interessa é a pilha desenhada, não o numeral.)

(d) **Um campo, e não uma 1-forma só.** Ainda com usar $\omega = df$, escreva $x^2 + y^2$. A tela fica sem folha nenhuma — e é esse o conteúdo do item, não um defeito do programa: $df = (2x, 2y)$ se anula na origem, que é justamente onde o ponto começa. Arraste o ponto — a alça no meio da carta — para longe da origem, e as folhas aparecem, circulares, fechando conforme o ponto se afasta: a densidade dobra cada vez que a distância dobra, porque $|df| = 2r$. Depois escreva xy e leve o ponto de volta à origem. A pilha some outra vez, agora porque $df = (y, x)$ também se anula ali — não há folha nenhuma para atravessar, e o número é zero para qualquer seta.

INTERLÚDIO • O MÍNIMO QUE VOCÊ PRECISA LEMBRAR DE ÁLGEBRA LINEAR

A próxima seção começa afirmando que as 1-formas “formam um espaço vetorial próprio”. É uma frase que se lê rápido e se aceita sem conferir — e não deveria, porque é justamente ela que autoriza tudo o que vem depois: falar em base, em dimensão, em componentes. Vale gastar duas páginas lembrando o que a afirmação quer dizer, porque a definição é bem menor do que a memória costuma guardar.

Os axiomas. Um *espaço vetorial sobre os reais* é um conjunto V munido de duas operações — somar dois elementos de V , e multiplicar um elemento de V por um número real — que obedecem, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

Da soma

A1	$u + v = v + u$	comutativa
A2	$(u + v) + w = u + (v + w)$	associativa
A3	existe $0 \in V$ com $v + 0 = v$	há um elemento neutro
A4	para cada v existe $-v$ com $v + (-v) = 0$	todo elemento tem oposto

Do produto por escalar

M1	$a(bv) = (ab)v$	os escalares se compõem
M2	$1v = v$	o 1 não faz nada
M3	$a(u + v) = au + av$	distributiva sobre a soma de vetores
M4	$(a + b)v = av + bv$	distributiva sobre a soma de escalares

São oito. Se você lembrava de sete, ou de dez, os dois são defensáveis: alguns livros contam à parte as duas condições de *fechamento* — que $u + v$ e av ainda estejam em V —, e outros dobram axiomas um no outro.

E repare no que a lista não diz. Não há uma palavra sobre setas, comprimento, ângulo ou direção. Nada ali permite perguntar “qual é o tamanho de v ?”. Um espaço vetorial é apenas um conjunto onde somar e escalar funcionam como se espera — e é por isso que a definição pega tanta coisa que não se parece nem um pouco com uma flecha:

O “vetor” é...	somar é...	o zero é...
uma n -upla $(x_1, \dots, x_n)$	somar entrada a entrada	$(0, \dots, 0)$
um polinômio de grau $\leq n$	somar os coeficientes	o polinômio nulo
uma função contínua em $[a, b]$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	a função nula
uma matriz $m \times n$	somar entrada a entrada	a matriz nula
uma solução de $y'' + \omega^2 y = 0$	somar as soluções	$y \equiv 0$
uma 1-forma	$(\tilde{W} + \tilde{\sigma})(\vec{V}) = \tilde{W}(\vec{V}) + \tilde{\sigma}(\vec{V})$	a 1-forma nula
um ket $ \psi\rangle$	a superposição	o vetor nulo

A quinta linha merece um segundo olhar. As soluções de $y'' + \omega^2 y = 0$ formam um espaço vetorial de dimensão *dois*: uma base é $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$, e as “componentes” de uma solução nessa base são a amplitude e a fase. Quando você resolveu o oscilador harmônico e escreveu “a solução geral é combinação linear das duas”, estava expandindo um vetor numa base — e o vetor era uma *função*.

Some duas 1-formas definindo $(\tilde{W} + \tilde{\sigma})(\vec{V}) = \tilde{W}(\vec{V}) + \tilde{\sigma}(\vec{V})$, e multiplique por escalar com $(a\tilde{W})(\vec{V}) = a\tilde{W}(\vec{V})$. Os oito axiomas são testados ao mesmo tempo, porque do lado direito estão números reais, que já os obedecem. Logo as 1-formas formam um espaço vetorial, e portanto têm base, dimensão e componentes — que é tudo o que a Seção 3.2 vai usar. O mesmo argumento vale para qualquer V : o conjunto das aplicações lineares de V nos reais é um espaço vetorial, chamado *espaço dual* V^* , e em dimensão finita $\dim V^* = \dim V$.

O QUE OS AXIOMAS NÃO DÃO

Nenhum dos oito axiomas menciona produto escalar. Ser espaço vetorial é de graça; poder medir comprimentos e ângulos é estrutura *extra*, que se acrescenta por cima — e no nosso caso essa estrutura é a métrica. É por isso que a 1-forma $\partial_\mu f$ existe antes de qualquer métrica, e é por isso que a métrica é o que *traduz* vetores em 1-formas, não o que as cria.

Bras e kets são a mesma construção. Quem já viu mecânica quântica já usou uma 1-forma, com outro nome. Na notação de Dirac, um estado é um ket $|\psi\rangle$, elemento de um espaço vetorial (complexo) $\mathcal{H}$. Um bra $\langle\phi|$ não é outro estado: é uma *aplicação linear* que come um ket e devolve um número — ou seja, um elemento de $\mathcal{H}^*$. E o “bracket” $\langle\phi|\psi\rangle$ é literalmente a aplicação de um no outro, que é a nossa contração $W_\mu V^\mu$ escrita de outro jeito. A tradução é termo a termo:

	Neste curso	Mecânica quântica
vetor	$\vec{V}$, componentes V^μ	ket $ \psi\rangle$
elemento do dual	1-forma $\tilde{W}$, W_μ	bra $\langle\phi $
o número	$\tilde{W}(\vec{V}) = W_\mu V^\mu$	$\langle\phi \psi\rangle$
base	$\vec{e}_\mu$	$ n\rangle$
base dual	$\tilde{\omega}^\mu(\vec{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu$	$\langle m n\rangle = \delta_{mn}$
componentes	$V^\mu = \tilde{\omega}^\mu(\vec{V})$	$c_n = \langle n \psi\rangle$
reconstruir	$\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$	$ \psi\rangle = \sum_n \langle n \psi\rangle n\rangle$
a régua que traduz	a métrica, $W_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$	a conjugação hermitiana, $ \psi\rangle \mapsto \langle\psi $

A penúltima linha é a relação de completeza $\sum_n |n\rangle \langle n| = \hat{1}$, que todo curso de quântica usa dezenas de vezes: ela é exatamente $\vec{V} = \tilde{\omega}^\mu(\vec{V}) \vec{e}_\mu$, a identidade escrita como “soma sobre a base dual vezes a base”. O mesmo teorema, duas notações.

ONDE O PARALELO QUEBRA

A analogia é estrutural, não literal, e vale saber onde ela para. Primeiro, os escalares da quântica são *complexos*, e a passagem de ket para bra é *antilinear*: $\lambda|\psi\rangle$ vira $\bar{\lambda}\langle\psi|$. A nossa métrica é linear, porque os escalares aqui são reais. Segundo, o produto interno da quântica é *positivo definido* — $\langle\psi|\psi\rangle > 0$ para todo estado não nulo —, e $\eta_{\mu\nu}$ não é: existem vetores não nulos de norma zero, os vetores nulos, e nenhum espaço de Hilbert admite isso. Minkowski tem uma forma bilinear, não um produto interno no sentido estrito.

O que os dois casos têm em comum, e que é o motivo de trazer o assunto aqui, é uma coisa só: **ambas as notações escondem a distinção entre o espaço e o seu dual, e escondem pelo mesmo motivo** — na base padrão a régua que traduz um no outro é trivial. Em Minkowski ela troca no máximo um sinal; numa base ortonormal de Hilbert, $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, ela não faz absolutamente nada. Por isso ninguém precisa da distinção enquanto fica na base de sempre, e por isso ela volta a importar assim que a base deixa de ser ortonormal — na quântica, ao mudar de base ou lidar com espectro contínuo; aqui, a partir do momento em que a métrica passa a depender do ponto e o Capítulo 6 começa.

3.2 A base dual

1-formas se somam e se multiplicam por número: a soma de duas 1-formas é uma 1-forma, e $\lambda \tilde{W}$ também. Elas formam, portanto, um espaço vetorial próprio, no sentido exato dos oito axiomas do Interlúdio da página 84 — de quatro dimensões, como o dos vetores — e todo espaço vetorial tem bases. Falta escolher uma.

A escolha natural não é livre: uma vez fixada a base de vetores $\{\vec{e}_\mu\}$ do Capítulo 2, a base de 1-formas fica determinada. Pedimos as quatro 1-formas $\{\tilde{\omega}^\mu\}$ que satisfazem

$$\tilde{\omega}^\mu(\vec{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu, \quad (3.4)$$

ou seja: $\tilde{\omega}^0$ vale 1 sobre $\vec{e}_0$ e zero sobre os outros três vetores de base, e assim por diante. Esse conjunto se chama *base dual* a $\{\vec{e}_\mu\}$.

A razão de pedir exatamente isso cabe em uma linha. Escrevendo $\tilde{W} = W_\mu \tilde{\omega}^\mu$ e $\vec{V} = V^\nu \vec{e}_\nu$,

$$\tilde{W}(\vec{V}) = W_\mu V^\nu \tilde{\omega}^\mu(\vec{e}_\nu) = W_\mu V^\nu \delta^\mu_\nu = W_\mu V^\mu,$$

que é a contração de sempre. Isto é: (3.4) é precisamente a condição para que “multiplicar componente por componente e somar” seja de fato a aplicação da 1-forma ao vetor. E, do mesmo modo, as componentes de uma 1-forma são os seus valores sobre os vetores de base,

$$W_\mu = \tilde{W}(\vec{e}_\mu),$$

assim como os V^μ eram os coeficientes que reconstroem $\vec{V}$ a partir de $\{\vec{e}_\mu\}$.

A pilha de superfícies dá a imagem: $\tilde{\omega}^0$ é a família de superfícies de x^0 constante, espaçadas de uma unidade. O vetor $\vec{e}_0$ atravessa exatamente uma dessas superfícies — daí o 1 — e $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ correm ao longo delas sem atravessar nenhuma, daí os zeros.

UMA COLISÃO DE NOTAÇÃO

Muitos livros escrevem dx^μ para as 1-formas de base, e faz sentido: $\tilde{\omega}^\mu$ é o gradiente da função coordenada x^μ . Aqui isso seria desastroso, porque o Capítulo 2 já usa dx^μ para o *deslocamento* entre dois eventos, que é um vetor, com o índice em cima por bom motivo. São dois objetos diferentes, e o til de $\tilde{\omega}^\mu$ existe para não deixar confundi-los.

Duas observações que rendem mais adiante. A primeira: (3.4) relaciona as *bases*, e não pares individuais. Mexer só em $\vec{e}_0$ em geral altera as quatro 1-formas $\tilde{\omega}^\mu$, e não apenas $\tilde{\omega}^0$. A segunda: numa base ortonormal a base dual passa despercebida, porque $\tilde{\omega}^\mu$ acaba correspondendo a $\vec{e}_\mu$ a menos de sinais, e é numa base oblíqua que as duas se separam de modo visível — o que é o assunto da

Seção 3.8.

3.3 Tensores de tipo (r, s)

Vetores e 1-formas são os dois primeiros casos de uma mesma construção. Um *tensor de tipo (r, s)* é uma máquina linear em cada entrada que recebe r 1-formas e s vetores e devolve um número. Suas componentes carregam r índices em cima e s embaixo, e cada um deles transforma com a matriz que lhe cabe — Λ para os de cima, Λ^{-1} para os de baixo:

$$T^{\mu' \nu'}_{\rho'} = \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} \Lambda^{\gamma}_{\rho'} T^{\alpha \beta}_{\gamma}.$$

É essa lei, e apenas ela, que define um tensor. Um arranjo de números com índices que não obedeça a ela não é tensor, por mais que se pareça com um — e o exemplo mais importante disso aparecerá no Capítulo 6, quando os símbolos de Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$, apesar dos três índices, não forem tensores.

Nessa escala, os casos já vistos são:

Tipo	Componentes	Exemplo
$(0,0)$	ϕ	escalar: massa de repouso, tempo próprio
$(1,0)$	V^{μ}	vetor: quadrivelocidade, quadrimomento
$(0,1)$	W_{μ}	1-forma: gradiente $\partial_{\mu} f$
$(0,2)$	$g_{\mu\nu}$	métrica; tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$
$(2,0)$	$T^{\mu\nu}$	tensor de energia-momento (Capítulo 4)
$(1,1)$	T^{μ}_{ν}	qualquer aplicação linear de vetores em vetores

Duas operações produzem tensores a partir de tensores. O *produto tensorial* justapõe: de A^{μ} e B^{ν} sai o tensor $(2,0)$ de componentes $A^{\mu} B^{\nu}$. A *contração* soma um índice de cima com um de baixo e baixa o tipo em $(1,1)$: de T^{μ}_{ν} sai o escalar T^{μ}_{μ} , o *traço*. Que o traço seja de fato um escalar não é óbvio e vale a conta — é o item 3 dos Problemas orientados.

3.4 Índices: a regra e os erros

A regra é curta. Um índice repetido uma vez em cima e uma vez embaixo no mesmo termo é somado e desaparece — é um índice *mudo*, e seu nome não importa. Os que sobram são *livres*, e são eles que dizem o tipo do objeto: têm de

aparecer de modo idêntico, mesma letra e mesma posição, nos dois lados da equação e em todos os termos de uma soma. Assim

$$A^\mu = B^\mu + C^\mu$$

é uma equação vetorial legítima, enquanto $A^\mu = B^\nu$ não é equação nenhuma.

Dessa regra única saem os três erros que mais aparecem nas provas.

1. **Repetir um índice três vezes** no mesmo termo, como em $A_\mu B^\mu C^\mu$. A convenção da soma não diz o que fazer com isso, e a expressão simplesmente não significa nada; o conserto é sempre renomear um dos mudos.
2. **Trocar o nome de um índice livre** de um lado da equação para o outro, ou de um termo para o seguinte.
3. **Somar tipos diferentes**, como em $A_\mu + B^\mu$. Um é 1-forma e o outro é vetor; sem uma métrica não há nem como compará-los.

O hábito que previne os três é ler os índices em voz alta antes de escrever o próximo passo: os repetidos somem por soma, os livres nomeiam o resultado. Se depois de uma contração ainda sobram α e β , o resultado é um tensor com esses dois índices livres — e é assim que ele tem de aparecer do outro lado do sinal de igual. Para deltas, símbolos antissimétricos e as contrações mais frequentes, o Apêndice A serve de mesa de trabalho enquanto este capítulo é estudado.

Atividade 3.2. Classifique cada expressão como escalar, vetor, 1-forma, tensor de ordem dois ou expressão inválida, dizendo em cada caso quais índices ficaram livres:

$$A_\mu B^\mu, \quad T^{\mu\nu} V_\nu, \quad R_{\mu\nu} A^\rho, \quad A_\mu + B^\mu, \quad T^{\mu\nu}{}_\nu.$$

INTERLÚDIO • O TESSERA, E A ÁLGEBRA QUE NÃO ENCAIXA

A seção anterior deu uma regra e três erros, e um hábito para evitá-los: ler os índices em voz alta. Existe uma segunda maneira de conferir, e ela não depende de disciplina nenhuma — basta que a expressão errada *não caiba*.

O **Tessera** faz isso. Cada tensor é uma peça de encaixe, no modelo *T-mosaic* de Giancarlo Bernacchi: um índice em cima é um pino, um índice embaixo é um furo, e a forma da peça é a valência do tensor. Contrair é encaixar pino em furo. A tese do programa cabe numa frase:

verificar validade algébrica é detectar colisão.

Se a expressão não é bem formada, as peças não encaixam — e o programa diz por quê, citando a passagem do livro. Roda no navegador, em português, sem instalar nada.

The screenshot shows the TESSERA web application interface. At the top, there's a header with the logo, a 'Tutorial' button, and a dimension selector set to 4. Below this is a toolbar with options like 'Português', 'Salvar', 'Abrir', 'LaTeX', and 'SVG'. The main workspace is divided into three panels:

- Left Panel (Paleta):** Contains various tensor pieces categorized by valence (e.g., g^{-1} with valence (2,0), $\vec{e}$ with valence (1,0)). It also includes a 'por texto' section for manual input and a 'montagens prontas' section.
- Center Panel (Canvas):** Displays the assembly puzzle. On the left, a piece labeled V_α with a pin at the bottom is shown. In the middle, an equals sign. On the right, a piece labeled $g_{\alpha\mu}$ with a hole at the bottom and a pin at the top, and another piece labeled V^μ with a hole at the top. The pieces are being assembled to form the expression $V_\alpha = g_{\alpha\mu} V^\mu$.
- Right Panel (Painel de Configuração):** Shows the current expression $V_\alpha = g_{\alpha\mu} V^\mu$. It includes fields for 'linha', 'termo ativo', 'coeficiente', 'valência', 'índices livres', and 'índices mudos'. There are buttons for 'Simplificar' and 'Igualar a zero'.

At the bottom, a status bar indicates 'expressão bem formada' and '2 termos · 3 peças · 1 conexão'.

Figura 3.2. O TESSERA com $V_\alpha = g_{\alpha\mu} V^\mu$ montado — a Seção 3.6 desenhada. À esquerda a paleta, com as peças agrupadas por valência; no meio o canvas, onde o pino μ de V está encaixado no furo de g ; à direita o painel, que lê a montagem de volta: valência (0,1), índice livre α , índice mudo μ , e a conexão nomeada. O rodapé confirma: expressão bem formada.

Os três erros da seção anterior, na tela. Não é coincidência que sejam os mesmos: as duas listas saem da mesma regra.

O primeiro — repetir um índice três vezes — é recusado antes de virar peça alguma. O canvas fica vazio e a mensagem é literal (Figura 3.3).

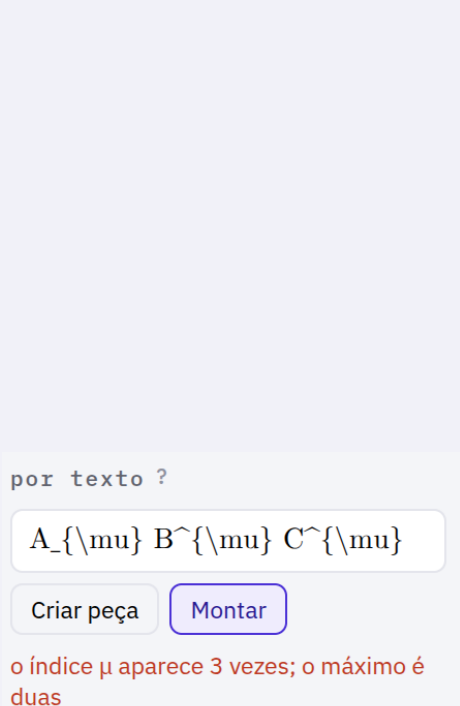


Figura 3.3. $A_{\mu}B^{\mu}C^{\mu}$ não monta: “o índice μ aparece 3 vezes; o máximo é duas”.

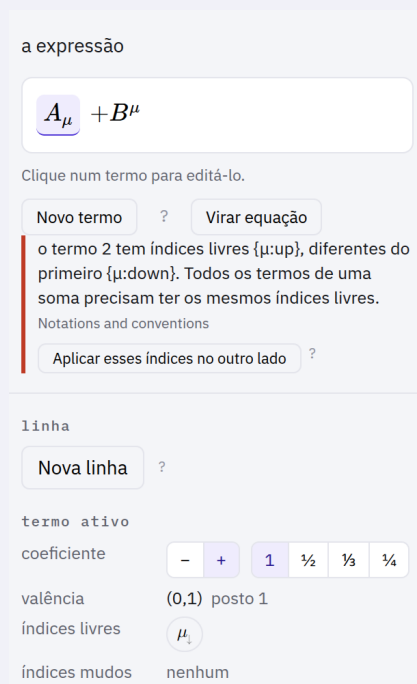


Figura 3.4. $A_{\mu} + B^{\mu}$ monta, e o painel recusa: os dois termos têm índices livres diferentes. Abaixo da mensagem, a referência ao livro.

O segundo — trocar o nome de um índice livre entre os lados — produz os dois lados têm índices livres diferentes: $\{\mu:\text{up}\}$ contra $\{\nu:\text{up}\}$, e um botão que oferece corrigir o outro lado. O terceiro — somar tipos diferentes — dá a mensagem da Figura 3.4. Repare que o programa não diz apenas “errado”: ele diz *qual* índice, *em que posição* e *por qual regra*.

O QUE A APOSTILA AFIRMA, O PROGRAMA IMPÕE

Na paleta há um grupo chamado não são tensores, com duas peças desenhadas em tracejado: o conversor de base Λ e os símbolos de Christoffel Γ . Monte $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}V^{\nu}$ e o painel avisa: Γ não é tensor — esta parcela sozinha não se transforma como tensor, só a soma completa volta a ser. É exatamente a ressalva que a Seção 3.3 faz sobre $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$, e que só vai ser cobrada no Capítulo 6 — aqui ela já é uma restrição que o programa não deixa violar.

Atividade 3.3 (no Tesseract). Abra o [Tesseract](#), confira que a língua está em Português e use o campo por texto com o botão Montar. As expressões vão

em $\text{\LaTeX}$, e os índices mudos se contraem sozinhos — não é preciso dizer quais peças se ligam.

(a) **O que deve encaixar.** Monte $A_{\mu} B^{\mu}$. Duas peças, uma conexão, e o painel resume o resultado da melhor maneira possível: índices livres: nenhum — peça lisa, é um escalar. É a Seção 3.1 dita em outra língua.

(b) **O que não deve.** Passe pelos três erros: $A_{\mu} B^{\mu} C^{\mu}$, $A^{\mu} = B^{\nu}$ e $A_{\mu} + B^{\mu}$. Depois tente $A_{\mu} B_{\mu}$, com os dois índices embaixo: a resposta é “o índice μ aparece duas vezes na mesma posição; um mudo é uma vez em cima e uma embaixo”. Essa é a expressão mal escrita do segundo dos Exercícios, e vale conferir a sua resposta contra a do programa.

(c) **Contar índices livres.** Monte $T^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu} C^{\rho}$ e leia a valência no painel: posto 1, um índice livre em cima. Foi o que o hábito de ler os índices em voz alta deveria ter previsto — μ e ν somem, ρ fica.

(d) **A métrica se aniquilando.** Monte $g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ e aperte Simplificar. O programa cancela g com g^{-1} e lista a justificativa — é a equação (3.6) da Seção 3.6 feita com as mãos.

(e) **Doze equações prontas.** Em montagens prontas há doze equações do livro, de $g g^{-1} = \delta$ até $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. As últimas ainda não fazem sentido — são o Capítulo 8 —, mas vale montar a de Einstein agora e voltar a ela no fim do curso, para ver o que mudou não na tela, e sim em você.

3.5 Simetria e antissimetria

Um tensor de tipo $(0, 2)$ recebe dois vetores *em ordem*, e a ordem importa: nada obriga $T(\vec{A}, \vec{B})$ a valer o mesmo que $T(\vec{B}, \vec{A})$. Os dois casos extremos têm nome. O tensor é *simétrico* se $T(\vec{A}, \vec{B}) = T(\vec{B}, \vec{A})$ para todos os vetores, o que em componentes — basta tomar $\vec{A} = \vec{e}_\mu$ e $\vec{B} = \vec{e}_\nu$ — é

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu},$$

e *antissimétrico* se $T(\vec{A}, \vec{B}) = -T(\vec{B}, \vec{A})$, isto é $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$.

Os dois exemplos que o curso mais usa já apareceram. A métrica é simétrica, porque o produto escalar é: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. O tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico — e é a antissimetria que faz caberem numa matriz 4×4 apenas os seis números de $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Qualquer tensor $(0, 2)$ se separa nas duas partes, e a notação é padrão:

$$M_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(M_{\mu\nu} + M_{\nu\mu}), \quad M_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(M_{\mu\nu} - M_{\nu\mu}), \quad (3.5)$$

parênteses para simetrizar, colchetes para antissimetrizar. Somando as duas, $M_{\mu\nu} = M_{(\mu\nu)} + M_{[\mu\nu]}$, e a separação é única — é o item 2 dos Problemas orientados. A contagem fecha: das 16 entradas de uma matriz 4×4 , 10 vão para a parte simétrica e 6 para a antissimétrica.

RESULTADO CENTRAL

A contração de um tensor simétrico com um antissimétrico é sempre zero: $S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0$ (a demonstração é o Exemplo 3.3). A consequência prática é maior do que parece. Quando algo simétrico multiplica algo de simetria desconhecida, só a parte simétrica do segundo sobrevive — de modo que se pode *simetrizar de graça* o outro fator, sem alterar nada. É esse truque que deduz os símbolos de Christoffel no Capítulo 6, e é a razão de valer a pena reconhecer simetrias *antes* de começar qualquer conta.

Os colchetes valem para qualquer par de índices de um tensor de qualquer ordem: $R_{\mu[\nu\rho]\sigma}$ antissimetriza apenas ν e ρ , deixando μ e σ intocados. O Capítulo 6 vai precisar disso com o tensor de Riemann, que tem simetrias em três pares diferentes.

3.6 A métrica como ponte

A Seção 2.2 já apresentou $\eta_{\mu\nu}$ como a tabela de sinais do produto escalar, e $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$ como abreviação. Com a Seção 3.1 em mãos, essa abreviação ganha o seu

significado: A_μ é a 1-forma que a métrica associa ao vetor A^μ . Concretamente, é a 1-forma que, aplicada a um vetor $\vec{B}$ qualquer, devolve o produto escalar:

$$A_\mu B^\mu = \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

Dado $\vec{A}$, esse requisito determina A_μ sem ambiguidade — e o resultado é a fórmula que já usávamos.

O caminho de volta. Se a métrica traduz vetores em 1-formas, a tradução inversa precisa existir, e para isso serve a *métrica inversa* $\eta^{\mu\nu}$, definida por

$$\eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad (3.6)$$

onde δ^μ_ν vale 1 se $\mu = \nu$ e 0 caso contrário. Em coordenadas de Minkowski a conta é imediata, porque a matriz é diagonal e cada entrada é o seu próprio inverso:

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1),$$

numericamente igual a $\eta_{\mu\nu}$. Isso é uma coincidência da assinatura e das coordenadas, não uma regra: já no Capítulo 10, com $g_{\mu\nu}$ dependendo da posição, $g^{\mu\nu}$ será uma matriz diferente, obtida invertendo a primeira de fato.

Com ela, sobem-se índices:

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu, \quad T^\mu_\nu = \eta^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu}, \quad F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (3.7)$$

um fator de métrica por índice movido. Em Minkowski, o efeito prático é apenas trocar o sinal de cada índice temporal levantado ou abaixado: se $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, então $A_\mu = (-A^0, A^1, A^2, A^3)$.

ONDE SE ERRA

Subir e descer índices é reversível e não perde informação — A^μ e A_μ carregam os mesmos fatos. Por isso é tentador tratá-los como o mesmo objeto escrito de dois jeitos, e em Minkowski isso raramente causa dano. Duas razões para não pegar o hábito. Primeiro, a tradução *depende da métrica*: mude a métrica e A_μ muda, embora A^μ não. Segundo, a 1-forma mais importante da física — o gradiente — não veio de vetor nenhum; ela já nasceu com o índice embaixo, e subi-lo é que é a operação artificial.

Atividade 3.4. Verifique (3.6) multiplicando as duas matrizes em Minkowski. Em seguida tome $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ (que é a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas) e escreva $g^{\mu\nu}$. Note que agora ela *não* é numericamente igual a $g_{\mu\nu}$ — e que continua sendo a inversa.

3.7 O que significa uma equação tensorial

Uma equação tensorial bem escrita é uma afirmação independente de coordenadas. Isso não quer dizer que as componentes sejam iguais em todos os referenciais. Quer dizer que, se a relação entre objetos geométricos é verdadeira, qualquer observador que escreva a relação em suas próprias componentes obterá uma equação da mesma forma. Essa é a razão profunda para preferirmos tensores em relatividade: eles separam física de descrição.

Por exemplo, a equação

$$p^\mu p_\mu = -m^2$$

é escalar. Cada observador pode atribuir valores diferentes a E e $\mathbf{p}$, mas todos obtêm o mesmo valor para $E^2 - \mathbf{p}^2$. Já a equação

$$A^\mu = B^\mu + C^\mu$$

é vetorial: as componentes mudam de referencial, mas a relação entre os vetores permanece. Em contraste, uma expressão como $A^\mu = B_\mu$ não é uma igualdade tensorial natural sem uma métrica especificada, pois os dois lados têm tipos diferentes.

3.8 Componentes fora de uma base ortonormal

Em uma base ortonormal a distinção entre V^μ e V_μ passa despercebida, porque $V^\mu = V_\mu$ a menos de sinais. Para vê-la é preciso sair da base ortonormal — e há *duas* maneiras independentes de sair, que convém não misturar:

1. os vetores de base deixam de ter comprimento 1, mas continuam perpendiculares entre si;
2. os vetores de base deixam de ser perpendiculares.

A primeira já basta para separar V^μ de V_μ , e é a mais fácil de ver, porque acontece num sistema de coordenadas que você usa desde o ensino médio. Começamos por ela.

3.8.1 Uma base curvilínea: as coordenadas polares

No plano, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

A base sai do jacobiano. Os vetores de base de um sistema de coordenadas apontam ao longo das linhas coordenadas, e se obtêm com a matriz que a

Seção 3.1 batizou: $\vec{e}_{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'} \vec{e}_\nu$, com $\Lambda^\nu_{\mu'} = \partial x^\nu / \partial x^{\mu'}$. Aqui,

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\theta = -r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y.$$

Repare no que acabou de acontecer. A caixa que acompanha (3.2) avisou que, em coordenadas curvilíneas, o jacobiano deixa de ser uma matriz de números fixos e passa a depender do ponto. É a primeira vez que se vê: r e θ estão dentro das entradas.

O que muda de ponto a ponto. Duas coisas, e vale separá-las (Figura 3.5). A direção, porque os eixos acompanham as linhas coordenadas. E o comprimento:

$$|\vec{e}_r| = 1, \quad |\vec{e}_\theta| = r.$$

O segundo não é acidente de álgebra. O vetor $\vec{e}_\theta$ tem componentes $(0, 1)$ em (r, θ) : ele é o deslocamento de *um radiano*. E um radiano é um arco mais comprido longe da origem do que perto dela — por isso a seta precisa crescer para dar conta do mesmo radiano.

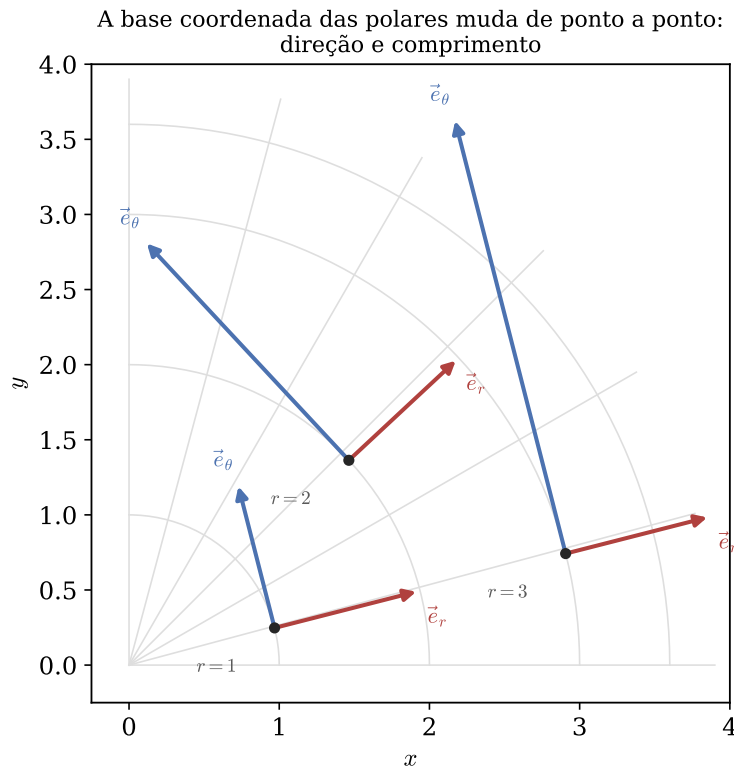


Figura 3.5. A base coordenada das polares em três pontos. Os dois de baixo estão no mesmo ângulo e mostram o comprimento: $|\vec{e}_\theta| = r$ cresce com o raio, enquanto $|\vec{e}_r| = 1$ em toda parte. O terceiro está noutro ângulo e mostra a direção mudando. As linhas cinzas são as curvas coordenadas, às quais os vetores de base são tangentes.

A métrica é a tabela dos produtos escalares. Com $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$,

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{r\theta} = 0.$$

Diagonal, portanto *ortogonal*: os dois eixos se cruzam em ângulo reto em todo ponto. Mas não ortonormal, porque $g_{\theta\theta} \neq 1$. É a mesma métrica da atividade da Seção 3.6, uma dimensão a menos.

E isso já basta. Tome o ponto $r = 2, \theta = 0$, onde $\vec{e}_r = \vec{e}_x$ e $\vec{e}_\theta = 2\vec{e}_y$, e o vetor $\vec{V} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$. Reconstruí-lo a partir da base pede

$$V^r = 1, \quad V^\theta = \frac{1}{2},$$

porque é preciso meio $\vec{e}_\theta$ para andar uma unidade em y . Já as projeções dão

$$V_r = \vec{V} \cdot \vec{e}_r = 1, \quad V_\theta = \vec{V} \cdot \vec{e}_\theta = 2.$$

O que interessa comparar aqui é $V_\theta = 2$ com $V^\theta = \frac{1}{2}$: a *mesma* direção θ , escrita das duas maneiras, e um fator 4 entre elas. Abrindo o produto escalar se vê de onde ele vem:

$$V_\theta = \vec{V} \cdot \vec{e}_\theta = (V^r \vec{e}_r + V^\theta \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_\theta = V^r \underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta)}_{g_{r\theta}=0} + V^\theta \underbrace{(\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta)}_{g_{\theta\theta}=4} = g_{\theta\theta} V^\theta.$$

Repare que o $\vec{e}_\theta$ foi consumido pelo produto: ele é aquilo com que se multiplica, e o que sobra é um número. E o resultado é a regra $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$ da Seção 3.6 — esta é a primeira vez no curso em que ela faz alguma coisa, porque numa base ortonormal g é a identidade e abaixar o índice não muda número nenhum.

NÃO É SOBRE ÂNGULO, É SOBRE RÉGUA

As componentes de cima e as de baixo diferiram por um fator 4 com os eixos *perpendiculares*. Ou seja: a distinção entre V^μ e V_μ não nasce da obliquidade. Basta a base não ser unitária. A obliquidade é uma segunda razão, independente desta, e é o assunto da subseção seguinte.

A base dual, e o inverso outra vez. A condição (3.4), $\tilde{\omega}^\mu(\vec{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu$, é a afirmação de que duas matrizes são inversas uma da outra, escrita entrada por entrada. E por isso a base dual sai sem trabalho novo: basta inverter a matriz que já temos. Ponha os dois vetores de base como *colunas*,

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det J = r$$

— o mesmo r do elemento de área $r dr d\theta$ do cálculo. Inverter uma 2×2 é mecâ-

nico: trocar a diagonal, multiplicar a antidiagonal por -1 , dividir pelo determinante.

$$J^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$$

As *linhas* da inversa são o que se procurava:

$$\tilde{\omega}^r = \cos \theta \tilde{\omega}^x + \sin \theta \tilde{\omega}^y, \quad \tilde{\omega}^\theta = -\frac{\sin \theta}{r} \tilde{\omega}^x + \frac{\cos \theta}{r} \tilde{\omega}^y,$$

e vale guardar a assimetria, que não depende de dimensão nem de coordenadas: **os vetores de base são as colunas da matriz direta; as 1-formas de base são as linhas da inversa**. Conferir é imediato — por exemplo $\tilde{\omega}^\theta(\vec{e}_\theta) = -\frac{\sin \theta}{r}(-r \sin \theta) + \frac{\cos \theta}{r}(r \cos \theta) = 1$. e daí $|\tilde{\omega}^r| = 1$ e $|\tilde{\omega}^\theta| = 1/r$. Compare com $|\vec{e}_\theta| = r$: onde a seta de base é longa, as folhas da 1-forma de base são raras, e o produto dos dois comprimentos é sempre 1. É a Seção 3.1.2 de volta, agora com uma base que muda de lugar para lugar.

3.8.2 Uma base genuinamente oblíqua

Agora a segunda maneira de sair da base ortonormal: os eixos deixarem de ser perpendiculares. Em Minkowski isso aparece nas coordenadas de cone de luz do [Conteúdo extra](#) deste capítulo.

Antes disso, um exemplo tentador que *não* serve. Os eixos inclinados t' e x' de um diagrama de Minkowski (Figura 1.3 do Capítulo 1) parecem uma base oblíqua, e não são: a inclinação é artefato de desenhar Minkowski numa folha euclidiana. Um *boost* leva base ortonormal em base ortonormal, e a métrica calculada na base de S' dá de volta $\eta_{\mu\nu}$, sem termos cruzados — é o item 2 do Conteúdo extra que manda verificar isso. Obliquidade de verdade em Minkowski exige uma base que *não* esteja ligada à original por uma transformação de Lorentz.

Dada uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ qualquer, um mesmo vetor $\vec{V}$ admite duas decomposições naturais e geometricamente distintas:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= V^i \vec{e}_i & (\text{regra do paralelogramo}), \\ V_i &= \vec{V} \cdot \vec{e}_i & (\text{projecção sobre cada eixo}). \end{aligned}$$

As componentes contravariantes V^i respondem à pergunta “quanto de cada vetor de base preciso somar para reconstruir $\vec{V}$?”. As componentes covariantes V_i respondem a uma pergunta diferente: “qual é a projecção de $\vec{V}$ ao longo de cada eixo?”. As duas só coincidem quando a base é ortonormal.

Um cuidado com a palavra “projecção”. O produto $\vec{V} \cdot \vec{e}_i$ é o comprimento da projecção *multiplicado* por $|\vec{e}_i|$, e só é a projecção medida com régua quando os

vetores de base têm comprimento 1. Na Figura 3.6, $|\vec{e}_2| = 1,08$: a projeção de $\vec{V}$ sobre aquele eixo mede 1,32, enquanto a componente covariante vale $V_2 = 1,42$.

É aqui que a base dual da Seção 3.2 deixa de ser um detalhe formal. As componentes covariantes são as componentes de $\vec{V}$ na base dual:

$$\vec{V} = V_i \vec{e}^i, \quad \vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j,$$

onde $\vec{e}^i$ é o vetor que a métrica associa à 1-forma $\tilde{\omega}^i$. A condição $\tilde{\omega}^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j$ vira $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j$, e é ela que explica a figura: como $\vec{e}^1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, o eixo recíproco $\vec{e}^1$ é perpendicular a $\vec{e}_2$, e não paralelo a $\vec{e}_1$. Numa base ortonormal os dois conjuntos coincidem, as duas decomposições viram a mesma e não há o que notar. É essa base recíproca que o programa da Seção 3.12 constrói.

Base oblíqua: duas maneiras de decompor o mesmo vetor V

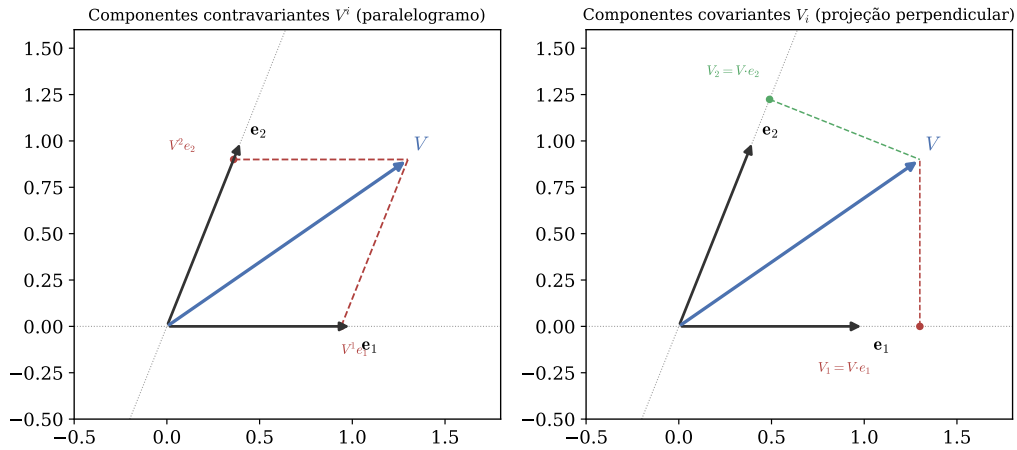


Figura 3.6. O mesmo vetor $\vec{V}$, na mesma base oblíqua $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, decomposto de duas maneiras. À esquerda, a regra do paralelogramo dá as componentes contravariantes V^i . À direita, a projeção perpendicular sobre cada eixo, medida em unidades de $|\vec{e}_i|$, dá as componentes covariantes $V_i = \vec{V} \cdot \vec{e}_i$. Numericamente, com $\vec{e}_1$ de componentes $(1, 0)$, $\vec{e}_2$ de $(0, 4, 1)$ e $\vec{V}$ de $(1, 3, 0, 9)$: $V^1 = 0,94$, $V^2 = 0,9$, mas $V_1 = 1,3$, $V_2 = 1,42$.

3.9 Derivada de um tensor

Falta uma operação, e é a que abre o resto do curso: derivar.

Em coordenadas de Minkowski a resposta é a mais simples possível. Derivar as componentes de um tensor acrescenta um índice *embaixo* e produz outro tensor:

$$\partial_\alpha T^{\mu\nu} \quad \text{é um tensor de tipo } (2, 1).$$

A razão é a mesma que fez do gradiente uma 1-forma — ∂_α transforma com $\Lambda^\beta_{\alpha'}$

— combinada com o fato de que os coeficientes Λ são *constantes* numa transformação de Lorentz, e portanto passam intactos pela derivada:

$$\partial_{\alpha'} T^{\mu' \nu'} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} \partial_{\beta} T^{\rho \sigma}.$$

Cada índice recebeu o seu fator, que é exatamente a lei de transformação de um tensor $(2, 1)$.

ONDE SE ERRA

Guarde a frase “os coeficientes são constantes”, porque é ela que vai falhar. Em coordenadas curvilíneas — e, mais tarde, em espaço-tempo curvo, onde *nenhuma* escolha de coordenadas as torna constantes em toda parte — a matriz de transformação varia de ponto a ponto, e derivá-la produz termos extras. Aí $\partial_{\alpha} T^{\mu \nu}$ *deixa de ser um tensor*, e é preciso corrigi-lo: essa correção é a derivada covariante, e os termos extras são os símbolos de Christoffel. Todo o Capítulo 6 sai daí. Por ora, aproveite a simplicidade — ela é a última.

3.10 Problemas orientados

1. **Contrações possíveis.** Dado $T^{\mu \nu}$, A_{μ} e B^{μ} , liste todas as contrações escalares que podem ser formadas com um único T , um A e um B . Explique quais expressões deixam índices livres.
2. **Unicidade da decomposição.** A Seção 3.5 afirma que a separação $M_{\mu \nu} = M_{(\mu \nu)} + M_{[\mu \nu]}$ é única. Demonstre: se $M_{\mu \nu} = S_{\mu \nu} + A_{\mu \nu}$ com S simétrico e A antissimétrico, então necessariamente $S_{\mu \nu} = M_{(\mu \nu)}$ e $A_{\mu \nu} = M_{[\mu \nu]}$. (Sugestão: troque $\mu \leftrightarrow \nu$ e some; depois subtraia.) Em seguida confirme a contagem $16 = 10 + 6$ exibindo quais entradas são independentes em cada parte.
3. **Traço invariante.** Use a lei de transformação de um tensor misto T^{μ}_{ν} para mostrar que T^{μ}_{μ} não depende da base.
4. **Gradiente de um invariante.** Seja $f = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$, o intervalo até a origem. (a) Calcule a 1-forma $\partial_{\mu} f$ e depois $\partial^{\mu} f$ com (3.7); explique por que o sinal da componente temporal muda. (b) Mostre que $\partial^{\mu} f$ é ortogonal às superfícies $f = \text{const}$, no sentido de que $\partial_{\mu} f V^{\mu} = 0$ para todo $\vec{V}$ tangente a uma delas. (c) Sobre o cone de luz $f = 0$, mostre que $\partial^{\mu} f$ é ele próprio um vetor *nulo* — de modo que ali “a normal está contida na superfície”, coisa que nenhuma superfície euclidiana faz. Essa esquisitice é o que caracteriza um horizonte, e reaparece no Capítulo 10.
5. **Produto externo.** Dados dois vetores A^{μ} e B^{ν} , construa $A^{\mu} B^{\nu}$. Separe sua parte simétrica e antissimétrica.

6. **Checagem de equações.** Verifique se as expressões $A_\mu = B_\mu + C_\mu$, $A^\mu B_\mu = C^\nu D_\nu$ e $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$ são tensorialmente consistentes.

3.11 Exemplos resolvidos adicionais

Exemplo 3.2. Abaixamento de índices. Seja $V^\mu = (3, 2, 0, 0)$ em Minkowski com assinatura $(-, +, +, +)$. Então

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = (-3, 2, 0, 0).$$

A norma é

$$V^\mu V_\mu = -9 + 4 = -5.$$

O vetor é temporal. Se fosse quadrimomento, corresponderia a uma partícula massiva com massa invariante $\sqrt{5}$.

Exemplo 3.3. Contração de tensor antissimétrico. Se $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ e $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$, então

$$F_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = F_{\nu\mu} S^{\nu\mu} = -F_{\mu\nu} S^{\nu\mu} = -F_{\mu\nu} S^{\mu\nu}.$$

Logo a contração é igual ao seu negativo e, portanto, vale zero.

Exemplo 3.4. Transformação de uma 1-forma. Em duas dimensões, tome $x' = 2x$ e $y' = y$ — apenas uma troca de unidade no eixo x . O vetor de base acompanha pela inversa,

$$\vec{e}_{x'} = \Lambda^{\nu}_{x'} \vec{e}_\nu = \frac{1}{2} \vec{e}_x,$$

porque agora basta meio $\vec{e}_x$ para avançar uma unidade de x' . Tome a 1-forma $\tilde{W} = \tilde{\omega}^x$, de componentes $(1, 0)$ no sistema original. Pela definição de componente,

$$W_{x'} = \tilde{W}(\vec{e}_{x'}) = \frac{1}{2} \tilde{W}(\vec{e}_x) = \frac{1}{2}.$$

A componente da 1-forma encolheu pelo mesmo fator que o vetor de base, enquanto a componente de um vetor *dobrou* ($V^{x'} = 2V^x$). É essa oposição que preserva $W_\mu V^\mu$: um fator sobe, o outro desce, e o produto sobrevive.

Exemplo 3.5. Tensor como máquina multilinear. Um tensor $T_{\mu\nu}$ recebe dois vetores e devolve um número:

$$T(\vec{A}, \vec{B}) = T_{\mu\nu} A^\mu B^\nu.$$

Se fixamos apenas o segundo vetor, obtemos uma 1-forma:

$$\alpha_\mu = T_{\mu\nu} B^\nu.$$

Essa leitura ajuda a lembrar que contração parcial reduz o tipo tensorial do ob-

jeto.

Exemplo 3.6. Um tensor sendo transformado de verdade. Os exemplos acima são identidades algébricas. Este é a lei de transformação em ação, e o resultado é um dos mais bonitos da física. O tensor eletromagnético tem, num referencial S , as componentes $F_{i0} = E_i$ e $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

antissimétrica, como a Seção 3.5 pedia — seis entradas independentes para seis números de campo.

Sendo de tipo $(0,2)$, cada índice recebe um fator da matriz inversa: $F_{\mu'\nu'} = \Lambda^\alpha_{\mu'} \Lambda^\beta_{\nu'} F_{\alpha\beta}$, que em forma matricial é $F' = \Lambda^T F \Lambda$. Para um *boost* de velocidade v ao longo de x , o produto devolve

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma(E_z + vB_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + vE_z), & B'_z &= \gamma(B_z - vE_y). \end{aligned}$$

As componentes ao longo do *boost* não mudam; as transversais se misturam, e se misturam *entre* $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

O caso limpo é o campo puramente elétrico $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ com $\mathbf{B} = 0$. Em S' ,

$$\mathbf{E}' = (0, \gamma E, 0), \quad \mathbf{B}' = (0, 0, -\gamma v E).$$

Apareceu campo magnético onde não havia nenhum, só por trocar de referencial. É neste sentido preciso que o magnetismo é a eletricidade vista de um referencial em movimento — e é por isso que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ separados *não* podem ser tensores, enquanto $F_{\mu\nu}$ é. Perguntar “qual é o campo magnético” sem dizer o referencial é tão malposto quanto perguntar “qual é a componente x ” sem dizer os eixos.

Como conferência, o escalar $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$ tem de valer o mesmo nos dois referenciais: em S dá $-2E^2$, e em S' , $2(\gamma^2 v^2 E^2 - \gamma^2 E^2) = -2\gamma^2 E^2(1 - v^2) = -2E^2$.

3.12 Resolução numérica

As identidades deste capítulo são de álgebra linear/tensorial pura – não dependem de nenhuma física específica – e por isso se prestam bem a verificação por computador com números ou símbolos genéricos, em vez de um único exemplo à mão. Esta seção trata três problemas: (i) construir a base dual de uma base oblíqua e confirmar a biortogonalidade $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j$, reproduzindo os números da Figura 3.6; (ii) confirmar a decomposição simétrica/antissimétrica e a identidade do item 2 para tensores genéricos; (iii) confirmar a invariância do traço (item 3) sob uma mudança de base arbitrária, não apenas sob transformações de Lorentz. Os scripts completos estão em código/.

3.12.1 Python

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap03_tensores.py`

Base dual de uma base oblíqua, decomposição simétrica/antissimétrica e invariância do traço.

Dois pontos merecem destaque. Primeiro, a base dual $\vec{e}^i$ é recuperada por $\vec{e}^i = g^{ij}\vec{e}_j$ – a mesma operação de “subir índice” com a métrica que já usamos para passar de V_μ a V^μ , agora aplicada aos próprios vetores de base. Segundo, a invariância do traço é testada sob matrizes *L aleatórias e não ortogonais* – não apenas rotações ou boosts –, o que deixa claro que a invariância do traço é uma propriedade de $GL(n)$ (qualquer mudança de base linear), mais geral que a invariância de Lorentz usada nos capítulos anteriores.

3.12.2 Mathematica

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap03_tensores.wl`

As mesmas identidades com entradas simbólicas livres, válidas para quaisquer valores.

Diferentemente do script em Python, aqui as entradas de F , S , T e L são símbolos livres, não números sorteados: o Simplify resultando em 0 é uma prova de que a identidade vale para *quaisquer* valores das entradas, não uma checagem para uma amostra. Essa é a vantagem do cálculo simbólico para resultados de álgebra tensorial pura como os deste capítulo – ele entrega exatamente o tipo de afirmação “para todo tensor $M_{\mu\nu}$ ” que os Problemas orientados pedem para demonstrar à mão.

3.13 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 3.1. FÁCIL Schutz §3.8

Sejam $W_\mu = (-2, 1, 0, 0)$ as componentes de uma 1-forma e $V^\mu = (3, 2, 1, 0)$ as de um vetor, em coordenadas de Minkowski. Calcule $\tilde{W}(\vec{V}) = W_\mu V^\mu$. Em seguida obtenha W^μ e V_μ com a métrica, e verifique que $W^\mu V_\mu$ dá o mesmo número.

Exercício 3.2. FÁCIL Schutz §3.7

Classifique cada expressão como escalar, vetor, 1-forma, tensor de ordem dois ou expressão mal escrita, justificando pelos índices livres: $T^{\mu\nu} A_\nu$, $T^\mu{}_\mu$, $A_\mu B_\mu$, $R_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$, $A^\mu = B_\mu$, $T^{\mu\nu} A_\mu B_\nu C^\rho$.

Exercício 3.3. MÉDIO Schutz §3.4

Considere a mudança de coordenadas $x' = x + \alpha t$, $t' = t$ (uma transformação de Galileu). (a) Calcule $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$ e escreva a lei de transformação das componentes de um vetor e de uma 1-forma. (b) Mostre explicitamente que $W_\mu V^\mu$ é invariante sob essa transformação, *embora* ela não preserve o intervalo. (c) O que isso ensina sobre a diferença entre invariância de contração e invariância métrica?

Exercício 3.4. MÉDIO Schutz §3.8

O tensor eletromagnético do Exemplo 3.6 tem componentes $F_{i0} = E_i$ e $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$. (a) Confirme, contando, que a antissimetria reduz as dezesseis entradas de $F_{\mu\nu}$ aos seis números de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, e escreva $F^{\mu\nu}$ com os dois índices em cima. (b) Calcule o escalar $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ e mostre que vale $2(B^2 - E^2)$. (c) Um campo é puramente elétrico em um referencial. Usando o invariante, determine se pode existir outro referencial em que ele seja puramente magnético, e sob que condição.

Exercício 3.5. DIFÍCIL Schutz §3.5

Um tensor $T^{\mu\nu}$ é simétrico. (a) Mostre que a decomposição $T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p h^{\mu\nu} + 2q^{(\mu} U^{\nu)} + \pi^{\mu\nu}$, com $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu$, $q^\mu U_\mu = 0$, $\pi^{\mu\nu} U_\nu = 0$ e $\pi^\mu{}_\mu = 0$, é sempre possível dado um observador U^μ , e que ela é única. (b) Identifique o significado físico de ρ , p , q^μ e $\pi^{\mu\nu}$ para esse observador. (c) Conte os graus de liberdade dos dois lados e verifique que fecham em dez.

3.14 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **Os dois invariantes do campo eletromagnético.** Estenda `cap03_tensores.py` para montar $F_{\mu\nu}$ (com a convenção do Exemplo 3.6) a partir de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ dados e calcular $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$. Depois, para um campo com $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$, procure numericamente o boost que torna $\mathbf{E}$ paralelo a $\mathbf{B}$. Mostre que ele existe sempre que o segundo invariante é não nulo, e que não existe para uma onda plana.
2. **Uma base genuinamente oblíqua em Minkowski.** Comece por uma armadilha: adapte a figura de `cap03_figuras.py` para os eixos t' e x' de um boost com $v = 0,5$ e calcule a métrica *nessa* base, $g_{\mu'\nu'} = \vec{e}_{\mu'} \cdot \vec{e}_{\nu'}$. Você vai obter exatamente $\eta_{\mu\nu}$ — os eixos de S' parecem oblíquos no papel, mas são *ortonormais* em Minkowski. A inclinação é artefato de desenhar uma geometria de Minkowski numa folha euclidiana, e não obliquidade de verdade: um boost leva base ortonormal em base ortonormal.

Para obter obliquidade real, troque para as coordenadas de *cone de luz*, $u = t - x$ e $w = t + x$. Mostre que agora

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou seja} \quad ds^2 = -du dw,$$

com a diagonal *nula*: os dois vetores de base são vetores nulos, cada um ortogonal a si mesmo — exatamente a esquisitice que a Seção 2.2 anunciou e que nenhuma base euclidiana pode exibir. Desenhe as duas decomposições de um quadrivetor nessa base, obtenha V_u e V_w a partir de V^u e V^w , e explique por que aqui subir e descer índices *troca as componentes de lugar* em vez de apenas trocar um sinal.

3. **Quando a base quase degenera.** Em `cap03_tensores.py`, faça o ângulo entre $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ tender a zero e acompanhe o número de condição da matriz da métrica e o erro numérico na recuperação da base dual. Faça um gráfico do erro contra o ângulo e explique por que referenciais ortonormais são preferíveis em qualquer cálculo numérico.

LEITURA EXTRA • VETORES SÃO DERIVADAS, 1-FORMAS SÃO DIFERENCIAIS

Boa parte da literatura moderna escreve os objetos deste capítulo com outros símbolos:

$$\vec{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \tilde{\omega}^\mu = dx^\mu.$$

Não é troca de nome por gosto. É uma identificação que faz várias contas do capítulo virarem regra da cadeia — e o resto desta página existe para mostrar onde ela poupa trabalho.

Aviso de notação. Só aqui dentro dx^μ significa a 1-forma de base, e não o deslocamento do Capítulo 2. É a convenção do Misner, do Carroll e do Wald, e é a que você vai encontrar ao ler qualquer coisa além desta apostila; da próxima seção em diante voltamos a $\tilde{\omega}^\mu$.

Por que um vetor pode ser uma derivada. Um vetor num ponto é determinado por aquilo que ele faz com funções: ele as deriva na sua direção. Dado $\vec{V}$ de componentes V^μ e uma função f ,

$$\vec{V}(f) = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu},$$

que é a derivada direcional de sempre. Escrever $\vec{V} = V^\mu \partial_\mu$ é só registrar isso. E do outro lado,

$$df(\vec{V}) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu(\vec{V}) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} V^\mu,$$

o mesmo número. As duas leituras da Seção 3.1 — “o gradiente é uma 1-forma” e “um vetor deriva ao longo de si” — são um fato só, visto de dois lados.

A dualidade sai em uma linha. A condição (3.4), que na Seção 3.2 exigiu um parágrafo de justificativa, aqui é uma derivada parcial:

$$dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu.$$

As coordenadas são independentes entre si; não há mais nada a provar.

A lei de transformação é a regra da cadeia. Os dois comportamentos opostos que a Seção 3.1 deduziu comparando matrizes viram uma linha cada:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \implies \vec{e}_{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'} \vec{e}_\nu, \quad dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu \implies \tilde{\omega}^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu \tilde{\omega}^\nu.$$

Repare que as duas matrizes aparecem sozinhas, uma em cada, e que são a mesma regra da cadeia lida nos dois sentidos. Não há o que memorizar: quem transforma com Λ e quem transforma com a inversa é decidido por onde o índice está no quociente de derivadas.

Onde isso poupa trabalho de verdade: mudar de coordenadas. A Seção 3.8.1 obteve a métrica das polares calculando os vetores de base e depois seus produtos es-

calares. Com diferenciais, basta substituir e multiplicar. De $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$,

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

e então

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

porque os termos cruzados se cancelam. Saíram $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$ e $g_{r\theta} = 0$ de uma vez, em três linhas, sem calcular base nenhuma. É assim que todo mundo converte métrica na prática.

E a base dual das polares sai igualmente rápido, diferenciando as funções coordenadas $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctan(y/x)$:

$$dr = \cos \theta dx + \sin \theta dy, \quad d\theta = -\frac{\sin \theta}{r} dx + \frac{\cos \theta}{r} dy,$$

que são exatamente os $\tilde{\omega}^r$ e $\tilde{\omega}^\theta$ daquela seção — agora *derivados*, e não conferidos contra a definição.

Um caso em que a economia é grande. O item 2 do Conteúdo extra pede a métrica nas coordenadas de cone de luz $u = t - x$ e $w = t + x$. Pelo caminho da Seção 3.8.1 seria preciso montar a base, inverter e contrair. Com diferenciais são duas linhas:

$$du dw = (dt - dx)(dt + dx) = dt^2 - dx^2 = -ds^2,$$

logo $ds^2 = -du dw$, e comparando com $ds^2 = 2g_{uw} du dw$ sai $g_{uw} = -\frac{1}{2}$ — que é a resposta que o exercício cobra.

A colisão de notação, e por que ela sobrevive. A caixa da Seção 3.2 avisou que dx^μ já significava o deslocamento. Os dois sentidos convivem na literatura por uma razão específica, e vale vê-la: aplicando a 1-forma de base ao vetor deslocamento $d\vec{x} = dx^\nu \vec{e}_\nu$,

$$dx^\mu(d\vec{x}) = dx^\nu \delta^\mu_\nu = dx^\mu.$$

O resultado é o próprio símbolo. A 1-forma de base devolve a componente μ do deslocamento, então usar o mesmo nome para as duas coisas quase nunca produz conta errada — e é por isso que o abuso pegou. Os dois objetos, porém, são de tipos diferentes: um é uma máquina linear, o outro é aquilo que ela come.

Para ler adiante. O Schutz enuncia essa identificação de passagem na Seção 5.2 — “a visão moderna é que um vetor é a tangente a alguma curva” — e segue adiante sem construir nada sobre ela. Quem quiser o desenvolvimento:

- Bernard Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1980. O *outro* livro do mesmo autor, e o lugar onde ele desenvolve o que o *First Course* só menciona. Capítulo 2 para vetores como derivadas, capítulo 4 para formas. É o ponteiro mais natural para quem já está lendo o Schutz.
- Sean Carroll, *Spacetime and Geometry*, capítulo 2. Adota $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$ e $\hat{\theta}^{(\mu)} = dx^\mu$ sem cerimônia, e usa isso o livro inteiro. A exposição mais curta e mais direta

da lista.

- Misner, Thorne e Wheeler, *Gravitation*. É de onde vem a imagem da 1-forma como pilha de superfícies da Seção 3.1.1, e o tratamento é o mais visual que existe — ao custo de um livro de mil e tantas páginas.
- Robert Wald, *General Relativity*, capítulo 2. A versão rigorosa: o vetor tangente é *definido* como uma derivação, e a identificação deixa de ser analogia para virar definição.
- Theodore Frankel, *The Geometry of Physics*. Escrito para físicos, cuidadoso justamente com as armadilhas de notação desta página.
- Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*. Curto, clássico, e anterior a toda a relatividade: é onde a diferencial de uma função vira um objeto de pleno direito, e não uma quantidade pequena.

Fluidos relativísticos

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Construir o tensor energia-momento a partir de uma pergunta elementar — quantas partículas há aqui, e para onde elas vão — e chegar ao fluido perfeito, que é a fonte de gravidade usada em praticamente toda aplicação astrofísica da relatividade geral. Ao final, o estudante deve saber ler cada componente de $T^{\mu\nu}$ como um fluxo, justificar sua simetria e obter as equações de Euler relativísticas de $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

LEITURA ORIENTADA

Este é o capítulo mais abstrato da primeira metade do curso, e vale dizer por quê. Até aqui, todo objeto novo tinha um análogo newtoniano imediato: quadrivelocidade é velocidade, quadrimomento é momento. O tensor energia-momento não tem: ele reúne, em um único objeto, coisas que a física newtoniana trata como não relacionadas — densidade de massa, densidade de momento, fluxo de energia e pressão. A dificuldade não é técnica, é de reorganização mental.

A estratégia aqui é subir um degrau de cada vez. Começamos contando partículas, que é concreto; descobrimos que densidade e fluxo são o mesmo objeto visto de ângulos diferentes; e só então repetimos o argumento trocando “número de partículas” por “energia e momento”. Quem entender bem a Seção 4.4 terá entendido o capítulo inteiro: o resto é a mesma ideia aplicada a uma grandeza mais rica.

4.1 O que é um fluido

Um **contínuo** é uma coleção de partículas tão numerosa que não faz sentido acompanhar cada uma. Abandonamos a descrição individual e ficamos com médias: número de partículas por unidade de volume, densidade de energia, densidade de momento, pressão, temperatura. O comportamento de um lago não depende de onde está uma molécula de água em particular.

Mas essas médias variam de ponto a ponto — a pressão no fundo do lago é maior que na superfície. Isso levanta a pergunta central da aproximação de con-

tínuo: *sobre quantas partículas devemos tirar média?* A coleção precisa ser grande o bastante para que a partícula individual não importe, e pequena o bastante para que dentro dela tudo seja homogêneo. Uma coleção assim se chama **elemento** de fluido.

Exemplo 4.1. Existe elemento? Três casos. A aproximação de contínuo só vale se houver uma janela entre a escala microscópica e a escala em que as grandezas variam. Compare:

- *Ar ao nível do mar.* Livre caminho médio ~ 70 nm, $n \sim 2,5 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$. Um cubo de $1 \mu\text{m}$ de lado contém $2,5 \times 10^7$ moléculas e é minúsculo comparado com qualquer escala de variação. A janela é enorme: o contínuo funciona muito bem.
- *Interior de uma estrela de nêutrons.* $n \sim 10^{44} \text{ m}^{-3}$; um cubo de 1 fm de lado já contém $\sim 10^{-1}$ nêutrons, mas um de $1 \mu\text{m}$ contém 10^{26} , e a estrela tem 10 km. De novo há janela de sobra.
- *Gás intergaláctico.* $n \sim 1 \text{ m}^{-3}$ e escalas de variação de megaparsecs. Um elemento precisa ter anos-luz de lado para conter partículas suficientes — e ainda assim é pequeno frente ao problema. Funciona, mas por pouco.

Onde a janela não existe — um gás muito rarefeito em um aparato de laboratório, por exemplo — a descrição de fluido simplesmente não se aplica, e é preciso voltar à cinética.

Cada elemento carrega consigo um referencial: o **MCRF** (*momentarily comoving reference frame*), o referencial inercial que naquele instante acompanha o elemento. É a mesma construção feita para partículas no Capítulo 3, e ela é o que permite definir grandezas *próprias* do fluido.

RESULTADO CENTRAL

Toda grandeza escalar do fluido — densidade própria de número, densidade própria de energia, pressão, temperatura — é *definida no MCRF*. É isso que a torna um escalar: não é “a densidade medida por alguém”, é “a densidade medida por quem acompanha o elemento”. Qualquer observador calcula o mesmo número para ela, ainda que meça uma densidade diferente em seu próprio referencial.

Falta distinguir fluido de sólido. Dois elementos vizinhos exercem força um sobre o outro através da interface comum. Essa força pode ter uma componente *perpendicular* à interface — é o empurra-e-puxa que chamamos de pressão — e uma componente *paralela* a ela, que impede um elemento de deslizar sobre o outro. É essa segunda que dá rigidez. Um **fluido** é um contínuo em que as forças de deslizamento são fracas; um **fluido perfeito** é aquele em que elas são exatamente

nulas, restando só a pressão.

ONDE SE ERRA

A divisão entre sólido e fluido não é nítida, e não precisa ser. Sob pressão suficiente quase todo sólido escoar — o manto terrestre é rocha e se comporta como fluido em escalas de milhões de anos. O que a definição acima faz não é classificar substâncias, e sim isolar a *única* propriedade que vai entrar na física: se há ou não força paralela à interface. Guarde essa pergunta; ela reaparecerá como a condição que anula as componentes fora da diagonal de $T^{\mu\nu}$.

4.2 Poeira: densidade e fluxo

O fluido mais simples possível chama-se **poeira**: uma coleção de partículas que estão todas em repouso em algum referencial. Sem pressão, sem movimento térmico, sem interação. É pouco realista e pedagogicamente perfeito.

A densidade depende de quem mede

Seja n o número de partículas por unidade de volume medido no MCRF. Em um referencial $\bar{O}$ no qual as partículas se movem com velocidade v , o número de partículas é o mesmo, mas o volume que elas ocupam não: a contração de Lorentz encolhe a dimensão paralela ao movimento por $1/\gamma$ e deixa as transversas intactas. Logo

$$n_{\bar{O}} = \gamma n = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (4.1)$$

Fluxo através de uma superfície

A segunda pergunta natural é: quantas partículas atravessam uma dada superfície, por unidade de área e de tempo? Isso é o **fluxo**. Ele depende do referencial (área e tempo são conceitos dependentes de referencial) e da orientação da superfície — uma superfície paralela à velocidade não é atravessada por ninguém.

Tome em $\bar{O}$ uma superfície S perpendicular a $\bar{x}$, de área ΔA , e um intervalo $\Delta \bar{t}$. Atravessam S nesse intervalo todas as partículas — e somente elas — que estejam a uma distância menor que $v^{\bar{x}} \Delta \bar{t}$ de S , do lado de trás. Essas partículas ocupam um paralelepípedo de volume $v^{\bar{x}} \Delta \bar{t} \Delta A$, e a densidade ali é γn . O número que atravessa é $\gamma n v^{\bar{x}} \Delta \bar{t} \Delta A$, e portanto

$$(\text{fluxo})^{\bar{x}} = \gamma n v^{\bar{x}}. \quad (4.2)$$

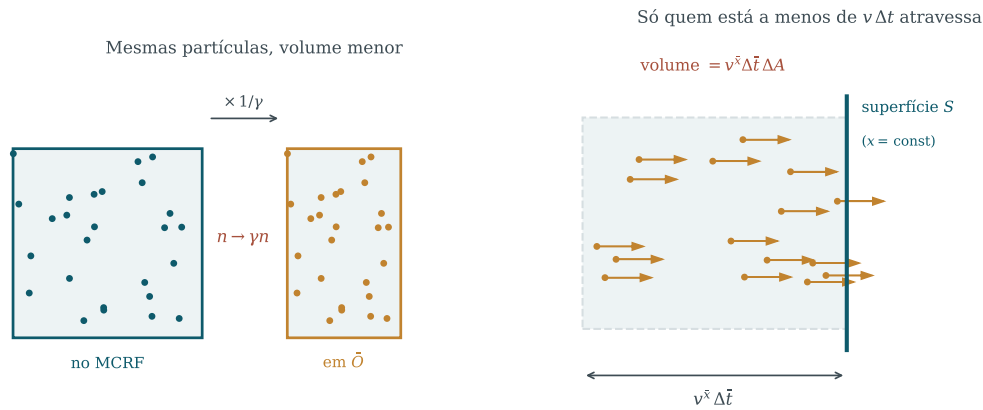


Figura 4.1. À esquerda, a origem de (4.1): as mesmas partículas, o mesmo número, ocupando um volume menor. À direita, a construção do fluxo: em um intervalo $\Delta\bar{t}$, atravessam a área ΔA exatamente as partículas contidas no paralelepípedo de altura $v^{\bar{x}}\Delta\bar{t}$ — as demais não chegam a tempo.

ONDE SE ERRA

Note que só a componente $v^{\bar{x}}$ entra em (4.2). Se as partículas também tiverem velocidade em $\bar{y}$, o paralelepípedo fica inclinado, mas sua *altura na direção x* continua sendo $v^{\bar{x}}\Delta\bar{t}$ — e volume de paralelepípedo é área da base vezes altura. Deslocamento paralelo à superfície não faz ninguém atravessá-la.

4.3 O vetor fluxo de número

Olhe para (4.1) e (4.2) lado a lado:

$$n_{\bar{O}} = \gamma n, \quad (\text{fluxo})^{\bar{i}} = \gamma n v^{\bar{i}}.$$

Isso é exatamente o padrão $\gamma(1, v)$ da quadrivelocidade. Definimos então o **vetor fluxo de número**

$$N^{\mu} = n U^{\mu}, \quad (4.3)$$

cujas componentes em qualquer referencial são

$$N^0 = \gamma n = \text{densidade de número}, \quad N^i = \gamma n v^i = \text{fluxo na direção } i. \quad (4.4)$$

RESULTADO CENTRAL

Densidade e fluxo não são duas grandezas: são a componente temporal e as componentes espaciais de *um* quadrivetor. A física pré-relativística era

obrigada a tratar o fluxo como um vetor tridimensional dependente do referencial, e a densidade como um escalar à parte. A relatividade os funde — exatamente como fundiu energia e momento em p^μ . Este é o tipo mais fundamental de progresso conceitual: duas noções aparentemente distintas viram uma só.

A norma de N^μ devolve a densidade própria:

$$N^\mu N_\mu = n^2 U^\mu U_\mu = -n^2, \quad n = \sqrt{-N^\mu N_\mu}. \quad (4.5)$$

Ou seja, n é um *escalar*, do mesmo modo que a massa de repouso é um escalar embora a energia dependa do observador. Adotaremos essa convenção para todas as grandezas do fluido: o símbolo sem adorno é sempre o valor no MCRF.

4.4 Densidade é um fluxo temporal

Aqui está a ideia que organiza o capítulo, e vale ler devagar.

Desenhe as linhas de mundo das partículas em um diagrama espaço-tempo. O fluxo através da superfície $\bar{x} = \text{const}$ é o número de linhas de mundo que cruzam essa superfície por unidade de tempo e de área — isto é, por unidade de *volume tridimensional* $\Delta\bar{t} \Delta\bar{y} \Delta\bar{z}$ da superfície.

Agora repare que nada obriga esse volume tridimensional a conter a direção temporal. Tome, em vez dele, a fatia $\bar{t} = \text{const}$ e conte as linhas de mundo que a cruzam por unidade de volume $\Delta\bar{x} \Delta\bar{y} \Delta\bar{z}$. Mas cruzar uma fatia de tempo constante é simplesmente *estar lá naquele instante*: esse número é a densidade.

RESULTADO CENTRAL

Densidade é um fluxo: o fluxo através de uma superfície de tempo constante. Essa é a razão profunda de N^0 e N^i serem componentes do mesmo objeto, e não uma coincidência algébrica. Uma vez aceito isso, a estrutura de todo o resto do capítulo — e do tensor energia-momento — fica previsível.

4.5 1-formas, superfícies e o fluxo invariante

Falta dizer, de modo independente de coordenadas, o que é “a superfície” atravessada. A resposta usa a linguagem do Capítulo 3: uma superfície é descrita por uma 1-forma.

Uma superfície é o lugar geométrico de $\varphi(t, x, y, z) = \text{const}$ para alguma função φ . O gradiente $d\varphi$ é uma 1-forma, e ela determina a superfície: as direções

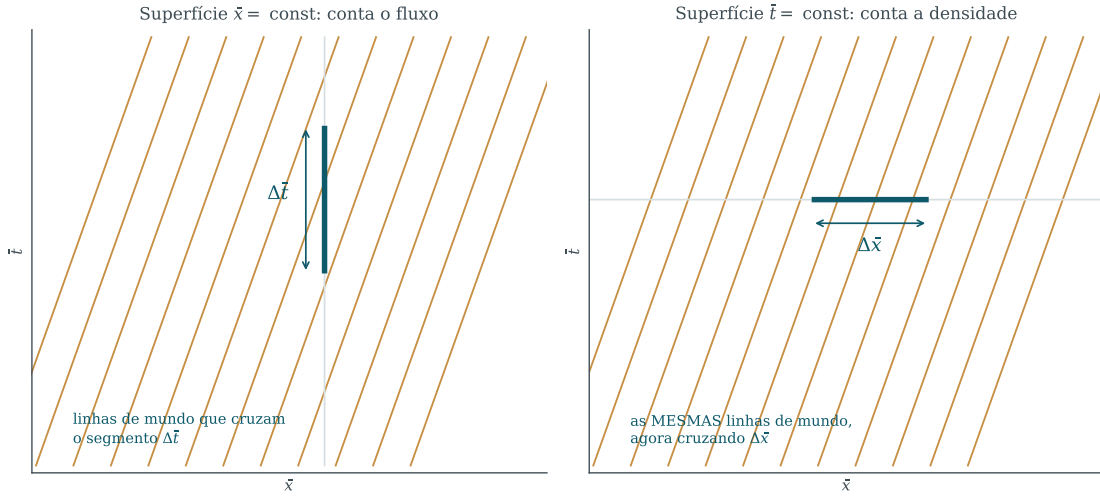


Figura 4.2. As mesmas linhas de mundo, contadas de duas maneiras. À esquerda, quantas cruzam um pedaço da superfície $\bar{x} = \text{const}$: isso é o fluxo. À direita, quantas cruzam um pedaço da superfície $\bar{t} = \text{const}$: isso é a densidade. Uma única operação — contar linhas de mundo que atravessam uma hipersuperfície — produz as duas grandezas, dependendo apenas de qual hipersuperfície se escolhe.

tangentes a ela são exatamente as direções V^μ com $d\varphi(V) = 0$. Como qualquer múltiplo de $d\varphi$ define a mesma superfície, normalizamos (para superfícies não nulas):

$$\tilde{n} = \frac{d\varphi}{|d\varphi|}, \quad |d\varphi| = |\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi|^{1/2}. \quad (4.6)$$

ONDE SE ERRA

O símbolo $\tilde{n}$ da 1-forma normal e o símbolo n da densidade própria não têm nada em comum — é um acidente histórico infeliz que ambos usem a letra n . Mantemos a notação porque é a da literatura, mas o til é obrigatório.

Com isso, o fluxo através da superfície é simplesmente

$$\text{fluxo através de } \varphi = \text{const} = \tilde{n}(N) = n_\mu N^\mu \quad (4.7)$$

Vale conferir os dois casos da seção anterior, que é o que torna a fórmula convincente:

Exemplo 4.2. As duas contas, de uma vez. Para a superfície $\bar{x} = \text{const}$ tome $\varphi = \bar{x}$. Então $\partial_\mu \varphi = (0, 1, 0, 0)$ e $|d\varphi| = |\eta^{xx}|^{1/2} = 1$, de modo que $\tilde{n}$ tem componentes $(0, 1, 0, 0)$ e

$$\tilde{n}(N) = n_\mu N^\mu = N^{\bar{x}} = \gamma n v^{\bar{x}},$$

que é o fluxo (4.2). Para a superfície $\bar{t} = \text{const}$ tome $\varphi = \bar{t}$; então $\partial_\mu \varphi = (1, 0, 0, 0)$, $|\mathrm{d}\varphi| = |\eta^{tt}|^{1/2} = 1$, e

$$\tilde{n}(N) = N^{\bar{t}} = \gamma n,$$

que é a densidade (4.1). Uma única expressão, $n_\mu N^\mu$, produz as duas — é a Figura 4.2 escrita em símbolos.

4.6 Conservação do número de partículas

Se partículas não são criadas nem destruídas, a variação do número dentro de um volume tem de ser igual ao que entra menos o que sai pela fronteira. Em componentes, isso é

$$\partial_\mu N^\mu = 0. \quad (4.8)$$

Vale ver que (4.8) é a equação de continuidade que já se conhece. Escrevendo as componentes com (4.4),

$$\partial_t(\gamma n) + \partial_i(\gamma n v^i) = 0,$$

que, no limite $v \ll 1$ (onde $\gamma \rightarrow 1$), vira $\partial_t n + \nabla \cdot (nv) = 0$ — a forma newtoniana. A versão relativística não é uma equação nova; é a mesma, escrita de modo que todo observador escreva a mesma coisa.

RESULTADO CENTRAL

Uma lei de conservação, na linguagem tensorial, é sempre a mesma frase: a divergência de um fluxo se anula. O conteúdo físico está em *qual* grandeza está sendo transportada. Aqui é o número de partículas; adiante será energia e momento, e a estrutura da equação não mudará.

4.7 O tensor energia-momento

Agora repetimos tudo trocando “número de partículas” por “energia e momento”. A diferença é que número de partículas é um escalar, enquanto energia-momento é um quadrivetor — e por isso o objeto que descreve seu fluxo tem um índice a mais.

RESULTADO CENTRAL

Definição. A componente $T^{\alpha\beta}$ do tensor energia-momento é o fluxo da componente α do quadrimomento através de uma superfície de x^β constante.

Leia essa definição duas vezes. O primeiro índice diz *qual* componente do

momento está sendo transportada; o segundo diz *através de qual superfície*. É a mesma estrutura de N^μ , com um índice extra para dizer de qual das quatro componentes de p^μ estamos falando.

O caso da poeira

Para poeira de partículas de massa de repouso m , cada partícula carrega $p^\alpha = mU^\alpha$, e o fluxo de partículas é $N^\beta = nU^\beta$. O fluxo de p^α é então o produto:

$$T^{\alpha\beta} = m U^\alpha N^\beta = m n U^\alpha U^\beta = \rho U^\alpha U^\beta, \quad \rho \equiv mn, \quad (4.9)$$

onde ρ é a densidade própria de energia (para poeira, só massa de repouso). No MCRF, a única componente não nula é $T^{00} = \rho$: nenhuma energia flui, nenhum momento existe, nenhuma tensão atua. Poeira em repouso é o objeto mais simples que gravita.

Os quatro blocos

Para um fluido qualquer, avalie $T^{\alpha\beta}$ no MCRF e separe os índices em temporal e espaciais. Saem quatro blocos com significados distintos:

componente	nome	o que é
T^{00}	densidade de energia	energia por unidade de volume
T^{0i}	fluxo de energia	energia atravessando a superfície i ; no MCRF só pode vir de <i>condução de calor</i>
T^{i0}	densidade de momento	momento por unidade de volume; no MCRF as partículas não têm momento líquido, mas energia em trânsito carrega momento
T^{ij}	tensões	fluxo da componente i do momento através da superfície j ; é a força por unidade de área entre elementos vizinhos

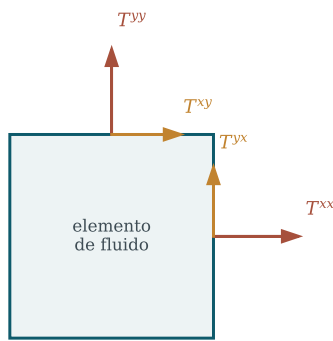
ONDE SE ERRA

T^{0i} e T^{i0} parecem a mesma coisa e não são: um é fluxo de *energia*, o outro é densidade de *momento*. Que eles acabem iguais é um resultado a ser demonstrado, não uma definição — e a demonstração é o argumento de torque da Seção 4.8. Em teorias mais gerais (com spin, por exemplo) o tensor energia-momento pode não ser simétrico.

4.8 Tensões e a simetria do tensor

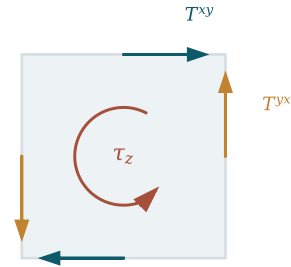
As componentes espaciais merecem atenção porque são as menos intuitivas. Considere dois elementos vizinhos com interface comum S de área A . O elemento A exerce sobre B uma força F . Como força é taxa de variação de momento — e no MCRF as velocidades são nulas, então a lei de Newton vale —, dizer que A empurra B com força F é dizer que A despeja momento em B à taxa F . Há, portanto, um *fluxo de momento* através de S igual a F/A . Se S é uma superfície de x^j constante, esse fluxo é precisamente T^{ij} .

As componentes espaciais são forças por área



a face de normal x recebe as duas componentes:
 T^{xx} é pressão, T^{yx} é cisalhamento

O torque obriga T^{ij} a ser simétrico



$\tau_z = \ell^3 (T^{xy} - T^{yx})$ e $I \propto \ell^5$.
se $T^{xy} \neq T^{yx}$, a rotação diverge quando $\ell \rightarrow 0$

Figura 4.3. À esquerda, as componentes espaciais como forças por unidade de área sobre as faces de um elemento: na face de normal x , a componente T^{xx} é perpendicular (pressão) e T^{yx} é paralela (cisalhamento). À direita, o argumento que força a simetria: as componentes fora da diagonal produzem um torque que não se cancela.

RESULTADO CENTRAL

Por que $T^{ij} = T^{ji}$. Tome um elemento cúbico de lado ℓ e calcule o torque em torno do eixo z . A força sobre a face de normal x é $F_{(x)}^i = T^{ix} \ell^2$; a sobre a face de normal y é $F_{(y)}^i = T^{iy} \ell^2$. Cada uma age a uma distância $\ell/2$ do centro, e as faces opostas contribuem igualmente. O torque resultante é

$$\tau_z = \ell^3 (T^{xy} - T^{yx}).$$

Agora compare com o momento de inércia do elemento, que escala como $I \propto \rho \ell^5$. A aceleração angular seria

$$\dot{\omega} = \frac{\tau_z}{I} \propto \frac{\ell^3}{\ell^5} = \frac{1}{\ell^2} \xrightarrow{\ell \rightarrow 0} \infty.$$

Um elemento arbitrariamente pequeno giraria com aceleração angular arbitrariamente grande, o que é absurdo. Logo $T^{xy} = T^{yx}$, e o mesmo para os outros pares.

Como a simetria foi demonstrada em um referencial (o MCRF) e $T^{\alpha\beta}$ é um tensor, ela vale em todos. O argumento para $T^{0i} = T^{i0}$ é análogo e usa o fato de que energia em movimento carrega momento na mesma proporção.

4.9 Fluidos gerais: energia interna e a primeira lei

Poeira só tem energia de repouso. Um fluido de verdade tem também energia interna: agitação térmica, energia de ligação, energia de excitação. Escreve-se

$$\rho = \rho_0 (1 + \Pi), \quad \rho_0 = mn, \quad (4.10)$$

onde Π é a energia interna *por unidade de massa de repouso*. A densidade de energia total ρ é o que gravita; ρ_0 é apenas a parte de massa de repouso.

A primeira lei da termodinâmica, aplicada a um elemento que troca calor e realiza trabalho, é $\Delta E = \Delta Q - p \Delta V$. Com N partículas fixas no elemento, $V = N/n$ e $E = \rho V$, um cálculo direto leva a

$$n \Delta q = \Delta \rho - \frac{\rho + p}{n} \Delta n, \quad (4.11)$$

com $q = Q/N$ o calor por partícula. Definindo temperatura e entropia específica pelo fator integrante da forma diferencial do lado direito, isso vira $\Delta q = T \Delta S$.

RESULTADO CENTRAL

Repare na combinação $\rho + p$ que aparece em (4.11). Ela não é um acidente de álgebra: é a mesma combinação que aparecerá no tensor do fluido perfeito e, adiante, nas equações de Euler relativísticas, onde faz o papel de *densidade de inércia*. Em relatividade, a pressão contribui para a inércia — e, por consequência, para a gravidade. Guarde isso; é a diferença conceitual mais importante deste capítulo em relação à física newtoniana.

4.10 O fluido perfeito

Agora impomos a definição da Seção 4.1: um fluido perfeito não tem forças de deslizamento nem condução de calor. As consequências sobre $T^{\alpha\beta}$ no MCRF são imediatas:

- *Sem condução de calor* $\Rightarrow T^{0i} = T^{i0} = 0$.
- *Sem forças paralelas às interfaces* $\Rightarrow T^{ij} = 0$ para $i \neq j$: as forças são todas perpendiculares às faces.
- *Isotropia* $\Rightarrow$ as três componentes diagonais são iguais, e ao valor comum chamamos pressão: $T^{ij} = p \delta^{ij}$.

No MCRF, portanto,

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Falta escrever isso de forma independente de referencial. Procuramos uma combinação de $U^\alpha U^\beta$ e $\eta^{\alpha\beta}$ que reproduza (4.12) no MCRF, onde $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. A resposta é

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p) U^\alpha U^\beta + p \eta^{\alpha\beta} \quad (4.13)$$

e a verificação é de uma linha: no MCRF, a componente 00 vale $(\rho + p)(1)(1) + p(-1) = \rho$, e cada componente ii vale $0 + p(+1) = p$. Como os dois lados de (4.13) são tensores e coincidem em um referencial, coincidem em todos.

ONDE SE ERRA

Em relatividade geral basta trocar $\eta^{\alpha\beta}$ por $g^{\alpha\beta}$, e a expressão continua valendo — localmente, em cada ponto. Esse é o padrão que se repetirá em todo o curso: escreva a física no referencial local em que ela é simples, ponha em forma tensorial, e a versão curva se obtém trocando a métrica.

4.11 Conservação: continuidade e Euler

A lei dinâmica do fluido é a conservação local de energia e momento,

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.14)$$

que são quatro equações. Vale extrair o que elas dizem. Substituindo (4.13),

$$\partial_\alpha [(\rho + p) U^\alpha U^\beta] + \partial^\beta p = 0.$$

Projeção ao longo do movimento: a equação de energia

Contraia com U_β , lembrando que $U^\beta U_\beta = -1$ e portanto $U_\beta \partial_\alpha U^\beta = 0$:

$$U^\alpha \partial_\alpha \rho + (\rho + p) \partial_\alpha U^\alpha = 0. \quad (4.15)$$

O primeiro termo é a variação de ρ seguindo o elemento; o segundo é o trabalho de expansão. É a primeira lei da termodinâmica em forma de campo.

Projeção perpendicular: as equações de Euler

O que sobra, projetado ortogonalmente a U^β , é

$$(\rho + p) U^\alpha \partial_\alpha U^\beta = -(\eta^{\beta\nu} + U^\beta U^\nu) \partial_\nu p. \quad (4.16)$$

Esta é a **equação de Euler relativística**. O operador $h^{\beta\nu} = \eta^{\beta\nu} + U^\beta U^\nu$ é o projetor sobre o espaço ortogonal a U : ele garante que só o gradiente de pressão *transversal ao movimento* acelera o fluido, como tem de ser.

RESULTADO CENTRAL

Compare (4.16) com a Euler newtoniana, $\rho (\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p$. A estrutura é idêntica, com uma única diferença: onde Newton tem ρ , a relatividade tem $\rho + p$. A pressão contribui para a *inércia* do fluido. Um gás muito quente é mais difícil de acelerar que um gás frio de mesma densidade de massa, e a diferença não é a energia térmica somada à massa — é a pressão. No limite $p \ll \rho$ a distinção desaparece, e é por isso que a física newtoniana nunca precisou dela.

4.12 Equações de estado

As equações (4.8), (4.15) e (4.16) não fecham o problema: há mais incógnitas (ρ , p , n , U^μ) que equações. Falta uma relação constitutiva, a **equação de estado**, que diga como a pressão responde à densidade. A forma mais simples é

$$p = w\rho, \quad (4.17)$$

com w constante. Três valores dominam as aplicações:

w	componente	justificativa
0	poeira fria	partículas sem movimento térmico apreciável: $p \ll \rho$
1/3	radiação	o tensor energia-momento eletromagnético tem traço nulo, e $T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p$
-1	constante cosmológica	pressão negativa; produz expansão acelerada

Exemplo 4.3. Radiação, sem estatística. O traço do tensor de um fluido perfeito

é

$$T^\mu{}_\mu = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U_\mu + p \delta^\mu{}_\mu = -(\rho + p) + 4p = -\rho + 3p.$$

Para o campo eletromagnético, o tensor energia-momento tem traço identicamente nulo. Igualando, $p = \rho/3$. Nenhuma hipótese sobre distribuição de velocidades, nenhuma integral sobre modos: a equação de estado da radiação sai de uma propriedade algébrica.

ONDE SE ERRA

Causalidade impõe um limite ao quanto a pressão pode crescer com a densidade. A velocidade do som é $c_s^2 = dp/d\rho$, e exigir $c_s \leq 1$ dá $w \leq 1$. Equações de estado com $w > 1$ propagariam perturbações mais rápido que a luz — e por isso a matéria em estrelas de nêutrons, onde p chega a frações apreciáveis de ρ , é um laboratório para o limite de rigidez da matéria.

4.13 Lei de Gauss em quatro dimensões

A forma diferencial $\partial_\mu N^\mu = 0$ tem uma contrapartida integral, e é ela que dá o significado físico. O teorema de Gauss em quatro dimensões diz que, para qualquer região Ω do espaço-tempo com fronteira $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \partial_\mu N^\mu d^4x = \oint_{\partial\Omega} N^\mu n_\mu d^3S. \quad (4.18)$$

Se a divergência é nula, o fluxo total através da fronteira é zero.

Escolha para Ω um cilindro no espaço-tempo: uma região espacial V fixa, entre os instantes t_1 e t_2 . A fronteira tem três pedaços — a tampa em t_2 , a tampa em t_1 e a lateral. Pelo que vimos na Seção 4.4, a integral sobre cada tampa é o número de partículas dentro de V naquele instante, e a integral sobre a lateral é o número que atravessou a fronteira espacial no intervalo. A Equação (4.18) vira então

$$N(t_2) - N(t_1) = -(\text{número que saiu por } \partial V),$$

que é a conservação do número de partículas escrita como todo mundo espera.

RESULTADO CENTRAL

Repare no que a linguagem quadridimensional fez: “o que havia antes”, “o que há depois” e “o que atravessou a fronteira” deixaram de ser três coisas distintas e viraram três pedaços da *mesma* integral sobre a fronteira de uma região do espaço-tempo. A mesma construção, aplicada a $T^{\mu\nu}$, dará a conservação de energia e momento — e é ela que, no Capítulo 8, vai exigir que

o lado geométrico das equações de campo tenha divergência nula.

4.14 Por que isso importa para a relatividade geral

Vale fechar dizendo para onde este capítulo aponta. Nas equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

o objeto construído aqui é *a fonte da gravidade*. Três consequências merecem registro desde já.

1. **A fonte não é a massa.** É o tensor inteiro. Densidade de energia, densidade de momento, fluxo de energia e tensões gravitam todos. A massa newtoniana é apenas o pedaço T^{00} no limite de campo fraco e velocidades pequenas.
2. **Pressão gravita.** A combinação $\rho + 3p$ aparecerá na equação que governa a aceleração da expansão cósmica e no interior de estrelas relativísticas. Em uma estrela de nêutrons, a pressão que sustenta a estrela também contribui para o peso que ela tem de sustentar — e é essa realimentação que produz uma massa máxima, coisa que a física newtoniana não prevê.
3. **A conservação não é opcional.** A identidade geométrica $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ força $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. As equações de campo não apenas permitem a conservação local: elas a exigem. O movimento do fluido não é uma hipótese à parte, está contido nas equações de campo.

ONDE SE ERRA

Uma limitação honesta: em espaço-tempo curvo, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ é uma lei *local*. Ela não produz, em geral, uma energia total conservada para o sistema inteiro — isso exigiria uma simetria temporal que um espaço-tempo genérico não tem. Voltaremos a esse ponto no Capítulo 8; por ora, basta notar que “energia se conserva” é uma frase que, em relatividade geral, precisa ser qualificada.

4.15 Exemplos resolvidos adicionais

Exemplo 4.4. Poeira em movimento, componente por componente. Uma poeira de densidade própria de energia ρ move-se com velocidade v na direção x .

Sua quadrivelocidade é $U^\mu = \gamma(1, v, 0, 0)$, e de (4.9) vem $T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$, isto é

$$T^{\mu\nu} = \gamma^2 \rho \begin{pmatrix} 1 & v & 0 & 0 \\ v & v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vale ler cada entrada:

- $T^{00} = \gamma^2 \rho$. Dois fatores de γ , e não um: a energia de cada partícula cresce por γ e a densidade de partículas cresce por γ (contração de Lorentz). É a mesma conta de (4.1), agora aplicada à energia.
- $T^{0x} = \gamma^2 \rho v$ é o fluxo de energia; T^{x0} é a densidade de momento. Que sejam iguais é a simetria demonstrada na Seção 4.8.
- $T^{xx} = \gamma^2 \rho v^2$. Cuidado: isso *não* é pressão. Poeira não tem pressão — no MCRF, $T^{ij} = 0$. Esta entrada é puro transporte de momento pelo movimento coletivo, e desaparece se voltarmos ao MCRF.

A lição é que “pressão” é o valor de T^{ij} no MCRF, não em um referencial qualquer. Confundir os dois é o erro mais comum do capítulo.

Exemplo 4.5. Por que a fonte newtoniana é a densidade de massa. Tome um fluido perfeito com $v \ll 1$ e $p \ll \rho$, e estime a ordem de grandeza de cada bloco de (4.13), restaurando os fatores de c :

$$T^{00} \sim \rho c^2, \quad T^{0i} \sim \rho c v, \quad T^{ij} \sim \rho v^2 + p.$$

As razões entre eles são $T^{0i}/T^{00} \sim v/c$ e $T^{ij}/T^{00} \sim v^2/c^2$. Para a Terra em órbita, $v/c \approx 10^{-4}$: o bloco de densidade de momento é dez mil vezes menor que o de energia, e o de tensões, cem milhões de vezes. Sobra T^{00} sozinho, e a fonte da gravidade newtoniana é a densidade de massa.

Isso responde a uma pergunta natural — se o tensor inteiro gravita, por que Newton só precisou da massa? — e ao mesmo tempo diz onde procurar desvios: em sistemas com v/c apreciável ou com p comparável a ρ .

Exemplo 4.6. A radiação cósmica de fundo como fluido. A CMB é um corpo negro a $T_0 = 2,725$ K. Sua densidade de energia é $\varepsilon = a T_0^4$, com $a = 7,566 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$.

$$\varepsilon = 7,566 \times 10^{-16} \times (2,725)^4 \approx 4,17 \times 10^{-14} \text{ J m}^{-3},$$

e a pressão, por $p = \varepsilon/3$, vale $1,39 \times 10^{-14}$ Pa. Para comparação, a densidade de energia da matéria hoje é da ordem de $2 \times 10^{-10} \text{ J m}^{-3}$ — cerca de cinco mil vezes maior.

Mas $\rho_r \propto a^{-4}$ e $\rho_m \propto a^{-3}$, de modo que a razão cresce como $(1+z)$ para trás no tempo. As duas se igualam em $1+z \approx 5 \times 10^3$, que é a ordem de grandeza correta da igualdade matéria–radiação. Um fluido com pressão de 10^{-14} Pa dominou a dinâmica do Universo inteiro — porque o que gravita não é a pressão isolada, e sim a densidade de energia.

Exemplo 4.7. Quanto pesa a pressão. Em uma estrela de nêutrons, p/ρ chega a 0,1 perto do centro. Pela equação de Euler relativística (4.16), a densidade de inércia é $\rho + p$, e não ρ : acelerar aquele material custa 10% a mais do que a densidade de massa faria supor.

O efeito reaparece, com sinal desfavorável, na estrutura estelar. A equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff, que o Capítulo 10 deduzirá, contém a combinação $(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)$: a pressão aparece duas vezes do lado que *aumenta* o peso a sustentar. Uma estrela newtoniana sempre encontra equilíbrio aumentando a pressão; uma estrela relativística não, porque a pressão que ela gera também gravita. É dessa realimentação, e não de nenhum limite de material, que nasce a existência de uma massa máxima.

4.16 Problemas orientados

1. **Poeira em movimento.** Para uma poeira com densidade própria ρ e velocidade v na direção x , calcule explicitamente os componentes T^{00} , T^{0x} e T^{xx} em Minkowski.

2. **Traço do fluido perfeito.** Mostre que

$$T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p.$$

Aplique o resultado a poeira, radiação e constante cosmológica.

3. **Limite não relativístico.** Assuma $p \ll \rho$ e $v \ll 1$. Identifique os termos dominantes de $T^{\mu\nu}$ e explique por que a fonte newtoniana é aproximadamente a densidade de massa.

4. **Conservação de partículas.** Partindo de $N^\mu = nU^\mu$, escreva $\partial_\mu N^\mu = 0$ em um referencial onde o fluido tem velocidade ordinária v .

5. **Pressão como fluxo.** Explique por que $T^{xx} = p$ no referencial comóvel significa fluxo de momento x através de uma superfície normal a x . Use colisões microscópicas com uma parede como imagem física.

6. **Som de um fluido.** Para uma equação de estado $p = p(\rho)$, a velocidade do som relativística satisfaz $c_s^2 = dp/d\rho$. Discuta por que causalidade sugere $c_s \leq 1$.

4.17 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 4.1. FÁCIL Schutz §4.7

Um fluido perfeito tem densidade própria ρ e pressão p . Escreva a matriz $T^{\mu\nu}$ no referencial de repouso e calcule o traço $T^\mu{}_\mu$. Aplique o resultado a poeira ($p = 0$), radiação ($p = \rho/3$) e constante cosmológica ($p = -\rho$), comentando o sinal em cada caso.

Exercício 4.2. FÁCIL Schutz §4.2

Uma poeira tem densidade própria de número n e quadrivelocidade U^μ . (a) Escreva o vetor fluxo de número N^μ . (b) Em um referencial onde a poeira se move com velocidade v na direção x , calcule N^0 e N^x e interprete cada um. (c) Verifique que $N^\mu N_\mu = -n^2$ é invariante e explique por que N^0 sozinho não é.

Exercício 4.3. MÉDIO Schutz §4.6

A conservação local é $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. (a) Escreva a componente $\nu = 0$ para um fluido perfeito em movimento lento e mostre que ela se reduz à equação de continuidade newtoniana. (b) Escreva a componente $\nu = i$ e mostre que ela reproduz a equação de Euler, identificando o termo de pressão. (c) Onde aparece, nas duas, a diferença entre ρ e $\rho + p$?

Exercício 4.4. MÉDIO Schutz §4.5

Considere um gás de fótons em equilíbrio. (a) Use o fato de o tensor energia-momento eletromagnético ter traço nulo para concluir $p = \rho/3$ sem nenhum argumento estatístico. (b) A partir de $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$ com $p = w\rho$, mostre que $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. (c) Separe, no caso da radiação, a potência que vem da diluição de volume da que vem do redshift de cada fóton.

Exercício 4.5. DIFÍCIL Schutz §4.9

Uma casca esférica fina de poeira, de massa própria total M e raio $R(t)$, colapsa sob a própria gravidade em regime newtoniano. (a) Escreva $T^{\mu\nu}$ da casca. (b) Usando a conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ integrada sobre um volume que contenha a casca, obtenha a equação de movimento para $R(t)$. (c) Discuta que hipótese do tratamento newtoniano falha quando $2GM/Rc^2 \rightarrow 1$, antecipando o Capítulo 10.

4.18 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **Até onde a pressão pode ir.** Em `cap03_tensores.py`, monte $T^{\mu\nu}$ de um fluido perfeito em repouso e, para cada observador com quadrivelocidade u^μ , calcule o vetor fluxo de energia que ele mede,

$$J^\mu = -T^\mu{}_\nu u^\nu.$$

Sorteie alguns milhares de observadores com velocidades aleatórias e teste se J^μ é sempre causal, isto é, $J \cdot J \leq 0$. Varie p com ρ fixo e descubra numericamente a fronteira: a energia é vista fluindo de modo causal por *todos* os observadores exatamente quando $|p| \leq \rho$ — e para $|p| > \rho$ aparecem observadores que medem energia se propagando mais rápido que a luz.

Essa é a *condição de energia dominante*, e ela não aparece nesta apostila. Compare com o limite $c_s \leq 1$ da Seção 4.12, que restringe a *inclinação* $dp/d\rho$: são dois limites distintos, um sobre a equação de estado e outro sobre o próprio $T^{\mu\nu}$. Qual dos dois é violado primeiro por um fluido com $p = 1,2\rho$?

2. **O fluido perfeito visto de outro referencial.** Adapte `cap03_tensores.py` para montar $T^{\mu\nu}$ de um fluido perfeito com ρ e p dados e depois aplicar um boost de velocidade v . Verifique numericamente que os autovalores de $T^\mu{}_\nu$ não mudam e que o autovetor temporal é a quadrivelocidade transformada. Confirme que T^{0i} deixa de ser nulo, embora nenhuma propriedade intrínseca do fluido tenha mudado.
3. **Radiação de verdade.** Monte, no mesmo script, o tensor energia-momento de uma onda eletromagnética plana, $T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$. Verifique numericamente que seu traço é nulo e que ele tem um autovetor *nulo* — e não temporal, como o fluido perfeito. Discuta por que essa é a assinatura de um fluido com $w = 1/3$ sem referencial de repouso.

Da gravidade à curvatura

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Preparar a transição conceitual: gravidade não é uma força em um palco fixo, mas manifestação da geometria do espaço-tempo.

5.1 O princípio da equivalência

Localmente, um campo gravitacional uniforme pode ser eliminado pela escolha de um referencial em queda livre. Essa afirmação não diz que a gravidade desaparece globalmente. Gradientes do campo gravitacional, isto é, efeitos de maré, não podem ser removidos em uma região finita.

RESULTADO CENTRAL

O conteúdo físico da curvatura está nos efeitos de maré. A conexão pode ser zerada em um ponto por uma escolha de coordenadas; o tensor de curvatura não.

Por que o espaço-tempo não pode ser plano

O princípio da equivalência faz mais do que permitir simplificar contas: ele *obriga* a geometria a ser curva. O argumento é de Schutz (Seção 5.1 do livro) e cabe em uma figura — vale a pena, porque é ele que justifica todo o resto do curso.

O ingrediente. Considere uma torre estática de altura h na superfície da Terra, onde a aceleração da gravidade é g . Um átomo na base emite luz de frequência ν , que é recebida no topo com frequência ν' menor: a luz *perde* energia ao subir. Para $gh \ll c^2$,

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \frac{gh}{c^2}. \quad (5.1)$$

Isso não é especulação — é o experimento de Pound e Rebka (1959), feito numa torre de 22,5 m em Harvard, onde $gh/c^2 \approx 2,5 \times 10^{-15}$, e medido com essa pre-

cisão. E (5.1) sai do próprio princípio da equivalência: no referencial em queda livre não há gravidade nenhuma, mas o topo da torre está subindo em relação a ele, e a luz que chega lá sofre Doppler comum, com a velocidade que o topo adquiriu no tempo h/c de voo.

O argumento. Agora desenhe o diagrama de espaço-tempo do experimento (Figura 5.1), com o tempo na vertical e a altura na horizontal. As linhas de mundo da base e do topo são duas retas verticais: a torre não se move. Emita da base *duas* cristas de onda sucessivas, separadas por $\Delta t_{\text{base}} = 1/\nu$. Cada uma sobe e é recebida no topo; as duas recepções ficam separadas por $\Delta t_{\text{topo}} = 1/\nu'$. As quatro linhas — duas verticais e duas de luz — fecham um quadrilátero.

Suponha, por absurdo, que a geometria fosse a de Minkowski. Nada nesse experimento depende de *quando* ele é feito: a torre é estática e o campo é o mesmo a toda hora. Então a linha de mundo da segunda crista é simplesmente a da primeira *transladada no tempo* — as duas são congruentes. Mas uma translação no tempo preserva intervalos de tempo, e portanto os dois lados verticais do quadrilátero teriam de ser iguais:

$$\Delta t_{\text{topo}} = \Delta t_{\text{base}}.$$

E não são. Por (5.1), $\nu' < \nu$, logo $\Delta t_{\text{topo}} > \Delta t_{\text{base}}$: o quadrilátero *não fecha*.

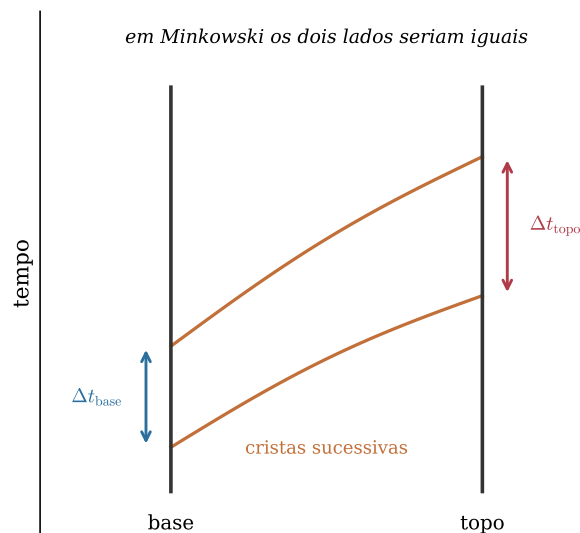


Figura 5.1. O experimento da torre em um diagrama de espaço-tempo. As duas verticais são as linhas de mundo da base e do topo; as duas curvas são cristas de onda sucessivas subindo. Se a geometria fosse a de Minkowski, a segunda crista seria a primeira apenas transladada no tempo, e os dois lados verticais teriam de medir o mesmo. O redshift diz que o de cima é maior. O efeito está *muito* exagerado no desenho: numa torre de laboratório ele é de uma parte em 10^{15} .

Em Minkowski, dois lados construídos assim são forçosamente iguais; a natureza diz que não são.

RESULTADO CENTRAL

A conclusão é inescapável: se o redshift gravitacional existe — e ele foi medido —, então a geometria do espaço-tempo **não** é a de Minkowski. Não se trata de escolher coordenadas ruins: nenhuma escolha de coordenadas muda se dois lados de um quadrilátero são iguais.

ONDE SE ERRA

Note o que o argumento *não* usa: nenhuma equação de campo, nenhum tensor de curvatura, nem sequer a expressão de Γ . Ele usa apenas o princípio da equivalência, um experimento de mesa e a geometria de um quadrilátero. É por isso que vale antes de qualquer maquinaria — e é por isso que a curvatura, quando aparecer, não será uma hipótese elegante, e sim a única saída disponível.

5.2 Coordenadas curvilíneas

Mesmo no plano euclidiano, coordenadas polares produzem símbolos de Christoffel não nulos. Com

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2,$$

os símbolos não nulos são

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r, \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}.$$

(A Seção 5.4 deduz a fórmula que os produz; a Atividade de lá refaz esta conta em três linhas.) Isso ensina uma lição importante: Christoffel não nulo não significa curvatura não nula. Ele pode ser apenas efeito de coordenadas — aqui, o plano euclidiano de sempre, visto por coordenadas que giram.

5.3 Bases coordenadas e bases não coordenadas

Há uma segunda armadilha nas coordenadas curvilíneas, e ela é responsável por boa parte da confusão entre o cálculo vetorial da graduação e a notação tensorial deste curso. A base natural associada a um sistema de coordenadas é a base *coordenada*, formada pelos vetores tangentes às curvas de coordenada:

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Essa base tem uma propriedade excelente — é ela que faz $V = V^\mu e_\mu$ com $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$ — e um defeito: ela em geral *não é ortonormal*. Em coordenadas polares,

$$e_r \cdot e_r = g_{rr} = 1, \quad e_\phi \cdot e_\phi = g_{\phi\phi} = r^2.$$

O vetor e_ϕ tem comprimento r , não 1, e seu comprimento muda de ponto a ponto.

A alternativa é a base *não coordenada* ortonormal, obtida normalizando:

$$e_{\hat{r}} = e_r, \quad e_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r} e_\phi, \quad \text{de modo que} \quad e_{\hat{i}} \cdot e_{\hat{j}} = \delta_{\hat{i}\hat{j}}.$$

Ela é chamada não coordenada porque não existe nenhum sistema de coordenadas cujas curvas tenham $e_{\hat{\phi}}$ como tangente. As componentes nas duas bases se relacionam por

$$V^{\hat{r}} = V^r, \quad V^{\hat{\phi}} = r V^\phi. \quad (5.2)$$

ONDE SE ERRA

Esta é a origem de um erro clássico. As fórmulas de divergência, gradiente e rotacional que o estudante decorou em cálculo vetorial estão escritas em componentes *ortonormais* $V^{\hat{i}}$, com unidades de V . As fórmulas tensoriais deste curso estão em componentes *coordenadas* V^μ , e V^ϕ tem unidades de $V/\text{comprimento}$. As duas expressões parecem diferir por fatores de r — e realmente diferem, porque não são a mesma coisa. Antes de comparar qualquer resultado com uma tabela de fórmulas, veja em qual das duas bases a tabela está escrita.

Um caso concreto aparece no Capítulo 6: a divergência em polares vale

$$\nabla_i V^i = \partial_r V^r + \frac{1}{r} V^r + \partial_\phi V^\phi \quad (\text{componentes coordenadas}),$$

enquanto o livro de cálculo vetorial traz

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \partial_r (r V^{\hat{r}}) + \frac{1}{r} \partial_\phi V^{\hat{\phi}} \quad (\text{componentes ortonormais}).$$

Substituindo a Equação (5.2) na segunda, as duas coincidem exatamente. Não há contradição: há duas bases.

Em relatividade geral, a versão quadridimensional dessa base ortonormal é a *tetrad*, retomada no Capítulo 7. Ela é o que converte componentes de uma carta arbitrária no que um aparelho realmente mede.

Atividade 5.1. Escreva $e_{\hat{\theta}}$ e $e_{\hat{\phi}}$ para a esfera de raio a , $d\ell^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$, e obtenha a relação entre $V^{\hat{\phi}}$ e V^ϕ . Onde essa relação degenera, e o que isso diz sobre a base coordenada nos polos?

5.4 Geodésicas e os símbolos de Christoffel

Uma partícula livre, no espaço plano, anda em linha reta — e “reta” quer dizer que ela não muda de direção. Numa geometria qualquer, a generalização se chama *geodésica*, e este é o capítulo em que ela e a conexão aparecem juntas, pela melhor razão possível: uma produz a outra.

O caminho mais curto até as duas é o princípio variacional. Entre dois eventos, a partícula livre extremiza o tempo próprio — que na Seção 1.5 já apareceu como o que o gêmeo inercial maximiza. Extremizar $\int d\tau$ é equivalente, e algebricamente muito mais cômodo, a extremizar a ação com a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (5.3)$$

onde o ponto é derivada em relação a um parâmetro λ .

RESULTADO CENTRAL

Dedução. As equações de Euler–Lagrange para (5.3) são

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = 0.$$

Os dois pedaços saem direto, lembrando que $g_{\mu\nu}$ depende de λ só através de $x(\lambda)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} = g_{\rho\nu} \dot{x}^\nu, \quad \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = \frac{1}{2} \partial_\rho g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

e a derivada total do primeiro traz um termo de cadeia:

$$g_{\rho\nu} \ddot{x}^\nu + \partial_\alpha g_{\rho\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu - \frac{1}{2} \partial_\rho g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu = 0. \quad (5.4)$$

Aqui está o passo que importa. O termo do meio tem $\partial_\alpha g_{\rho\nu}$ contraído com $\dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu$, que é *simétrico* em $\alpha \leftrightarrow \nu$. Uma contração com um objeto simétrico só enxerga a parte simétrica do outro fator, de modo que se pode trocar $\partial_\alpha g_{\rho\nu}$ pela sua própria simetrização sem alterar nada:

$$\partial_\alpha g_{\rho\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\alpha}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu.$$

Esse truque — simetrizar de graça o que está contraído com algo simétrico — aparece o curso inteiro; vale guardá-lo. Com ele, (5.4) vira

$$g_{\rho\nu} \ddot{x}^\nu + \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\nu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu = 0,$$

agora com os três termos na mesma forma. Multiplicando por $g^{\sigma\rho}$ e usando

$$g^{\sigma\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\sigma_\nu:$$

$$\ddot{x}^\sigma + \underbrace{\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\alpha g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\nu})}_{\Gamma^\sigma_{\alpha\nu}} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu = 0. \quad (5.5)$$

O parêntese não foi batizado por decreto: ele *apareceu*, como a única combinação capaz de fechar a conta. É a fórmula que o curso inteiro vai usar, e convém isolá-la:

RESULTADO CENTRAL

Símbolos de Christoffel.

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (5.6)$$

Com eles, a *equação geodésica* é (5.5):

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0.$$

Para partículas massivas pode-se tomar $\lambda = \tau$; para a luz, o tempo próprio é nulo ao longo da trajetória e usa-se outro parâmetro afim.

Três leituras de (5.6) valem o registro. *Primeira*: ela é simétrica nos dois índices de baixo, o que já era esperado — $\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ nunca poderia detectar uma parte antissimétrica. *Segunda*: Γ depende só da métrica e de suas primeiras derivadas, de modo que, uma vez escrita a métrica, não há mais nenhuma escolha a fazer. *Terceira*: onde a métrica é constante — em coordenadas cartesianas de Minkowski, por exemplo — todos os Γ se anulam e a geodésica vira $\ddot{x}^\sigma = 0$, a linha reta de sempre.

ONDE SE ERRA

Aplicar (5.6) sem pensar dá $4^3 = 64$ componentes em quatro dimensões, mas a simetria em $\mu\nu$ reduz a 40, e na prática a maioria se anula. Duas economias valem sempre: uma métrica *diagonal* mata todo termo com $g^{\sigma\rho}$ fora da diagonal, e uma coordenada da qual a métrica *não depende* zera toda derivada em relação a ela. Em Schwarzschild, as duas juntas deixam nove símbolos não nulos entre os quarenta.

Atividade 5.2. Confirme com (5.6) os símbolos da Seção 5.2, para $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$: $g_{rr} = 1$, $g_{\phi\phi} = r^2$, e a única derivada não nula é $\partial_r g_{\phi\phi} = 2r$. Verifique que sobram exatamente $\Gamma^r_{\phi\phi} = -r$ e $\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = 1/r$, e mais nada.

5.5 Christoffel não é força

É tentador interpretar $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ como força gravitacional, pois ele aparece na equação geodésica em uma posição parecida com aceleração. Essa interpretação é perigosa. Os símbolos de Christoffel não formam um tensor e podem ser anulados em um ponto por escolha adequada de coordenadas. Uma quantidade física local não deve depender desse tipo de escolha.

A maneira correta de ler a equação geodésica é: uma partícula livre mantém seu vetor tangente paralelamente transportado ao longo da própria trajetória. Em coordenadas curvilíneas, a mudança dos vetores de base introduz termos adicionais. Em uma geometria curva, termos semelhantes descrevem também a estrutura gravitacional local. A distinção entre efeito de coordenadas e efeito físico é feita pela curvatura.

5.6 Marés como sinal de curvatura

Imagine duas partículas em queda livre próximas uma da outra. Em um campo gravitacional uniforme ideal, elas mantêm separação constante em um referencial em queda livre. No campo real da Terra, duas partículas separadas radialmente tendem a se afastar, enquanto partículas separadas transversalmente tendem a se aproximar. Esse padrão é chamado efeito de maré.

Na linguagem relativística, marés são descritas por curvatura. A conexão pode ser removida em um ponto; diferenças da conexão em pontos vizinhos não podem ser removidas em uma região finita. Por isso a curvatura, e não a conexão, contém a parte observável da gravidade local.

Exemplo 5.1. Em coordenadas polares no plano, os símbolos de Christoffel são não nulos, mas se transportarmos um vetor ao longo de um pequeno circuito fechado e retornarmos ao ponto inicial, o vetor não sofre rotação líquida associada à curvatura do plano. Em uma esfera, o mesmo experimento produz uma diferença angular proporcional à área envolvida. Essa é uma manifestação geométrica da curvatura.

5.7 Problemas orientados

1. **Inversa da métrica polar.** Para $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$, escreva g_{ij} e g^{ij} . Use (5.6) para obter os símbolos não nulos, e confira com os valores da Seção 5.2.
2. **Geodésica radial.** Mostre que curvas com $\phi = \text{const}$ são geodésicas no plano polar. Interprete o resultado geometricamente.

3. **Círculos não são geodésicas.** Tome $r = R$ constante e $\phi = \lambda$. Substitua na equação geodésica e mostre que a equação radial não é satisfeita.
4. **Esfera unitária.** Para $d\ell^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, calcule $\Gamma_{\phi\phi}^\theta$ e $\Gamma_{\theta\phi}^\phi$.
5. **Grande círculos.** Use simetria para argumentar que o equador de uma esfera é geodésica. Depois verifique pela equação geodésica.
6. **Maré newtoniana.** Para $\Phi = -GM/r$, calcule qualitativamente as segundas derivadas radiais e transversais. Relacione-as a alongamento radial e compressão transversal.

5.8 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 5.1. FÁCIL Schutz §5.2

Em coordenadas polares no plano, $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$. (a) Escreva g_{ij} e g^{ij} . (b) Use (5.6) para obter $\Gamma^r_{\phi\phi}$ e $\Gamma^\phi_{r\phi}$. (c) Explique por que símbolos de Christoffel não nulos aqui não significam curvatura.

Exercício 5.2. FÁCIL Schutz §5.1

Um elevador em queda livre no campo da Terra tem altura h . (a) Estime a aceleração relativa entre um objeto no teto e outro no piso, usando a maré newtoniana $2GMh/r^3$. (b) Determine o maior h para que essa aceleração fique abaixo de $10^{-6}g$. (c) Enuncie, com base no resultado, em que sentido preciso o princípio da equivalência é *local*.

Exercício 5.3. MÉDIO Schutz §5.4

Para a esfera de raio a , $d\ell^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$. (a) Calcule todos os símbolos de Christoffel não nulos. (b) Escreva a equação geodésica e verifique que o equador ($\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$) a satisfaz. (c) Mostre que um paralelo com $\theta \neq \pi/2$ não é geodésica, identificando o termo que não se anula.

Exercício 5.4. MÉDIO Schutz §5.3

Uma geodésica pode ser obtida por princípio variacional a partir de $L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$. (a) Escreva as equações de Euler–Lagrange e mostre que elas reproduzem a equação geodésica com a conexão de Levi-Civita. (b) Use esse método para obter as geodésicas da métrica $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2$, identificando a quantidade conservada associada à independência de x . (c) Interprete-a fisicamente.

Exercício 5.5. DIFÍCIL Schutz §5.1

Considere a métrica bidimensional $ds^2 = -(1 + gz)^2 dt^2 + dz^2$, que descreve o espaço-tempo plano visto por um observador uniformemente acelerado. (a) Calcule os símbolos de Christoffel. (b) Mostre que o tensor de Riemann é identicamente nulo, confirmando que a métrica é plana. (c) Determine a trajetória de um raio de luz radial e mostre que ele leva tempo coordenado infinito para alcançar $z = -1/g$. Compare com o horizonte de Schwarzschild e diga o que é análogo e o que não é.

5.9 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **Rindler pela máquina de curvatura.** Baixe `cap06_curvatura.py` e aplique sua rotina `riemann` à métrica de Rindler, $ds^2 = -(ax)^2 dt^2 + dx^2$. Confirme que os símbolos de Christoffel são não nulos e que o tensor de Riemann se anula em toda parte, dentro do piso das diferenças finitas. Depois investigue o que acontece com Γ^t_{tx} quando $x \rightarrow 0$ e relacione com o horizonte.
2. **A holonomia de um cone.** Modifique a rotina transporta de `cap06_curvatura.py` para a métrica de um cone, $d\ell^2 = d\rho^2 + k^2 \rho^2 d\phi^2$ com $0 < k < 1$. Transporte um vetor em torno do vértice e mostre que a holonomia é $2\pi(1 - k)$, independente do raio do circuito. Como a curvatura pode ser nula em toda parte e a holonomia não? Onde está a curvatura?
3. **Quão grande pode ser o laboratório?** Escreva um script que calcule a aceleração de maré newtoniana entre topo e base de um laboratório em queda livre, em função da altura h , para a Terra, para a superfície do Sol e para $r = 10M$ de um buraco negro de $10 M_\odot$. Determine, em cada caso, o h máximo para que a maré fique abaixo de $10^{-6}g$. Tabule os três valores e discuta o que “local” significa em cada contexto.

Variedades, derivada covariante e curvatura

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Formalizar o cálculo tensorial em espaços-tempos curvos e obter os objetos geométricos que entram nas equações de Einstein.

6.1 Variedades e métricas

Uma variedade diferenciável é um espaço que, localmente, parece $\mathbb{R}^n$. O espaço-tempo da relatividade geral é uma variedade quadridimensional equipada com uma métrica lorentziana $g_{\mu\nu}$.

O elemento de linha é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Quando $g_{\mu\nu}$ depende da posição, a geometria muda de ponto a ponto.

6.2 Derivada covariante

Para um vetor,

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu V^\alpha.$$

Para uma 1-forma,

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \omega_\alpha.$$

O sinal muda porque a contração $\omega_\nu V^\nu$ deve ter derivada usual compatível.

Falta dizer *qual* conexão. Até aqui, Γ foi apenas um conjunto de coeficientes que corrige a derivada; nada obrigou a escolher um em particular. Duas exigências fixam a escolha:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho \quad (\text{torção nula}), \quad \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{compatibilidade métrica}).$$

A primeira diz que não há uma torção intrínseca girando vetores transportados; a segunda, que o transporte paralelo preserva comprimentos e ângulos — sem ela, medir com a métrica em dois pontos diferentes não teria sentido comum.

Escrevendo $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ nas três permutações dos índices e combinando-as (some duas, subtraia a terceira: a torção nula é o que permite os cancelamentos), obtém-se exatamente a expressão (5.6) que a Seção 5.4 já havia produzido por outro caminho:

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

Essa *conexão de Levi-Civita* é, portanto, a única compatível com as duas exigências. E a coincidência com o resultado variacional da Seção 5.4 não é acidente — é um teorema de duas linhas, que fecha as duas definições possíveis de “geodésica” numa só.

RESULTADO CENTRAL

Extremizar o tempo próprio é transportar paralelamente o próprio tangente. Seja $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$ o vetor tangente a uma curva. Transportá-lo paralelamente ao longo da própria curva significa $\nabla_U U = 0$, e essa condição, escrita em componentes, é

$$U^\mu \nabla_\mu U^\sigma = U^\mu (\partial_\mu U^\sigma + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} U^\nu).$$

O primeiro termo é a derivada de U^σ ao longo da curva — é a regra da cadeia lida ao contrário,

$$U^\mu \partial_\mu U^\sigma = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial U^\sigma}{\partial x^\mu} = \frac{dU^\sigma}{d\lambda} = \frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2}.$$

Logo

$$\nabla_U U = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0,$$

que é, letra por letra, a equação geodésica (5.5) obtida lá atrás extremizando $\int d\tau$.

As duas maneiras de dizer “a partícula vai reto” — *ela não muda de direção* e *ela leva o maior tempo próprio possível* — descrevem a mesma curva. A primeira é local e se escreve com a conexão; a segunda é global e se escreve com uma integral. Que coincidam é uma propriedade da conexão de Levi-Civita, não uma obviedade: se a conexão tivesse torção, ou não fosse compatível com a métrica, as duas famílias de curvas se separariam.

6.3 Curvatura

O tensor de Riemann mede a falha de derivadas covariantes em comutar:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu}V^\sigma.$$

Em componentes,

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}.$$

As contrações relevantes são

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

e o tensor de Einstein é

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$

RESULTADO CENTRAL

A identidade de Bianchi contraída implica

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0.$$

Essa propriedade geométrica antecipa a conservação local de energia e momento da matéria.

6.4 Compatibilidade métrica

A condição $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ afirma que o transporte paralelo preserva produtos escalares. Se dois vetores são transportados paralelamente ao longo de uma curva, o produto escalar entre eles permanece constante. Essa é uma exigência natural para uma conexão que deve representar a geometria determinada pela métrica.

Junto com torção nula, a compatibilidade métrica determina de modo único a conexão de Levi-Civita. Em relatividade geral padrão, essa é a conexão usada para definir geodésicas, curvatura e derivada covariante. Teorias mais gerais podem relaxar torção nula ou compatibilidade métrica, mas isso está além do curso introdutório.

6.5 Simetrias do tensor de Riemann

O tensor de Riemann possui várias simetrias. Com todos os índices abaixados,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Além disso, vale a primeira identidade de Bianchi,

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0.$$

Essas simetrias reduzem drasticamente o número de componentes independentes. Em quatro dimensões, o tensor de Riemann possui 20 componentes independentes, não 256. O tensor de Ricci contém 10 componentes independentes. As 10 restantes estão associadas ao tensor de Weyl, que descreve a parte livre da curvatura, incluindo marés de vácuo e ondas gravitacionais.

6.6 Curvatura intrínseca e extrínseca

Uma superfície pode parecer curva por estar embutida em um espaço maior, mas a curvatura relevante em relatividade geral é intrínseca. Habitantes bidimensionais de uma esfera poderiam detectar sua curvatura medindo somas de ângulos de triângulos, sem olhar para uma terceira dimensão. Do mesmo modo, a curvatura do espaço-tempo não exige imaginá-lo embutido em um espaço externo. Ela é medida por experimentos internos: transporte paralelo, desvio geodésico, volumes de pequenas bolas geodésicas e propagação de luz.

Exemplo 6.1. Em uma esfera de raio a , um triângulo formado por dois meridianos separados por 90° e pelo equador possui três ângulos retos. A soma é 270° , maior que 180° . Essa diferença é uma medida integrada da curvatura positiva da esfera.

6.7 Desvio geodésico

Seja ξ^μ o vetor separação entre duas geodésicas vizinhas e U^μ o vetor tangente à família de geodésicas. A equação de desvio geodésico é

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} U^\alpha \xi^\nu U^\beta.$$

Essa equação é uma das formas mais diretas de interpretar curvatura. Ela diz que a aceleração relativa entre partículas em queda livre é controlada pelo tensor de Riemann. No limite newtoniano, ela se reduz à equação de maré envolvendo segundas derivadas do potencial gravitacional.

Atividade 6.1. Considere duas partículas inicialmente em repouso relativo, separadas por uma pequena distância radial no campo de uma massa central. Use intuição newtoniana para determinar se a separação aumenta ou diminui. Depois associe o resultado ao sinal de componentes apropriadas de curvatura.

6.8 Problemas orientados

1. **Compatibilidade métrica.** Partindo de $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, mostre que $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$. A pista é derivar $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$.
2. **Divergência de vetor.** Mostre que

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} V^\mu).$$

Esse resultado é útil para leis de conservação em coordenadas gerais.

3. **Comutador em escalares.** Verifique que $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]f = 0$ para qualquer escalar f , assumindo conexão sem torção.
4. **Ricci da esfera.** Usando os Christoffel da esfera unitária, calcule pelo menos uma componente de $R_{\mu\nu}$ e compare com $R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ para esfera unitária.
5. **Número de componentes.** Conte os componentes independentes de um tensor simétrico 4×4 . Depois discuta por que as equações de Einstein têm dez componentes, mas nem todas são evolutivas independentes.
6. **Curvatura zero.** Explique por que todos os componentes do tensor de Riemann se anulam em Minkowski, mesmo quando usamos coordenadas polares ou esféricas.

6.9 Exemplos resolvidos adicionais

Exemplo 6.2. Divergência em coordenadas polares. No plano, $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2)$ e $\sqrt{|g|} = r$. Para um vetor $V^i = (V^r, V^\phi)$,

$$\nabla_i V^i = \frac{1}{r} \partial_r (r V^r) + \frac{1}{r} \partial_\phi (r V^\phi).$$

Como r não depende de ϕ ,

$$\nabla_i V^i = \partial_r V^r + \frac{1}{r} V^r + \partial_\phi V^\phi.$$

Esse é o termo extra familiar da divergência em polares, agora entendido como consequência de $\sqrt{|g|}$. Atenção ao comparar com a fórmula do cálculo vetorial: esta está em componentes *coordenadas*, aquela em componentes *ortonormais*, e a tradução entre as duas é a Seção 5.3.

Exemplo 6.3. Geodésicas na esfera. Na esfera unitária,

$$d\ell^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Os símbolos relevantes são

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot \theta.$$

No equador, $\theta = \pi/2$ e $\dot{\theta} = 0$. A equação para θ contém $-\sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2$, que se anula no equador. Portanto o equador é geodésica.

Exemplo 6.4. Curvatura por transporte paralelo. Transporte um vetor ao longo de um triângulo pequeno em uma superfície curva. A diferença entre o vetor inicial e final é proporcional à área do circuito e ao tensor de curvatura. No limite de área infinitesimal, essa relação fornece uma interpretação geométrica direta de $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$: ele mede a rotação infinitesimal produzida por um paralelogramo infinitesimal.

Exemplo 6.5. Coordenadas normais. Em qualquer ponto de uma variedade pseudo-riemanniana, é possível escolher coordenadas tais que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e $\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$ naquele ponto. Como os Christoffel dependem de primeiras derivadas da métrica, eles se anulam ali. As segundas derivadas, porém, permanecem e codificam a curvatura.

6.10 Resolução numérica

Este capítulo afirmou três coisas que só ficam realmente convincentes quando vieram número: que a conexão pode ser não nula sem haver curvatura, que o tensor de Riemann é a rotação produzida por um circuito fechado, e que a curvatura controla a aceleração relativa de geodésicas vizinhas. Aqui as três são medidas. E, de quebra, montamos uma máquina que extrai Γ , Riemann, Ricci e Kretschmann de uma métrica qualquer, por diferenças finitas — a mesma que será apontada para Schwarzschild nos capítulos seguintes.

6.10.1 Python

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap06_curvatura.py`

Transporte paralelo e holonomia, tensor de Riemann por diferenças finitas e desvio geodésico. Contém a máquina genérica que calcula Γ , Riemann, Ricci e Kretschmann de qualquer métrica.

Transporte paralelo e holonomia

Transportar um vetor ao longo de uma curva significa resolver

$$\frac{dV^a}{d\lambda} = -\Gamma^a_{bc} V^b \frac{dx^c}{d\lambda}, \quad (6.1)$$

que é uma equação diferencial ordinária comum. Se o circuito é fechado, o vetor volta ao ponto de partida — e a pergunta é se ele volta igual a si mesmo. O ângulo de discrepância é a *holonomia*.

ONDE SE ERRA

O ângulo tem de ser medido em relação a uma direção *fixa*, não em relação à base coordenada — que ela própria dá uma volta completa ao percorrer o circuito. Esquecer esses 2π é o erro que faz a holonomia da esfera dar o valor errado justamente para as calotas maiores que um hemisfério. No código, o acerto é uma linha: acumular o ângulo com `np.unwrap` e somar 2π no fim.

```
plano euclidiano em coordenadas polares (Christoffel nao nulos):
circuito r = 0.5: holonomia = +1.087e-11 rad
circuito r = 1.0: holonomia = -6.566e-12 rad
circuito r = 2.0: holonomia = -4.145e-11 rad
circuito r = 4.0: holonomia = +1.678e-10 rad
esfera unitaria (a holonomia deve ser a area da calota):
```

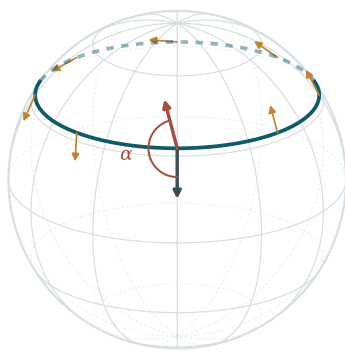
saída

theta_0	holonomia	area 2pi(1-cos)	erro
0.5000	0.76917145	0.76917145	3.89e-10
1.0000	2.88836580	2.88836580	2.25e-10
1.5708	6.28318531	6.28318531	8.88e-16
2.0000	8.89791300	8.89791300	1.62e-10
2.6000	11.66717613	11.66717613	3.38e-10

RESULTADO CENTRAL

As duas metades desta saída são a tese do capítulo. No plano em coordenadas polares, $\Gamma^r_{\phi\phi} = -r$ e $\Gamma^\phi_{r\phi} = 1/r$ são não nulos, o integrador trabalha de verdade — e o vetor volta *exatamente* como saiu, a 10^{-11} . Na esfera, a holonomia coincide com a área envolvida em oito casas decimais. Conexão é artefato de carta; holonomia é geometria. Este é o conteúdo operacional da frase “Christoffel não é curvatura”.

Transporte ao longo de um paralelo



o vetor volta girado de $\alpha = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$

A holonomia mede a curvatura, não a conexão

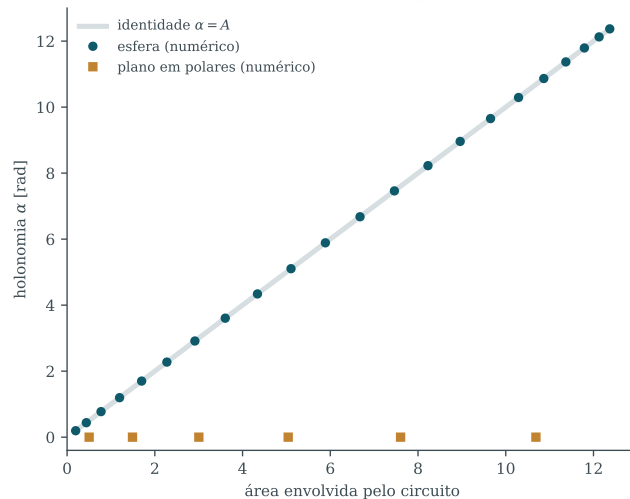


Figura 6.1. À esquerda, o vetor transportado ao longo de um paralelo da esfera: ele gira continuamente e não retorna à direção inicial. À direita, a holonomia medida contra a área envolvida pelo circuito. Os pontos da esfera caem sobre a reta $\alpha = A$ — a curvatura de Gauss é 1 e a holonomia é a área. Os quadrados são o plano euclidiano em coordenadas polares: símbolos de Christoffel não nulos, holonomia nula para qualquer circuito.

Riemann por diferenças finitas

Nada no cálculo de Γ e de R^a_{bcd} exige álgebra simbólica: são derivadas da métrica. Basta implementá-las com diferenças centrais e a máquina serve para qualquer métrica dada como função.

```
esfera unitaria      R = +2.00000000 (exato: +2.0)
plano em polares     R = +0.00000001 (exato: +0.0)
Schwarzschild em r = 8 M:
  max |R_munu| = 9.419e-07 (exato: 0)
```

saída

```

R          = -9.647e-09          (exato: 0)
Kretschmann = 0.0001831053
48 M^2/r^6 = 0.0001831055
componentes nao nulas de R_abcd: 24 de 256
independentes sob as simetrias: 6  (o maximo em 4D e' 20)

```

Três leituras. A primeira: o Ricci de Schwarzschild dá 10^{-7} em vez de zero, e isso é o piso de precisão das diferenças finitas, não física — a métrica é solução exata de vácuo. A segunda: o escalar de Kretschmann reproduz $48M^2/r^6$ em sete dígitos, mostrando que o Riemann completo é bem diferente de zero embora sua contração seja nula. É essa distinção que permite maré e onda gravitacional no vácuo.

A terceira é a mais instrutiva. Das 256 componentes de R_{abcd} , apenas 24 são não nulas em Schwarzschild, e as simetrias as reduzem a 6 independentes — bem abaixo das 20 que uma métrica genérica em quatro dimensões teria. Simetria esférica e estaticidade não são hipóteses de conveniência: elas cortam o problema por um fator maior que três.

Desvio geodésico

Em duas dimensões o tensor de Riemann tem uma única componente independente, e ela é a curvatura de Gauss. A equação de desvio geodésico se reduz a

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} + K(s)\zeta = 0, \quad (6.2)$$

com ζ a separação própria entre duas geodésicas vizinhas. O teste é honesto: K é lido do tensor de Riemann numérico, ponto a ponto, e (6.2) é integrada sem nunca usar a forma fechada da métrica.

K exato	K medido	s	xi integrado	xi analitico	erro rel.	saída
1	1.000000	0.50	0.0095885108	0.0095885108	9.80e-10	
1	1.000000	1.50	0.0199498998	0.0199498997	4.15e-09	
1	1.000000	2.40	0.0135092639	0.0135092636	2.14e-08	
0	0.000000	0.50	0.0100000000	0.0100000000	2.56e-11	
0	0.000000	1.50	0.0300000000	0.0300000000	1.86e-10	
0	0.000000	2.40	0.0480000000	0.0480000000	7.16e-10	
-1	-1.000000	0.50	0.0104219061	0.0104219061	2.04e-09	
-1	-1.000000	1.50	0.0425855894	0.0425855891	5.96e-09	
-1	-1.000000	2.40	0.1093245855	0.1093245843	1.11e-08	

RESULTADO CENTRAL

Compare a primeira linha com a última. Em $s = 2,4$, duas geodésicas que partiram com a mesma separação inicial estão a 0,0135 na esfera e a 0,109 no espaço hiperbólico — oito vezes mais longe. Nenhuma força atua em nenhum dos dois casos: as curvas são geodésicas, o movimento é livre. A diferença inteira está no sinal de um número lido da métrica. É esta a afir-

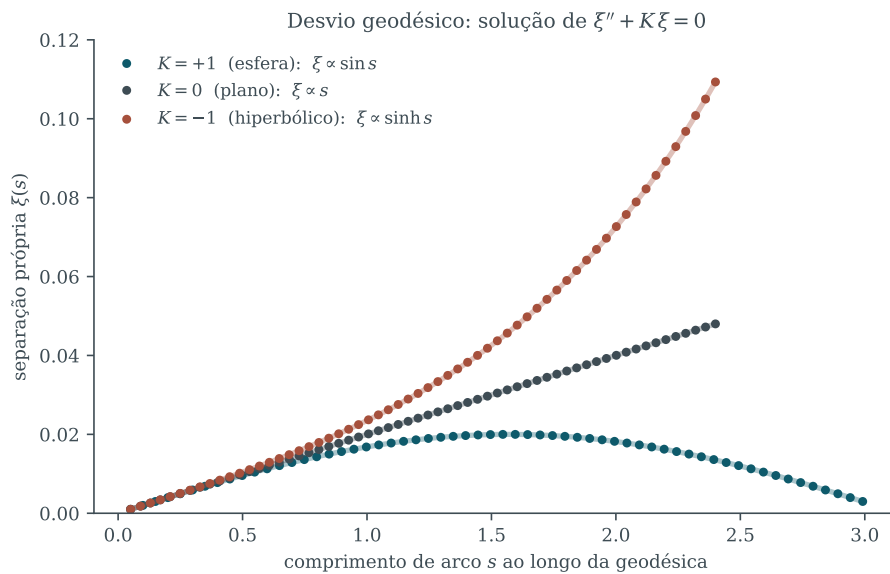


Figura 6.2. Separação própria entre duas geodésicas que partem do mesmo ponto, para curvatura constante positiva, nula e negativa. Os pontos são a integração de (6.2) com K extraído do Riemann numérico; as faixas claras são $\sin s$, s e $\sinh s$. Na esfera a separação passa por um máximo e volta a zero em $s = \pi$: as geodésicas se reencontram no ponto antípoda. No plano ela cresce linearmente para sempre. No espaço hiperbólico, exponencialmente.

mação que, transposta para quatro dimensões e para $R^\mu_{\alpha\nu\beta} U^\alpha \xi^\nu U^\beta$, vira o efeito de maré — e vira, no Capítulo 9, o anel de partículas deformado por uma onda.

6.10.2 Mathematica

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap06_curvatura_simbolico.wl`

Simetrias do Riemann, contagem de componentes e a divergência do tensor de Einstein. Define as rotinas reaproveitadas nos capítulos seguintes.

O simbólico faz aqui o que o numérico não consegue: provar as simetrias em vez de conferi-las num ponto. O script define as rotinas Christoffel, Riemann e Ricci usadas também nos Capítulos 9, 10 e seguintes, e verifica as quatro simetrias de R_{abcd} de uma vez.

A contagem que essas simetrias produzem é $n^2(n^2 - 1)/12$:

n	Riemann	Ricci	Weyl	consequência
2	1	1	0	uma só componente: a curvatura de Gauss
3	6	6	0	Ricci determina Riemann; não há ondas gravitacionais
4	20	10	10	sobra o tensor de Weyl: maré e radiação no vácuo
5	50	15	35	

A linha $n = 3$ merece atenção. Em $2 + 1$ dimensões, $R_{\mu\nu} = 0$ implica $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = 0$: o vácuo é rigorosamente plano e a gravidade não tem graus de liberdade propagantes. Só a partir de quatro dimensões o tensor de Weyl abre espaço para geometria dinâmica em regiões sem matéria.

O último bloco do script verifica a identidade de que tudo depende. Ele constrói $G_{\mu\nu}$ para a métrica esfericamente simétrica mais geral possível, com $A(r)$ e $B(r)$ deixadas como funções livres, e toma sua divergência covariante — que resulta identicamente nula.

RESULTADO CENTRAL

A divergência covariante do tensor de Einstein se anula para uma métrica esfericamente simétrica *qualquer*, com $A(r)$ e $B(r)$ funções livres. Nenhuma equação de campo foi imposta. Isso deixa claro o que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ realmente é: não uma propriedade das soluções, mas um teorema de geometria diferencial, válido para toda métrica. É por isso que ele pode ser usado como *argumento* para escolher $G_{\mu\nu}$ como lado geométrico das equações de campo, em vez de ser uma consequência delas.

6.11 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 6.1. FÁCIL Schutz §6.3

A derivada covariante de um vetor é $\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} V^\alpha$. (a) Escreva a regra correspondente para uma 1-forma e justifique o sinal oposto. (b) Escreva a regra para um tensor T^μ_ν . (c) Verifique que ∇_μ aplicado a um escalar coincide com ∂_μ .

Exercício 6.2. FÁCIL Schutz §6.5

Em quatro dimensões, o tensor de Riemann tem 20 componentes independentes. (a) Liste as quatro simetrias que produzem essa contagem. (b) Quantas componentes independentes tem o tensor de Ricci? (c) Quantas sobram para o tensor de Weyl, e o que essa parte descreve fisicamente?

Exercício 6.3. MÉDIO Schutz §6.2

Partindo da compatibilidade métrica $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ e da ausência de torção: (a) mostre que $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$; (b) deduza a fórmula de Christoffel em termos de derivadas da métrica, explicitando onde cada hipótese entra; (c) mostre que o transporte paralelo preserva o produto escalar entre dois vetores.

Exercício 6.4. MÉDIO Schutz §6.6

Para a esfera unitária: (a) calcule $R^\theta_{\phi\theta\phi}$; (b) obtenha $R_{\mu\nu}$ e mostre que $R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$; (c) calcule o escalar R e relacione-o à curvatura de Gauss $K = 1$. (d) Repita o item (c) para a esfera de raio a e verifique a dependência com a .

Exercício 6.5. DIFÍCIL Schutz §6.4

A equação de desvio geodésico é $D^2 \xi^\mu / D\tau^2 = -R^\mu_{\alpha\nu\beta} U^\alpha \xi^\nu U^\beta$. (a) Deduza-a a partir de uma família de geodésicas $x^\mu(\tau, s)$, com $\xi^\mu = \partial x^\mu / \partial s$. (b) Aplique-a a duas partículas em queda livre radial no campo newtoniano de uma massa M , e mostre que ela reproduz a maré $2GM/r^3$ para separação radial e $-GM/r^3$ para separação transversa. (c) Identifique quais componentes de $R^\mu_{\alpha\nu\beta}$ correspondem a cada caso.

6.12 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **O toro e Gauss–Bonnet.** Aplique a máquina de `cap06_curvatura.py` à métrica do toro, $d\ell^2 = du^2 + (R + a \cos u)^2 dv^2$. Mostre que a curvatura de Gauss é positiva na face externa, negativa na interna e nula nos dois círculos com $\cos u = 0$. Integre K sobre toda a superfície e verifique que o resultado é zero, como exige Gauss–Bonnet para gênero 1.
2. **Os dois regimes do erro numérico.** Meça o erro do escalar de curvatura da esfera calculado por `riemann` em função do passo h , varrendo de 10^{-1} a 10^{-8} . Faça o gráfico em escala logarítmica. Mostre que o erro cai como h^2 até cerca de 10^{-4} e volta a crescer depois, e identifique a origem de cada regime: truncamento de um lado, cancelamento catastrófico de ponto flutuante do outro. Qual é o h ótimo?
3. **Curvatura de um universo em expansão.** Alimente a mesma máquina com a métrica FLRW plana, $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, para uma $a(t)$ dada em forma fechada. Extraia R numericamente e compare com o resultado simbólico $R = 6(\ddot{a}a + \dot{a}^2)/a^2$. Faça o teste com $a \propto t^{2/3}$ e com $a \propto e^{Ht}$, e mostre que o segundo dá R constante — é o espaço de de Sitter.

Física em espaço-tempo curvo

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Aprender como partículas, luz, relógios e observadores são descritos em uma geometria curva.

7.1 Movimento livre

Na relatividade geral, uma partícula livre segue uma geodésica temporal:

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0.$$

Essa equação expressa que o vetor tangente é transportado paralelamente ao longo da própria curva.

Para luz,

$$k^\nu \nabla_\nu k^\mu = 0, \quad k^\mu k_\mu = 0.$$

7.2 Energia medida por um observador

Se uma partícula tem quadrimomento p^μ e o observador tem quadrivelocidade U^μ , a energia medida localmente é

$$E_{\text{obs}} = -p_\mu U^\mu.$$

Essa fórmula é uma das mais úteis da relatividade: ela vale em espaço plano, em espaço curvo, para partículas massivas e para fótons.

7.3 Simetrias e quantidades conservadas

Em mecânica clássica, cada simetria da Lagrangiana produz uma quantidade conservada. Em relatividade geral, quem carrega a simetria é a métrica, e a con-

dição precisa é a **equação de Killing**:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad \text{ou, de forma equivalente,} \quad \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0. \quad (7.1)$$

Um campo vetorial ξ^μ que a satisfaz é chamado vetor de Killing. O significado geométrico é direto: deslocar todos os pontos da variedade ao longo de ξ^μ por um parâmetro infinitesimal não altera a métrica. A geometria é invariante naquela direção.

Há um teste prático que dispensa calcular derivadas covariantes. Se, em algum sistema de coordenadas, a métrica *não depende* de uma coordenada $x^{(a)}$, então $\xi^\mu = \delta^\mu_{(a)}$ é vetor de Killing. Em Schwarzschild, $g_{\mu\nu}$ não depende de t nem de ϕ , e daí saem imediatamente dois vetores de Killing.

RESULTADO CENTRAL

De simetria a constante de movimento. Seja p^μ o momento de uma partícula em geodésica e ξ^μ um vetor de Killing. Então

$$C = \xi_\mu p^\mu$$

é constante ao longo da geodésica. A demonstração cabe em duas linhas. Derivando ao longo da curva,

$$p^\nu \nabla_\nu (\xi_\mu p^\mu) = \underbrace{p^\mu p^\nu \nabla_\nu \xi_\mu}_{(i)} + \underbrace{\xi_\mu p^\nu \nabla_\nu p^\mu}_{(ii)}.$$

O termo (ii) é zero pela equação geodésica. O termo (i) contrai o objeto simétrico $p^\mu p^\nu$ com $\nabla_\nu \xi_\mu$; só a parte simétrica de $\nabla_\nu \xi_\mu$ sobrevive a essa contração, e a Equação (7.1) diz justamente que ela é nula. Logo C é conservada.

Em uma geometria estacionária, o Killing temporal fornece uma energia conservada; em uma geometria axialmente simétrica, o Killing axial fornece momento angular conservado. São exatamente as duas constantes E e L que o Capítulo 10 usa para reduzir as geodésicas de Schwarzschild a um problema de potencial efetivo unidimensional — e agora sabemos de onde elas vêm.

ONDE SE ERRA

A conservação vale para a quantidade $\xi_\mu p^\mu$, não para “a energia” em algum sentido absoluto. Um espaço-tempo genérico não tem vetor de Killing temporal nenhum, e nesse caso simplesmente não existe energia conservada associada à geodésica. A métrica FLRW é o exemplo mais importante: ela depende de t , não é estacionária, e é por isso que a energia de um fóton cosmológico não se conserva — ele sofre redshift.

7.4 Observadores não são coordenadas

Em relatividade geral, coordenadas são rótulos; observadores são objetos físicos. Um observador ideal é representado por uma linha de mundo temporal e por uma quadrivelocidade U^μ normalizada. Dois observadores podem usar as mesmas coordenadas e ainda assim medir energias diferentes, pois a medida depende de sua quadrivelocidade. Do mesmo modo, uma coordenada temporal t não é automaticamente o tempo próprio de alguém.

Essa distinção é crucial em espaços-tempos curvos. Na métrica de Schwarzschild, por exemplo, o observador estático em raio fixo mede um tempo próprio relacionado a dt por um fator que depende de r . Um observador em queda livre atravessando o mesmo ponto possui outra quadrivelocidade e mede outra decomposição local de energia e momento.

7.5 Tetradas locais

Uma tetrada é um conjunto de quatro vetores ortonormais carregados por um observador. O vetor temporal da tetrada é a quadrivelocidade do observador; os três vetores espaciais definem seus eixos locais. Em componentes de tetrada, a métrica parece a métrica de Minkowski:

$$g(e_{\hat{\alpha}}, e_{\hat{\beta}}) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}.$$

Índices com chapéu indicam componentes medidas localmente, não componentes em uma carta qualquer.

Essa linguagem é útil porque aparelhos reais medem componentes locais. Um detector não mede diretamente p_t ou p_r como números abstratos de uma carta; ele mede energia e direção em seu laboratório. A conversão entre componentes coordenadas e componentes medidas passa pela tetrada.

7.6 Constantes de movimento e energia local

Em uma geometria estacionária, p_t pode ser constante ao longo de uma geodésica. Isso não significa que todos os observadores locais meçam a mesma energia. A energia conservada associada ao infinito e a energia local medida por um observador são conceitos relacionados, mas distintos:

$$E_{\text{loc}} = -p_\mu U^\mu.$$

No caso de um fóton subindo em um campo gravitacional estático, a quantidade conservada ligada à simetria temporal permanece fixa, enquanto a energia me-

dida por observadores estáticos muda com o potencial gravitacional. Essa é a origem do redshift gravitacional.

Exemplo 7.1. Em espaço plano, dois observadores inerciais com quadrivelocidades U^μ e V^μ medem energias diferentes para a mesma partícula. A diferença é puramente cinemática e corresponde ao efeito Doppler. Em espaço-tempo curvo, além dessa diferença cinemática, pode haver variação associada à posição dos observadores na geometria.

7.7 Problemas orientados

1. **Energia local.** Em Minkowski, tome $p^\mu = m\gamma(1, v, 0, 0)$ e um observador em repouso $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Calcule $E = -p_\mu U^\mu$.
2. **Observador em movimento.** Repita o cálculo anterior para um observador com velocidade u na direção x . Mostre que aparece a energia transformada por Lorentz.
3. **Killing temporal.** Em uma métrica independente de t , mostre que $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é candidato natural a vetor de Killing. Escreva a constante associada para uma geodésica.
4. **Killing axial.** Em uma métrica independente de ϕ , obtenha a constante associada a rotações. Interprete-a como momento angular.
5. **Geodésica nula.** Explique por que não podemos usar tempo próprio para parametrizar a trajetória de um fóton. O que significa escolher um parâmetro afim?
6. **Tetrada estática.** Para uma métrica diagonal estática, construa qualitativamente uma tetrada de observador em repouso nas coordenadas espaciais.

7.8 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 7.1. FÁCIL Schutz §7.1

Uma partícula livre em espaço-tempo curvo satisfaz $U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0$. (a) Escreva essa equação em componentes e mostre que ela é a equação geodésica. (b) Verifique que $U^\mu U_\mu = -1$ é preservado ao longo da curva. (c) Explique por que a luz exige um parâmetro afim diferente do tempo próprio.

Exercício 7.2. FÁCIL Schutz §7.4

Em uma métrica estática e diagonal, $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é vetor de Killing. (a) Escreva a quantidade conservada $E = -\xi_\mu p^\mu$ para uma partícula. (b) Calcule-a explicitamente para a métrica de Schwarzschild. (c) Explique por que E não coincide com a energia medida por um observador estático em r finito.

Exercício 7.3. MÉDIO Schutz §7.2

A energia medida localmente é $E_{\text{obs}} = -p_\mu U_{\text{obs}}^\mu$. (a) Construa a tetrada de um observador estático em Schwarzschild. (b) Calcule $E_{\text{loc}}(r)$ para um fóton com $E = -p_t$ conservada e mostre que $E_{\text{loc}} = E(1 - 2M/r)^{-1/2}$. (c) Obtenha daí a fórmula do redshift gravitacional entre dois observadores estáticos em r_1 e r_2 .

Exercício 7.4. MÉDIO Schutz §7.4

Prove que, se ξ^μ satisfaz a equação de Killing $\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0$, então $\xi_\mu p^\mu$ é constante ao longo de qualquer geodésica. Em seguida: (a) mostre que a métrica FLRW não possui vetor de Killing temporal; (b) explique, com base nisso, por que a energia de um fóton cosmológico não se conserva.

Exercício 7.5. DIFÍCIL Schutz §7.1

O princípio do acoplamento mínimo manda trocar $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ e $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$. (a) Aplique-o às equações de Maxwell e escreva $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$ e $\nabla_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$. (b) Mostre que a segunda equação é idêntica à versão com derivadas parciais, e explique por quê. (c) Mostre que $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$ implica $\nabla_\nu J^\nu = 0$, e discuta a ambiguidade que surgiria se $F_{\mu\nu}$ não fosse antissimétrico.

7.9 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **Testando a equação de Killing.** Use a rotina `christoffel` de `cap06_curvatura.py` para montar $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$ em Schwarzschild e verificar numericamente que $\xi = \partial_t$ e $\xi = \partial_\phi$ satisfazem a equação de Killing, enquanto $\xi = \partial_r$ não. Meça quanto vale o resíduo em cada caso e mostre que a diferença é de muitas ordens de grandeza, não de arredondamento.
2. **A tetraça do observador estático.** Monte numericamente a tetraça de um observador estático em Schwarzschild e calcule a energia local de um fóton que cai do infinito com $E = -p_t$ fixo, em função de r . Faça o gráfico de E_{loc}/E de $r = 100M$ até $r = 2,01M$ e mostre que ele diverge no horizonte. Por que a quantidade conservada permanece finita?
3. **Contando simetrias.** A equação de Killing é um sistema linear homogêneo nas componentes de ξ e em suas primeiras derivadas. Monte esse sistema numericamente para Minkowski, Schwarzschild e FLRW, e determine a dimensão do espaço de soluções em cada caso. Confirme os valores 10, 4 e 6, e identifique quais das dez simetrias de Minkowski sobrevivem em cada uma das outras duas.

Equações de Einstein

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Compreender a forma, a motivação e os limites físicos das equações de campo.

8.1 A equação de campo

As equações de Einstein são

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

ou, em unidades geométricas $G = c = 1$,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

O lado esquerdo descreve geometria; o lado direito descreve matéria e energia. A constante cosmológica Λ pode ser interpretada geometricamente ou como componente efetiva do conteúdo energético do Universo.

8.2 Limite newtoniano

No limite de campo fraco e velocidades pequenas, escrevemos

$$g_{00} \approx -(1 + 2\Phi),$$

onde Φ é o potencial gravitacional newtoniano. As equações de Einstein reduzem-se à equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho.$$

Esse limite fixa o fator $8\pi G$ na equação de campo.

8.3 Conservação local

Como $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, as equações de Einstein exigem

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Essa conservação é local. Em espaço-tempos genéricos, não existe uma energia gravitacional global simples e tensorialmente definida.

8.4 Por que o tensor de Einstein

Queremos uma equação que relacione geometria e matéria. O lado da matéria deve ser o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, pois ele contém densidade de energia, fluxos e tensões. Portanto o lado geométrico deve ser também um tensor simétrico de tipo $(0,2)$. Além disso, deve ter divergência covariante nula, para ser compatível com conservação local de energia e momento. O tensor de Einstein satisfaz exatamente essa exigência:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0.$$

Outro requisito é que a equação contenha no máximo segundas derivadas da métrica. Isso é importante para que a teoria tenha um problema de valor inicial bem comportado, análogo ao de outras teorias clássicas. O tensor de Einstein é construído a partir da curvatura, que envolve segundas derivadas da métrica e termos quadráticos em primeiras derivadas.

8.5 A ação de Einstein-Hilbert

O argumento anterior é de eliminação: procuramos o único tensor com as propriedades exigidas e o encontramos. Existe um caminho mais econômico e mais próximo do resto da física teórica — postular uma ação e variar.

A ação mais simples que se pode escrever para a métrica é a integral do escalar de curvatura sobre o volume invariante:

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x. \quad (8.1)$$

Só há duas escolhas embutidas aqui, e ambas são escolhas de *mínima* estrutura: o integrando é o único escalar construído da curvatura sem derivadas adicionais nem potências, e $\sqrt{-g} d^4x$ é o único elemento de volume que não depende de coordenadas.

Variando em relação a $g^{\mu\nu}$, três peças aparecem:

$$\delta (R\sqrt{-g}) = \underbrace{R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}}_{(i)} + \underbrace{R\delta\sqrt{-g}}_{(ii)} + \underbrace{g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}}_{(iii)}.$$

A peça (ii) usa a identidade $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, e é ela que produz o famoso $-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$. A peça (iii) é a mais interessante: $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ é uma divergência total, de modo que ela não contribui para as equações de movimento — vira um termo de fronteira. Somando (i) e (ii),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) = \frac{G_{\mu\nu}}{16\pi G}.$$

O lado da matéria entra pela ação da matéria S_m , e o tensor energia-momento passa a ser *definido* — não postulado — por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (8.2)$$

Exigindo $\delta(S_{\text{EH}} + S_m) = 0$ recuperamos exatamente $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$.

RESULTADO CENTRAL

Nessa formulação, três fatos que antes pareciam coincidências viram consequências. *Primeiro*, o tensor de Einstein aparece sozinho: não foi escolhido, foi o que a variação produziu. *Segundo*, $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ deixa de ser um acidente da identidade de Bianchi e passa a ser a expressão da invariância de S_{EH} por difeomorfismos — é o teorema de Noether aplicado à liberdade de escolher coordenadas. *Terceiro*, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ segue da invariância de S_m pela mesma razão. Simetria de coordenadas e conservação local de energia são a mesma afirmação, vista de dois ângulos.

A constante cosmológica também ganha sua interpretação mais natural aqui: ela é simplesmente o termo constante permitido no integrando,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g} d^4x,$$

cujas variação acrescenta $+\Lambda g_{\mu\nu}$ ao lado geométrico. Não há nenhuma razão de princípio para omiti-lo — omitir Λ é que seria a escolha arbitrária.

ONDE SE ERRA

A peça (iii) só é “puramente de fronteira” se admitirmos que $\delta g^{\mu\nu}$ e suas primeiras derivadas se anulam no contorno. Como a ação contém segundas

derivadas da métrica, o problema variacional bem posto exige acrescentar o termo de fronteira de Gibbons–Hawking–York. Ele não altera as equações de campo no interior — e por isso é omitido aqui —, mas é essencial em termodinâmica de buracos negros, onde a entropia de horizonte vem justamente desse termo.

8.6 Traço das equações de campo

Sem constante cosmológica, as equações são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}.$$

Contraindo com $g^{\mu\nu}$ em quatro dimensões,

$$R - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 8\pi GT.$$

Como $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$, obtemos

$$R - 2R = 8\pi GT, \quad R = -8\pi GT.$$

Substituindo de volta,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right).$$

Essa forma é muitas vezes útil em cálculos. No vácuo, $T_{\mu\nu} = 0$, ela implica $R_{\mu\nu} = 0$, embora o tensor de Riemann completo possa ser não nulo. Por isso há gravidade de maré e ondas gravitacionais mesmo em regiões sem matéria.

8.7 O limite fraco com mais detalhe

No limite newtoniano, assumimos campo estático, velocidades pequenas e métrica quase plana. Escrevemos

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi), \quad |\Phi| \ll 1.$$

Para uma partícula lenta, a equação geodésica espacial é dominada por termos com duas derivadas temporais da coordenada:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma_{00}^i.$$

Como

$$\Gamma_{00}^i \approx \partial_i \Phi,$$

temos

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\partial_i \Phi,$$

que é a equação newtoniana. A componente 00 das equações de Einstein fornece a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho.$$

8.8 Constante cosmológica como fluido

Movendo o termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ para o lado direito, podemos definir

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}.$$

No referencial comóvel de um fluido perfeito, isso corresponde a

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda.$$

Essa pressão negativa gera aceleração da expansão cosmológica nas equações de Friedmann. A interpretação microscópica da energia escura permanece uma das questões abertas da física fundamental.

8.9 Problemas orientados

1. **Traço de Einstein.** Contraia as equações de campo em quatro dimensões e obtenha $R = -8\pi GT$. Depois escreva a forma equivalente para $R_{\mu\nu}$.
2. **Vácuo não é plano.** Explique por que $R_{\mu\nu} = 0$ não implica $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = 0$. Use o exterior de uma estrela esférica como exemplo.
3. **Unidades.** Restaure fatores de c e verifique que $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}/c^4$ tem dimensões consistentes.
4. **Geodésica newtoniana.** Complete o cálculo de Γ_{00}^i para $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$ e obtenha $\ddot{x}^i = -\partial_i \Phi$.
5. **Pressão gravitante.** Use o fluido perfeito para discutir por que pressão contribui para a fonte gravitacional em regimes relativísticos.
6. **Energia gravitacional.** Discuta por que não existe, em geral, um tensor local de energia do campo gravitacional análogo ao tensor energia-momento da matéria.

8.10 Exemplos resolvidos adicionais

Exemplo 8.1. Equações no vácuo. Se $T_{\mu\nu} = 0$ e $\Lambda = 0$, então

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0.$$

Contraindo, obtemos $R - 2R = 0$, logo $R = 0$. Substituindo de volta, $R_{\mu\nu} = 0$. Isso não torna o espaço-tempo necessariamente plano, pois a parte de Weyl da curvatura pode permanecer.

Exemplo 8.2. Constante cosmológica em vácuo. Se $T_{\mu\nu} = 0$ mas $\Lambda \neq 0$, as equações dão

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

Contraindo em quatro dimensões,

$$-R + 4\Lambda = 0, \quad R = 4\Lambda.$$

Logo

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Espaços de de Sitter e anti-de Sitter são soluções maximamente simétricas desse tipo, com sinal de Λ determinando o caráter da curvatura.

Exemplo 8.3. Estimativa de campo fraco. Para a Terra, $GM/(Rc^2) \sim 7 \times 10^{-10}$. Para o Sol, $GM/(Rc^2) \sim 2 \times 10^{-6}$. Para uma estrela de nêutrons, essa quantidade pode ser da ordem de 0,1. Isso explica por que relatividade geral é uma correção pequena em laboratórios terrestres, mas central para objetos compactos.

Exemplo 8.4. Pressão e traço. Para radiação, $T = 0$. A forma traçada das equações mostra que $R = -8\pi GT = 0$, mas isso não implica $R_{\mu\nu} = 0$, pois $T_{\mu\nu}$ pode ser não nulo mesmo com traço zero. Esse caso é importante no Universo primordial dominado por radiação.

8.11 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 8.1. FÁCIL Schutz §8.2

As equações de Einstein são $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$. (a) Contraia-as com $g^{\mu\nu}$ em quatro dimensões e obtenha $R = -8\pi G T$. (b) Substitua de volta e escreva a forma equivalente $R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$. (c) Conclua que, no vácuo, $R_{\mu\nu} = 0$.

Exercício 8.2. FÁCIL Schutz §8.4

Estime o parâmetro de campo fraco $GM/(Rc^2)$ para a Terra, o Sol, uma anã branca ($M \sim M_\odot$, $R \sim 10^4$ km) e uma estrela de nêutrons ($M \sim 1,4 M_\odot$, $R \sim 10$ km). Organize em tabela e indique em quais desses objetos a relatividade geral é uma correção pequena e em quais é essencial.

Exercício 8.3. MÉDIO Schutz §8.3

Deduzo o limite newtoniano. (a) Escreva $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$ com $|\Phi| \ll 1$ e mostre que a equação geodésica de uma partícula lenta se reduz a $\ddot{x}^i = -\partial_i\Phi$. (b) Mostre que a componente 00 das equações de campo dá $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. (c) Explique como esses dois resultados juntos fixam o fator $8\pi G$.

Exercício 8.4. MÉDIO Schutz §8.1

Justifique a escolha de $G_{\mu\nu}$ como lado geométrico. (a) Liste as propriedades exigidas do lado esquerdo. (b) Mostre que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ segue da identidade de Bianchi contraída. (c) Mostre que a alternativa $R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ levaria, via conservação de T , a $T = \text{const}$ em todo o espaço-tempo, e explique por que isso é inaceitável.

Exercício 8.5. DIFÍCIL assunto próprio desta apostila

A ação de Einstein–Hilbert é $S = \frac{1}{16\pi G} \int R\sqrt{-g} d^4x$. (a) Prove a identidade $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. (b) Mostre que $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ é uma divergência total e portanto não contribui para as equações de movimento no interior. (c) Conclua a variação e obtenha $G_{\mu\nu} = 0$ no vácuo. (d) Acrescentando S_m e usando $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$, recupere as equações completas.

8.12 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **As equações de campo, verificadas.** Estenda `cap06_curvatura.py` com uma rotina que devolva $G_{\mu\nu}$. Aplique-a à solução interior de Schwarzschild para uma estrela de densidade uniforme e verifique numericamente que $G_{tt} = 8\pi\rho$ e que as componentes espaciais reproduzem a pressão dada pela equação TOV. Este é o teste mais direto de que a métrica interior resolve as equações de Einstein.
2. **O pior palpite da física.** Escreva um script que calcule ρ_Λ a partir de Ω_Λ e H_0 , e a compare com a densidade de energia de vácuo estimada por teoria quântica de campos com corte na escala de Planck, $\rho \sim c^5/(\hbar G^2)$. Imprima a razão em ordens de grandeza. Repita com corte na escala eletrofraca e na escala do QCD, e monte uma tabela — ela mostra que o problema não desaparece com nenhum corte razoável.
3. **Bianchi contraída, numericamente.** Implemente $\nabla_\mu G^{\mu\nu}$ por diferenças finitas e aplique a uma métrica esfericamente simétrica *arbitrária*, com $A(r)$ e $B(r)$ escolhidas ao acaso e sem nenhuma relação com as equações de campo. Verifique que a divergência é nula dentro do erro numérico e estude como o resíduo escala com o passo h . Por que o resultado não depende de a métrica ser solução?

Ondas gravitacionais

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Descrever ondas gravitacionais como perturbações da métrica, entender suas polarizações e conectar a teoria linearizada à detecção interferométrica.

9.1 Campo fraco

Em uma região quase plana,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

Após uma escolha conveniente de gauge, as perturbações radiativas satisfazem, no vácuo,

$$\square h_{ij}^{\text{TT}} = 0.$$

O sobrescrito TT indica gauge transversal e sem traço.

9.2 Polarizações

Uma onda propagando-se na direção z possui duas polarizações independentes:

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elas deformam distâncias transversais de modos característicos.

9.3 Detecção

Interferômetros como LIGO, Virgo e KAGRA medem diferenças relativas de comprimento entre braços quase perpendiculares. O sinal adimensional típico é a

deformação

$$h \sim \frac{\Delta L}{L}.$$

Na prática, detectar ondas gravitacionais exige modelagem de ruído, filtros casados e comparação com famílias de formas de onda.

9.4 Emissão

A radiação gravitacional dominante vem de variações temporais do momento de quadrupolo da fonte. A expressão completa, obtida da solução retardada da equação de onda linearizada, é a **fórmula do quadrupolo** de Einstein:

$$P = \frac{G}{5c^5} \left\langle \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right\rangle, \quad Q_{ij} = \int \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) d^3 x. \quad (9.1)$$

O tensor Q_{ij} é o quadrupolo *reduzido*, isto é, sem traço; a média $\langle \cdot \rangle$ é sobre alguns períodos da fonte.

Aplicada a duas massas em órbita circular de separação a , ela dá

$$P = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5}, \quad (9.2)$$

resultado deduzido na Seção 9.11. A presença de $c^5/G \approx 3,6 \times 10^{52} \text{ W}$ mostra por que a emissão é ridícula para sistemas cotidianos e colossal para binárias compactas: essa é a escala natural de luminosidade gravitacional, e tudo o mais é medido contra ela.

ONDE SE ERRA

A dependência a^{-5} é brutal e explica a forma do sinal. Reduzir a separação pela metade multiplica a potência por 32. Por isso a emissão é desprezível durante quase toda a vida da binária e explode nos últimos segundos — o inspiral não é um decaimento suave, é uma corrida cuja última volta libera mais energia que todas as anteriores somadas.

9.5 Gauge e graus de liberdade

Uma perturbação simétrica $h_{\mu\nu}$ possui inicialmente dez componentes. Nem todas representam física. Parte delas muda quando fazemos uma pequena transformação de coordenadas. Essa liberdade é chamada liberdade de gauge. A escolha TT remove componentes não radiativas e deixa apenas dois graus de liberdade físicos, correspondentes às polarizações $+$ e $\times$.

Essa situação é análoga ao eletromagnetismo, onde o potencial A_μ possui liberdade de gauge e nem todos os seus componentes são observáveis. O campo físico está nas combinações invariantes apropriadas. Em ondas gravitacionais, o observável direto é a variação relativa de distâncias entre massas teste, relacionada à curvatura perturbativa.

9.6 Efeito sobre partículas teste

Considere partículas inicialmente em repouso relativo formando um pequeno anel no plano transversal à propagação da onda. Uma polarização $+$ alonga o anel em uma direção enquanto o comprime na direção perpendicular; meio período depois, os papéis se trocam. A polarização $\times$ produz o mesmo padrão rotacionado de 45° .

Esse efeito não deve ser imaginado como uma força empurrando partículas dentro de um espaço fixo. A onda altera a geometria, e as partículas livres seguem geodésicas nessa geometria oscilante. O detector mede uma diferença de tempo de propagação da luz entre braços, que pode ser descrita como uma deformação relativa h .

9.7 Escalas de detecção

Uma deformação típica detectável por interferômetros terrestres é $h \sim 10^{-21}$. Para braços de 4 km, a variação efetiva de comprimento é da ordem de

$$\Delta L \sim hL \sim 4 \times 10^{-18} \text{ m.}$$

Esse número é muito menor que o tamanho de um próton. A detecção só é possível porque o experimento mede fase acumulada da luz, usa cavidades ópticas para aumentar o caminho efetivo e emprega análise estatística com formas de onda teóricas.

9.8 Binárias compactas

Durante a fase inspiralante de uma binária compacta, a emissão de ondas gravitacionais remove energia e momento angular orbital. A separação diminui, a frequência orbital aumenta e o sinal observado apresenta um “chirp”. A frequência da onda gravitacional dominante é aproximadamente duas vezes a frequência orbital, pois a emissão quadrupolar repete o padrão duas vezes por órbita.

As últimas órbitas e a fusão exigem relatividade numérica para descrição pre-

cisa. Depois da fusão, o buraco negro final relaxa por modos quase-normais, produzindo o chamado ringdown. O sinal completo permite inferir massas, spins, distância luminosidade e testes de consistência da relatividade geral.

Atividade 9.1. Esboce qualitativamente amplitude e frequência de uma onda gravitacional de binária compacta em função do tempo. Indique as fases inspiral, merger e ringdown.

9.9 Problemas orientados

1. **Traço TT.** Verifique que a matriz de polarizações em gauge TT tem traço nulo e é transversal para propagação na direção z .
2. **Anel de partículas.** Escreva as deformações relativas $\Delta x/L$ e $\Delta y/L$ para uma onda $+$ ideal. Desenhe quatro instantes separados por um quarto de período.
3. **Estimativa de detector.** Para $h = 10^{-21}$ e $L = 4$ km, calcule ΔL . Compare com escalas nucleares e discuta por que interferometria é necessária.
4. **Ausência de monopolo.** Explique por que conservação de massa total impede radiação gravitacional monopolar em sistemas isolados.
5. **Ausência de dipolo.** Explique por que conservação do centro de massa elimina radiação dipolar gravitacional dominante.
6. **Chirp.** Use energia orbital newtoniana e emissão qualitativa de energia para argumentar por que a frequência orbital aumenta durante o inspiral.

9.10 Erros comuns e interpretação

Um erro comum é pensar em ondas gravitacionais como ondas que se propagam dentro do espaço, deformando uma espécie de meio material. A descrição correta é mais sutil: a própria métrica oscila. Como a métrica determina tempos próprios, distâncias e cones de luz, a passagem de uma onda altera relações de medida entre massas teste. Essa alteração é pequena, transversal e possui duas polarizações independentes.

Outro erro frequente é imaginar que qualquer movimento de massa produz ondas gravitacionais intensas. Sistemas esfericamente simétricos não irradiam. Um colapso perfeitamente esférico, por mais violento que seja, não emite ondas gravitacionais. É a variação de quadrupolo que importa. Por isso binárias compactas são fontes tão eficientes: elas têm grandes massas, velocidades relativísticas e forte assimetria quadrupolar.

Também é importante distinguir detecção direta de evidência indireta. An-

tes de 2015, a perda orbital de pulsares binários já fornecia forte confirmação da emissão de ondas gravitacionais. A detecção interferométrica acrescentou a observação direta do sinal passando pela Terra, abrindo uma forma nova de astronomia.

9.11 Resolução numérica

Este capítulo enunciou a fórmula do quadrupolo como estimativa dimensional e descreveu o *chirp* em palavras. Nenhuma das duas coisas é suficiente para conectar a teoria com um sinal real. Aqui fechamos essa lacuna: a constante da fórmula do quadrupolo é obtida derivando o momento de quadrupolo e conferida contra a forma fechada; a evolução da frequência é integrada; e o resultado é confrontado com dois sistemas medidos, PSR B1913+16 e GW150914. Trabalhamos em unidades SI, convertendo apenas na impressão.

9.11.1 Python

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap09_ondas.py`

Anel de partículas nas duas polarizações, verificação da fórmula do quadrupolo, teste de Hulse–Taylor e inspiral de uma binária compacta.

O anel de partículas

A equação de desvio geodésico em gauge TT, com a onda propagando-se em z , reduz-se a

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{ij}^{\text{TT}}}{dt^2} \xi^j, \quad \text{cuja integral é} \quad \xi^i(t) = \left(\delta^i_j + \frac{1}{2} h_{ij}^{\text{TT}} \right) \xi^j(0). \quad (9.3)$$

ONDE SE ERRA

Em gauge TT as *coordenadas* das partículas livres não mudam — elas estão em queda livre e permanecem em repouso coordenado. O que muda é a distância própria entre elas. Dizer que a onda “empurra” as massas é a imagem errada; dizer que ela altera a régua é a certa. A elipse desenhada abaixo é o lugar geométrico dos pontos a distância própria constante, que é exatamente o que o interferômetro mede.

A fórmula do quadrupolo

O texto deu apenas a escala $P \sim (G/c^5)(\ddot{Q})^2$. A expressão completa é

$$P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle, \quad Q_{ij} = \mu \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right), \quad (9.4)$$

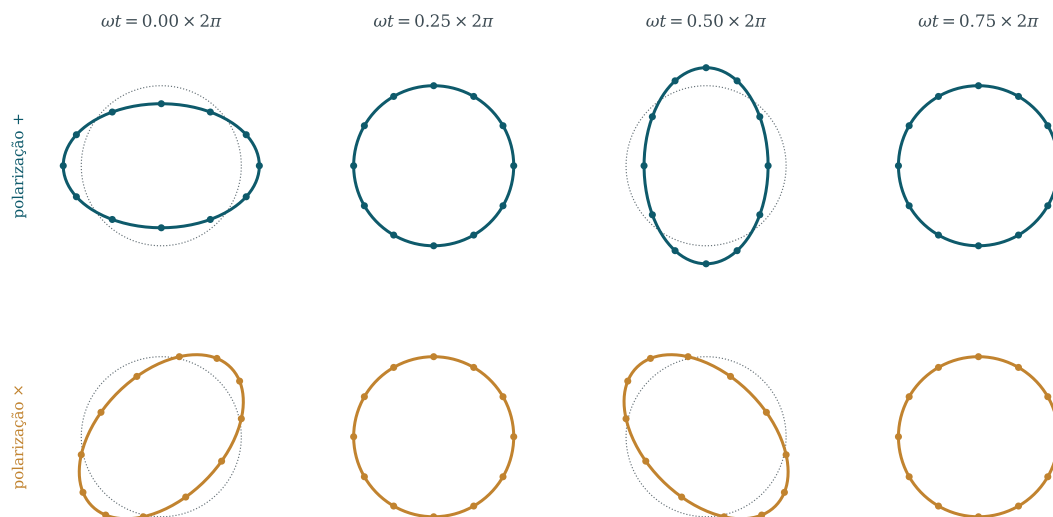


Figura 9.1. Deformação de um anel de partículas teste em quatro instantes de um período, para as duas polarizações (amplitude exagerada para $h = 0,45$; o valor real é 10^{-21}). O anel pontilhado é a configuração sem onda. A polarização $\times$ produz exatamente o mesmo padrão da $+$, girado de 45° — e não uma deformação de tipo novo. Em $\omega t = \pi/2$ e $3\pi/2$ o anel volta a ser circular: a onda não desloca as partículas em média, apenas oscila a distância entre elas.

com $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ a massa reduzida e Q_{ij} o quadrupolo *sem traço*. Para testar a constante $1/5$ e o fator $32/5$ da forma fechada, derivamos Q_{ij} numericamente por um estêncil de sete pontos e comparamos.

a [km]	P numerico [W]	P fechado [W]	erro rel.	saída
100000	1.755723e+30	1.755723e+30	1.14e-07	
1000000	1.755723e+25	1.755723e+25	1.14e-07	
10000000	1.755723e+20	1.755723e+20	1.14e-07	
-- para comparacao, o sistema Terra-Sol --				
P (Terra-Sol) = 196.4 W (a luminosidade do Sol e' 3.8e26 W)				

O erro de 10^{-7} é o truncamento do estêncil, não física: ele é o *mesmo* nas três linhas, enquanto a potência varia por dez ordens de grandeza. Isso é o que se espera quando a expressão fechada está certa e a discrepância vem só da derivada numérica.

RESULTADO CENTRAL

O sistema Terra–Sol irradia 196 W em ondas gravitacionais — a potência de algumas lâmpadas. A luminosidade eletromagnética do Sol é $3,8 \times 10^{26}$ W, mais de 10^{24} vezes maior. O fator $c^5/G \approx 3,6 \times 10^{52}$ W na fórmula é uma potência gigantesca dividindo tudo: só massas relativísticas e compactas conseguem produzir algo detectável. Não é que a gravidade “não irradie”;

é que a escala natural de luminosidade gravitacional é absurdamente alta.

O teste de Hulse–Taylor

Antes de qualquer detecção direta, a fórmula do quadrupolo já havia sido verificada. Um sistema binário perde energia e o período orbital encolhe a uma taxa que, para órbita excêntrica, é

$$\frac{dP_b}{dt} = -\frac{192\pi}{5} \left(\frac{2\pi G}{P_b} \right)^{5/3} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3} c^5} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 - e^2)^{7/2}}. \quad (9.5)$$

```
dP_b/dt previsto pela RG = -2.4031e-12
dP_b/dt observado (bruto) = -2.4230e-12
dP_b/dt observado, ja' descontada a aceleracao galactica = -2.3980e-12
razao previsto/observado = 1.0021
realce por excentricidade f(e) = 11.86 (orbita circular irradiaria 12x menos)
```

saída

Duas coisas merecem atenção. A primeira é a concordância de 0,2 % entre uma fórmula deduzida de teoria linearizada e um pulsar a 6,4 kpc — o resultado que rendeu o Nobel de 1993. A segunda é o desconto da aceleração galáctica: o valor bruto medido difere do previsto em 0,8 %, e a maior parte dessa diferença não é falha da relatividade, mas o efeito Doppler secular da aceleração relativa entre o sistema solar e o pulsar na Galáxia. Comparar teoria com observação exige, quase sempre, remover primeiro efeitos que nada têm a ver com o fenômeno estudado.

O fator $f(e) = 11,86$ explica por que esse sistema é tão bom laboratório: com $e = 0,617$, ele irradia doze vezes mais que uma binária circular de mesmo período, porque a emissão é fortemente concentrada na passagem pelo periastro.

Inspiral e massa de chirp

Igualando a perda de energia à variação da energia orbital newtoniana, obtém-se uma equação para a frequência da onda, $f = 2f_{\text{orb}}$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^3} \right)^{5/3} f^{11/3}, \quad \mathcal{M}_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}. \quad (9.6)$$

```
massa de chirp M_c = 28.10 M_sol
f_gw na ISCO      = 67.6 Hz
f [Hz]   t ate coalescer [s]   h
20       0.845                5.549e-22
35       0.190                8.058e-22
70       0.030                1.279e-21
130      0.006                1.933e-21
integracao numerica de 20 Hz ate' a ISCO: 0.812 s
```

saída

forma fechada (20 Hz $\rightarrow$ infinito): 0.845 s

Compare com o evento real: GW150914 entrou na banda do LIGO em torno de 35 Hz e durou cerca de 0,2 segundo até a fusão, com amplitude de pico próxima de 10^{-21} . As três colunas reproduzem isso sem nenhum ajuste — massa de chirp, duração e amplitude saem todas da mesma equação de primeira ordem.

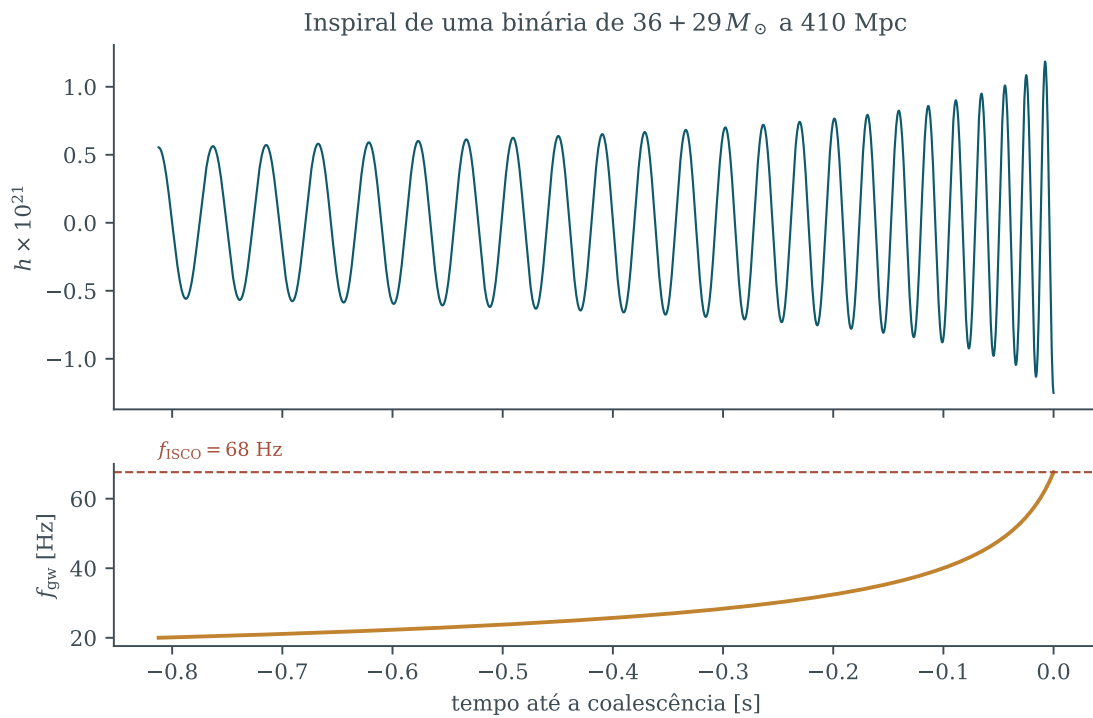


Figura 9.2. Acima, a forma de onda $h(t)$ da binária de $36 + 29 M_{\odot}$ a 410 Mpc; abaixo, a frequência. Amplitude e frequência crescem juntas, e é daí que vem o nome *chirp*. A integração para em $f_{\text{ISCO}} = 68$ Hz, onde a aproximação de órbita quase newtoniana deixa de valer e só a relatividade numérica descreve o que acontece.

RESULTADO CENTRAL

A frequência depende de m_1 e m_2 apenas pela combinação $\mathcal{M}_c$. Essa é a razão física de a massa de chirp ser o parâmetro mais bem medido em qualquer detecção: a fase do sinal, acumulada ao longo de centenas de ciclos, a determina com precisão de poucos por cento, enquanto as massas individuais só se separam por correções de ordem superior. Uma degenerescência na teoria vira, na prática, uma hierarquia de incertezas observacionais.

9.11.2 Mathematica

PROGRAMA

[baixar →](#)

codigo/cap09_ondas_simbolico.wl

Linearização das equações de Einstein, gauge de Lorenz, onda plana em gauge TT e dedução exata do fator 32/5.

O papel do cálculo simbólico aqui é o de derivar o que o numérico apenas usa. O script parte de $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$, expande o tensor de Ricci em primeira ordem e mostra que, no gauge de Lorenz, ele colapsa no operador de onda.

Imposto $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, as equações de campo linearizadas viram

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu},$$

uma equação de onda com fonte, idêntica em estrutura à do potencial eletromagnético em gauge de Lorenz. O segundo bloco confirma que a matriz TT é solução, tem traço nulo e é transversal, e calcula a componente de curvatura que entra no desvio geodésico, $R_{1010} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_+$.

Note que $\square h^{\text{TT}} = 0$ vale para *qualquer* par de funções h_+ e $h_\times$ de $(t - z)$: a equação não escolhe uma forma de onda, apenas exige que ela se propague à velocidade da luz sem dispersão. E $R_{1010} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_+$ é a ponte com a Equação (9.3): o que o detector mede é curvatura, não deslocamento.

O último bloco deriva a Equação (9.4) para a binária circular sem nenhuma aproximação numérica: monta Q_{ij} da órbita, deriva três vezes em t e simplifica, obtendo diretamente o fator 32/5.

RESULTADO CENTRAL

O resultado simbólico e a derivação numérica concordam — e é a combinação das duas que constitui a verificação. O Mathematica prova que o fator é exatamente 32/5 para *quaisquer* massas e separação; o Python confirma, com números independentes, que a implementação usada para produzir as figuras não tem erro de digitação. Nenhuma das duas checagens, sozinha, faria esse trabalho.

9.12 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 9.1. FÁCIL Schutz §9.2

Escreva $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. (a) Quantas componentes independentes tem $h_{\mu\nu}$? (b) Quantas são eliminadas pelo gauge de Lorenz? (c) Quantas restam após usar a liberdade de gauge residual, e como esse número se relaciona com as polarizações observadas?

Exercício 9.2. FÁCIL Schutz §9.3

Uma onda com $h \sim 10^{-21}$ atravessa um interferômetro de braços $L = 4$ km. (a) Calcule ΔL . (b) Compare com o diâmetro de um próton ($\sim 10^{-15}$ m). (c) Explique, em uma frase cada, os três recursos que tornam a medida possível: cavidades ressonantes, medida de fase e filtragem casada.

Exercício 9.3. MÉDIO Schutz §9.2

Uma onda com polarização $+$ propaga-se ao longo de z . (a) Escreva h_{ij}^{TT} . (b) Use a equação de desvio geodésico para obter o deslocamento de partículas de um anel no plano xy , e mostre que a deformação é $\delta x/x = +\frac{1}{2}h_+$ e $\delta y/y = -\frac{1}{2}h_+$. (c) Desenhe o anel em quatro instantes de um período e mostre que a polarização $\times$ dá o mesmo padrão girado de 45° .

Exercício 9.4. MÉDIO Schutz §9.5

A fórmula do quadrupolo dá, para uma binária circular de massas m_1 e m_2 e separação a , $P = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5}$. (a) Aplique-a ao sistema Terra–Sol e obtenha a potência irradiada. (b) Estime o tempo de coalescência resultante e compare com a idade do Universo. (c) Explique, a partir da estrutura da fórmula, por que apenas objetos compactos e próximos produzem sinais detectáveis.

Exercício 9.5. DIFÍCIL Schutz §9.4

Sistemas isolados não irradiam nos multipolos mais baixos. (a) Mostre que a conservação da massa total impede radiação monopolar. (b) Mostre que a conservação do momento linear (equivalentemente, o movimento inercial do centro de massa) impede radiação dipolar de massa. (c) Mostre que a conservação do momento angular impede a radiação dipolar de corrente. (d) Conclua que o quadrupolo é o primeiro momento radiativo e explique por que um colapso esfericamente simétrico não emite ondas gravitacionais, por mais violento que

seja.

9.13 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **O pulsar duplo.** Em `cap09_ondas.py`, troque os parâmetros de PSR B1913+16 pelos de PSR J0737-3039 ($m_1 = 1,338 M_\odot$, $m_2 = 1,249 M_\odot$, $P_b = 2,45$ h, $e = 0,088$) e compare a previsão com o valor medido, $-1,252 \times 10^{-12}$. Explique por que esse sistema decai a uma taxa comparável à de B1913+16 apesar de ter excentricidade quase nula.
2. **Polarização circular.** Modifique `desloca_anel` para somar as duas polarizações com defasagem de 90° , $h_+ \cos \omega t + h_\times \sin \omega t$, e gere a animação em quatro instantes. Mostre que o anel passa a *girar* em vez de oscilar. Relacione o resultado com a inclinação da órbita da binária em relação à linha de visada, e explique como essa assinatura é usada para inferir a inclinação de um evento real.
3. **As bandas dos detectores.** Varra a massa total de 1 a $10^9 M_\odot$ em `f_isco` e determine quais faixas de massa caem na banda do LIGO (10–1000 Hz) e na do LISA (10^{-4} – 10^{-1} Hz). Some ao script o cálculo da energia total irradiada do infinito até a ISCO e mostre que ela é da ordem de alguns por cento de Mc^2 . Que classe de objetos cada instrumento seleciona?

Soluções esféricas, estrelas e Schwarzschild

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Aplicar as equações de Einstein a sistemas esfericamente simétricos e extrair previsões observáveis da geometria de Schwarzschild.

10.1 Métrica de Schwarzschild

A solução exterior esfericamente simétrica, estática e de vácuo é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

com

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Em unidades $G = c = 1$, substituímos GM por M .

10.2 Redshift gravitacional

Para observadores estáticos em Schwarzschild, a frequência de um fóton emitido em r_e e observado em r_o satisfaz

$$\frac{v_o}{v_e} = \sqrt{\frac{1 - 2GM/r_e}{1 - 2GM/r_o}}.$$

Se o observador está muito longe, $r_o \rightarrow \infty$, então

$$v_o = v_e \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_e}}.$$

10.3 Geodésicas e potencial efetivo

No plano equatorial $\theta = \pi/2$, há duas constantes de movimento:

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}, \quad L = r^2 \dot{\phi}.$$

Para partículas massivas,

$$\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = E^2, \quad V_{\text{ef}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right).$$

Para fótons, o termo 1 é substituído por 0.

10.4 Estrelas relativísticas

Dentro de uma estrela estática e esfericamente simétrica, a matéria pode ser modelada por fluido perfeito. A equação de equilíbrio relativístico é a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Ela reduz a equação hidrostática newtoniana quando $p \ll \rho$ e $2m/r \ll 1$.

10.5 Coordenada areal

Na métrica de Schwarzschild, a coordenada r não é distância radial própria. Ela é definida pela área das esferas de simetria:

$$A = 4\pi r^2.$$

A distância radial própria entre r_1 e r_2 em uma fatia $t = \text{const}$ é

$$\ell = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr.$$

Essa distinção é importante: perto do horizonte, a relação entre incremento de coordenada radial e distância própria torna-se muito diferente da intuição euclidiana.

10.6 Órbitas circulares

O potencial efetivo permite estudar órbitas circulares. Para partículas massivas, uma órbita circular satisfaz

$$\dot{r} = 0, \quad \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = 0.$$

A estabilidade exige ainda

$$\frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2} > 0.$$

Em Schwarzschild, há órbitas circulares estáveis apenas para $r > 6M$. O raio $r = 6M$ é a órbita circular estável mais interna, conhecida como ISCO. Em discos de acreção ao redor de buracos negros, essa escala é fisicamente importante, pois marca aproximadamente a borda interna de discos finos relativísticos.

10.7 Órbita de fótons

Para geodésicas nulas, o potencial efetivo é

$$V_{\text{ef}}^{(\gamma)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}.$$

A órbita circular nula ocorre em $r = 3M$. Essa órbita é instável: uma pequena perturbação leva o fóton a escapar para longe ou cair em direção ao buraco negro. A região próxima a $r = 3M$ está ligada à formação da sombra de buracos negros, pois raios luminosos podem executar trajetórias fortemente curvadas antes de chegar ao observador.

10.8 Testes clássicos

Quatro previsões tornaram a relatividade geral observacionalmente marcante. Vale enunciá-las com fórmula e com número, porque é dos números que veio a autoridade da teoria.

Avanço do periélio. A equação radial relativística contém um termo $3ML^2/r^4$ ausente do problema de Kepler, e é ele que impede a órbita de fechar. Para uma órbita de semieixo maior a e excentricidade e , o avanço por revolução é

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (10.1)$$

Para Mercúrio ($a = 5,79 \times 10^{10}$ m, $e = 0,2056$), isso dá $5,02 \times 10^{-7}$ rad por órbita, ou $42,98''$ por século — exatamente a discrepância que os astrônomos não conseguiam explicar desde Le Verrier, em 1859.

Desvio da luz. Para um raio com parâmetro de impacto $b \gg GM/c^2$,

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (10.2)$$

Na borda do Sol, $\delta = 1,75''$. O fator 4 é o ponto central: um cálculo newtoniano ingênuo, tratando o fóton como partícula, dá exatamente metade disso. A curvatura temporal e a espacial contribuem em partes iguais, e medir $1,75''$ em vez de $0,87''$ foi o que a expedição de Eddington verificou em 1919.

Redshift gravitacional. Já obtido na Seção 10.2; no limite fraco,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta\Phi}{c^2} = \frac{gh}{c^2}.$$

Para os 22,5 m da torre de Jefferson, o experimento de Pound e Rebka (1959) mediu $\Delta\nu/\nu \approx 2,5 \times 10^{-15}$ com efeito Mössbauer — o primeiro teste feito inteiramente em laboratório.

Atraso de Shapiro. O quarto teste, proposto só em 1964, é o mais direto de todos: um sinal de radar que passa perto do Sol demora *mais* que em geometria plana. Para ida e volta entre dois planetas em conjunção superior,

$$\Delta t \approx \frac{4GM}{c^3} \ln\left(\frac{4r_1 r_2}{b^2}\right), \quad (10.3)$$

o que dá cerca de $200 \mu\text{s}$ para um eco em Vênus rasante ao Sol. O atraso não é ilusão de trajetória mais longa: é o tempo coordenado a mais que a luz leva para atravessar uma região onde g_{tt} e g_{rr} diferem de 1.

RESULTADO CENTRAL

Os quatro testes sondam coisas diferentes da mesma métrica. O redshift mede apenas g_{tt} e é compatível com qualquer teoria que respeite o princípio da equivalência — ele não distingue a relatividade geral de suas rivais. O desvio da luz e o atraso de Shapiro medem a combinação de g_{tt} com g_{rr} , e é aí que o fator 2 entre a previsão newtoniana e a relativística aparece. O avanço do periélio é o único sensível ao termo de ordem seguinte. Um teste que confirma a teoria não vale tanto quanto um que saiba dizer *qual* pedaço da métrica está sendo testado.

Exemplo 10.1. Para emissão em r_e e observação no infinito, o fator de redshift em Schwarzschild é

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_e} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_e}}.$$

Se r_e se aproxima de $2M$, a frequência observada no infinito tende a zero. Isso não significa que o fóton “perde toda energia localmente”; significa que a comparação entre o emissor próximo ao horizonte e o observador no infinito envolve uma diferença gravitacional extrema.

10.9 Lentes gravitacionais

A Equação (10.2) foi verificada em 1919 como uma curiosidade sobre a posição aparente de estrelas. Hoje ela é um instrumento de medida, e a passagem de um para outro é apenas geometria.

Considere uma massa M (a *lente*) entre nós e uma fonte distante. Sejam D_L , D_S e D_{LS} as distâncias observador–lente, observador–fonte e lente–fonte. Se a fonte está em posição angular β e a vemos em θ , a geometria do triângulo com o desvio $\delta = 4GM/(c^2b)$ e $b = D_L\theta$ dá a **equação da lente**:

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}, \quad \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}. \quad (10.4)$$

O ângulo θ_E é o **raio de Einstein**, e é a única escala do problema.

Três consequências saem daí quase sem conta. Primeiro, se o alinhamento é perfeito ($\beta = 0$), a solução é $\theta = \pm\theta_E$: a fonte aparece como um *anel* de raio θ_E — o anel de Einstein. Segundo, para $\beta \neq 0$ a equação é quadrática e sempre tem duas raízes de sinais opostos: toda lente esférica produz *duas* imagens, uma de cada lado da lente. Terceiro, como o desvio não altera o brilho superficial mas altera o ângulo sólido, as imagens são amplificadas; a amplificação total, com $u = \beta/\theta_E$, é

$$\mu = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}, \quad (10.5)$$

que diverge quando $u \rightarrow 0$ — o alinhamento perfeito é infinitamente brilhante no limite de fonte pontual.

Exemplo 10.2. Duas escalas de θ_E . Para uma estrela de $1 M_\odot$ a 4 kpc, com a fonte a 8 kpc, $\theta_E \approx 1$ miliarcossegundo: pequeno demais para separar as imagens. É o regime de *microlente*, no qual não se resolve nada e o que se observa é a amplificação $\mu(t)$ variando enquanto a lente cruza a linha de visada — a técnica que detecta objetos compactos escuros e exoplanetas.

Para um aglomerado de galáxias de $10^{14} M_{\odot}$ a $z \sim 0,3$, com a fonte a $z \sim 1$, θ_E é da ordem de dezenas de segundos de arco. Aí as imagens múltiplas e os arcos são resolvidos diretamente, e a Equação (10.4) inverte-se para *pesar* o aglomerado.

RESULTADO CENTRAL

A lente mede M dentro de θ_E sem nenhuma hipótese sobre o que a massa é, se emite luz, ou se está em equilíbrio dinâmico. É a única forma direta de pesar matéria escura. Quando a massa medida por lenteamento excede sistematicamente a massa luminosa — e excede, por fatores de cinco a dez —, a conclusão não depende de modelo de população estelar nem de hipótese virial. É por isso que o lenteamento do aglomerado da Bala é considerado a evidência mais limpa da existência de matéria escura.

10.10 Problemas orientados

1. **Raio de Schwarzschild.** Calcule $r_s = 2GM/c^2$ para o Sol e para a Terra. Compare com seus raios físicos.
2. **Redshift fraco.** Expanda $\sqrt{1 - 2M/r}$ para $M/r \ll 1$ e mostre que recupera $\Delta\nu/\nu \approx \Delta\Phi$.
3. **Órbita de fótons.** Derive a condição $r = 3M$ a partir do potencial efetivo nulo.
4. **ISCO.** Pesquise algebricamente as condições de circularidade e estabilidade do potencial massivo e identifique por que $r = 6M$ é especial.
5. **Queda radial.** Para $L = 0$, escreva a equação radial de uma partícula que cai a partir do repouso no infinito. Interprete $E = 1$.
6. **Atraso de Shapiro.** Explique qualitativamente por que um raio de luz que passa perto do Sol demora mais que em geometria plana.

10.11 Erros comuns e interpretação

O primeiro cuidado em Schwarzschild é não confundir a coordenada r com distância radial própria. O raio r é definido pela área das esferas de simetria. Essa escolha é extremamente conveniente, mas a distância própria radial envolve o fator $(1 - 2M/r)^{-1/2}$. Muitos paradoxos aparentes perto do horizonte nascem de tratar r como se fosse uma régua euclidiana.

Outro ponto importante é que o tempo coordenado t é adaptado ao observador distante, não ao observador em queda. Quando uma partícula se aproxima

de $r = 2M$, o tempo t necessário para cruzar o horizonte diverge. O tempo próprio da partícula, porém, permanece finito. A divergência de t expressa uma limitação das coordenadas de Schwarzschild para cobrir o horizonte, não uma barreira física local para quem cai.

Por fim, órbitas em Schwarzschild devem ser lidas com potencial efetivo, mas esse potencial é uma ferramenta, não uma energia potencial newtoniana literal. Ele resume a equação radial usando constantes de movimento. Sua forma permite visualizar pontos de retorno, órbitas circulares e estabilidade, mas a dinâmica subjacente continua sendo geodésica em espaço-tempo curvo.

10.12 Resolução numérica

Três resultados deste capítulo foram enunciados sem conta explícita: o valor da ISCO, a precessão do periélio e o comportamento do tempo coordenado perto do horizonte. Nenhum deles é acessível por integração em forma fechada elementar, e é justamente aí que o cálculo numérico deixa de ser ilustração e passa a ser método. Esta seção resolve os três, valida cada resultado contra um limite conhecido e produz as figuras usadas nas seções anteriores. Os scripts completos estão em código; aqui reproduzimos apenas os trechos que carregam a física.

Trabalhamos com $G = c = 1$ e $M = 1$, de modo que r é medido em massas gravitacionais: $r = 6$ significa $r = 6GM/c^2$. Para uma partícula massiva no plano equatorial, com E e L conservados por unidade de massa de repouso,

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - V_{\text{ef}}(r), \quad V_{\text{ef}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (10.6)$$

ONDE SE ERRA

Integrar diretamente $dr/d\tau = \pm\sqrt{E^2 - V_{\text{ef}}}$ é a primeira tentativa de quase todo mundo, e ela falha: nos pontos de retorno o radicando passa por zero e o integrador ou trava ou escolhe o sinal errado. Derive a equação (10.6) uma vez em τ e integre a forma de segunda ordem,

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2} + \frac{L^2}{r^3} - \frac{3ML^2}{r^4},$$

que é regular nos pontos de retorno e vale exatamente, sem aproximação de campo fraco.

10.12.1 Python

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap10_geodesicas_schwarzschild.py`

ISCO, precessão do periélio em campo forte, deflexão da luz e queda radial.

Órbitas circulares e a ISCO

Órbitas circulares são extremos de V_{ef} . A família de raios circulares sai de $V'_{\text{ef}}(r) = 0$, que dá $L^2 = Mr^2/(r - 3M)$; a ISCO é o ponto em que mínimo e máximo se fundem, isto é, onde $V''_{\text{ef}} = 0$ ao longo dessa família. Isso é uma raiz unidimensional, resolvida com `brentq`.

```

r_ISCO (numerico) = 6.0000000000 M      (exato: 6 M)
L_ISCO           = 3.4641016151 M      (exato: sqrt(12) = 3.4641016151)
E_ISCO           = 0.9428090416        (exato: sqrt(8/9) = 0.9428090416)
eficiencia de acrecao 1 - E_ISCO = 0.057191 (5.72 % da massa de repouso)
orbita de fotons   = 3.0000000000 M      (exato: 3 M)

```

RESULTADO CENTRAL

O número $1 - E_{\text{ISCO}} = 5,72\%$ não é um detalhe numérico: é a fração da massa de repouso que um disco fino pode irradiar antes que a matéria mergulhe no buraco negro. Compare com $\sim 0,7\%$ da fusão de hidrogênio. Acreção em buraco negro sem rotação já é quase uma ordem de grandeza mais eficiente que a fonte de energia das estrelas.

Precessão do periélio

Com p (semi-latus rectum) e e dados, as constantes de movimento ficam determinadas, e o periélio ocorre sempre que $\dot{r}$ muda de sinal de negativo para positivo. Localizamos esses instantes por interpolação linear e medimos a diferença azimutal entre periélios consecutivos.

```

Delta phi por orbita, numerico = 1.231264 rad
Delta phi por orbita, 6 pi M/p = 0.942478 rad
exato para e -> 0: 2 pi [(1-6M/p)^(-1/2) - 1] = 1.226658 rad

p/M      numerico      6 pi M/p      razao
  20     1.231264e+00    9.424778e-01    1.3064
  50     4.151280e-01    3.769911e-01    1.1012
 200     9.644314e-02    9.424778e-02    1.0233
1000     1.893557e-02    1.884956e-02    1.0046

Mercurio: 5.0187e-07 rad/orbita -> 42.98 arcsec/seculo

```

Vale examinar essa saída com cuidado, porque ela contém três lições diferentes. Primeiro, em $p = 20M$ a fórmula $6\pi M/p$ erra por 31 %: ela é apenas o termo de primeira ordem de uma série em M/p , e o campo ali não é fraco. Segundo, a última coluna mostra a razão tendendo a 1 conforme p cresce — é assim que se verifica que uma aproximação está sendo usada dentro do seu domínio de validade. Terceiro, o valor numérico 1,2313 para $e = 0,4$ está próximo do resultado exato 1,2267 obtido adiante para órbitas quase circulares; a diferença é o efeito da excentricidade, de ordem e^2 .

E, ao fim, o mesmo código aplicado a Mercúrio devolve os 42,98'' por século que Einstein calculou em novembro de 1915 — o primeiro número que a teoria acertou.

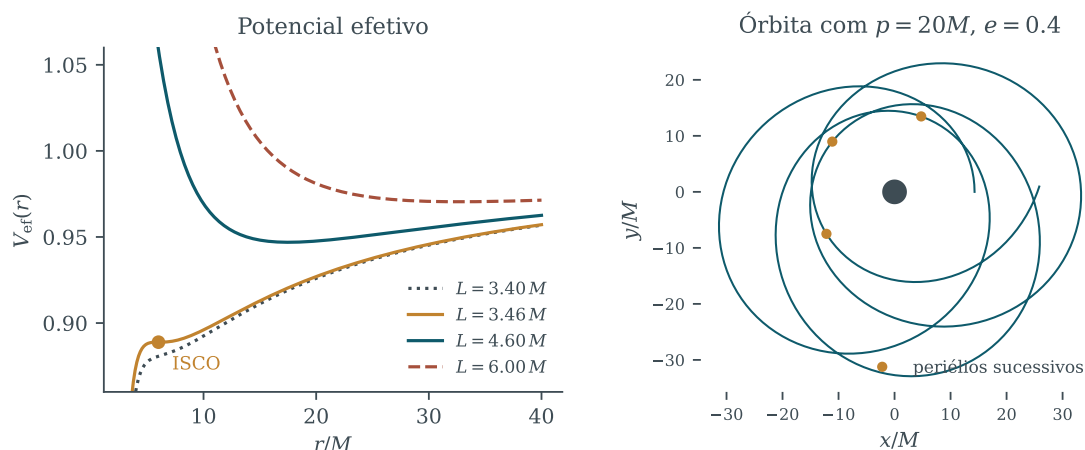


Figura 10.1. À esquerda, o potencial efetivo (10.6) para vários valores de L . Abaixo de $L = \sqrt{12}M$ o poço desaparece e não há órbita ligada; o ponto de inflexão marca a ISCO. À direita, a órbita integrada com $p = 20M$ e $e = 0.4$: os periélos sucessivos (em âmbar) não se repetem no mesmo ângulo, e a órbita não fecha. O disco central é o horizonte.

Deflexão da luz

Para geodésicas nulas convém trocar de variável para $u = 1/r$ e usar ϕ como parâmetro, o que transforma o problema em $u'' + u = 3Mu^2$. O raio vem do infinito ($u = 0$), passa pelo periastro e volta ao infinito; o evento de retorno a $u = 0$ é detectado pelo próprio integrador.

b/M	numerico	4M/b	+ 15 pi M^2/(4b^2)	saída
10	5.903958e-01	4.000000e-01	5.178097e-01	
50	8.508345e-02	8.000000e-02	8.471239e-02	
200	2.029997e-02	2.000000e-02	2.029452e-02	
1000	4.011823e-03	4.000000e-03	4.011781e-03	
borda do Sol: 1.751 arcsec				

A terceira coluna inclui a correção de segunda ordem. Note como ela recupera quase todo o erro em $b = 50M$ e praticamente todo em $b \geq 200M$, mas ainda falha em $b = 10M$: perto da órbita de fótons nenhuma expansão em M/b sobrevive.

Queda radial e a divergência do tempo coordenado

tempo proprio ate' o horizonte	= 33.700870 M	saída
tempo proprio ate' r = 0	= 35.124074 M	
ate' r = 3.000 M :	tau = 32.4099 M t = 40.9383 M	
ate' r = 2.100 M :	tau = 33.5873 M t = 47.1540 M	
ate' r = 2.010 M :	tau = 33.6897 M t = 51.9068 M	
ate' r = 2.001 M :	tau = 33.6998 M t = 56.5266 M	

Esta é a tabela mais eloquente do capítulo. A cada fator de dez que aproxi-

mamos o alvo do horizonte, o tempo próprio muda na quarta casa decimal — a queda está praticamente terminada — enquanto o tempo coordenado sobe mais cinco unidades de M , sem sinal de parar. A divergência é logarítmica, e o observador em queda não sente absolutamente nada de especial ao cruzar $r = 2M$.

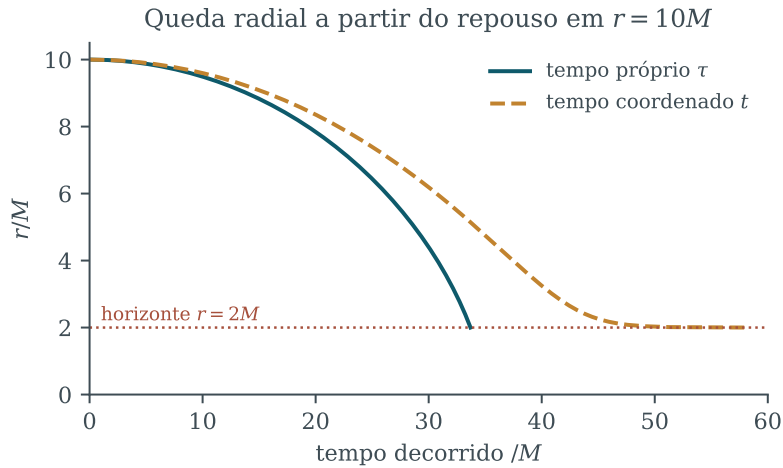


Figura 10.2. Queda radial a partir do repouso em $r = 10M$. Em tempo próprio a trajetória cruza o horizonte e chega a $r = 0$ em tempo finito; em tempo coordenado ela se acumula assintoticamente sobre $r = 2M$. As duas curvas descrevem a mesma queda, medida por relógios diferentes.

10.12.2 Mathematica

PROGRAMA

[baixar →](#)

codigo/cap10_schwarzschild_simbolico.wl

Christoffel, Riemann e Ricci de Schwarzschild; Kretschmann; extração exata da ISCO e da precessão.

O papel do cálculo simbólico aqui é complementar, não redundante: ele fornece as expressões exatas contra as quais o resultado numérico é conferido. Os símbolos de Christoffel, o tensor de Riemann e o de Ricci são construídos a partir da métrica com as mesmas convenções de índice do Capítulo 6.

O mesmo tensor de Riemann fornece o escalar de Kretschmann, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 48M^2/r^6$, citado na Seção 11.1 para separar singularidade de coordenada de singularidade física.

A parte mais útil é a extração exata da ISCO e da precessão. Escrevendo $q = L^2$, o script resolve $\partial_r V_{\text{ef}} = 0$ para obter a família de órbitas circulares, $q = Mr^2/(r - 3M)$, impõe também $\partial_r^2 V_{\text{ef}} = 0$ e recupera $r = 6M$, $q = 12M^2$; em seguida compara as frequências radial e azimuthal.

O resultado é

$$\Delta\phi_{\text{órbita}} = 2\pi \left[\left(1 - \frac{6M}{r} \right)^{-1/2} - 1 \right] = \frac{6\pi M}{r} + \frac{27\pi M^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{M^3}{r^3}\right), \quad (10.7)$$

válido no limite de órbitas quase circulares. Duas leituras: o primeiro termo é exatamente a fórmula clássica usada para Mercúrio, e a expressão inteira diverge em $r = 6M$ — na ISCO a frequência de oscilação radial vai a zero, a órbita deixa de precessar e passa a espiralar.

RESULTADO CENTRAL

A verificação cruzada é o produto real desta seção. O integrador devolveu 1,231264 para uma órbita com $e = 0,4$; a expressão exata (10.7) dá 1,226658 no limite $e \rightarrow 0$; a fórmula de primeira ordem dá 0,942478. Os dois primeiros concordam em três dígitos e discordam do terceiro por 30 %. Um resultado numérico que não é confrontado com um limite analítico conhecido não é resultado: é palpite com casas decimais.

10.13 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 10.1. FÁCIL Schutz §10.2

A métrica de Schwarzschild tem $g_{rr} = (1 - 2M/r)^{-1}$. (a) Calcule o raio de Schwarzschild do Sol e da Terra. (b) Escreva a integral da distância própria radial entre r_1 e r_2 . (c) Avalie-a numericamente entre $r = 2M$ e $r = 10M$ e compare com a diferença coordenada $\Delta r = 8M$.

Exercício 10.2. FÁCIL Schutz §10.4

Para observadores estáticos em Schwarzschild, o redshift entre r_e e o infinito é $\nu_\infty/\nu_e = \sqrt{1 - 2M/r_e}$. (a) Expanda para $M/r \ll 1$ e mostre que recupera $\Delta\nu/\nu \approx \Delta\Phi/c^2$. (b) Calcule o desvio para um fóton emitido na superfície do Sol. (c) Calcule-o para os 22,5 m da torre do experimento de Pound e Rebka.

Exercício 10.3. MÉDIO Schutz §11.1

No plano equatorial, $\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = E^2$ com $V_{\text{ef}} = (1 - 2M/r)(1 + L^2/r^2)$. (a) Obtenha a condição de órbita circular e mostre que $L^2 = Mr^2/(r - 3M)$. (b) Impondo também $V''_{\text{ef}} = 0$, obtenha $r_{\text{ISCO}} = 6M$. (c) Calcule a energia por unidade de massa na ISCO e mostre que a eficiência de acreção $1 - E$ vale 5,72 %.

Exercício 10.4. MÉDIO Schutz §11.1

Deduza os testes clássicos. (a) A partir da equação radial, mostre que o avanço do periélio por órbita é $\Delta\phi = 6\pi GM/[c^2 a(1 - e^2)]$ e avalie-o para Mercúrio em segundos de arco por século. (b) Para geodésicas nulas, mostre que a deflexão é $\delta = 4GM/(c^2 b)$ e avalie-a na borda do Sol. (c) Explique de onde vem o fator 2 em relação ao cálculo newtoniano ingênuo.

Exercício 10.5. DIFÍCIL Schutz §10.6

Considere uma estrela estática de densidade uniforme ρ . (a) Integre $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ e escreva a equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff para esse caso. (b) Resolva-a analiticamente para $p(r)$ com a condição $p(R) = 0$. (c) Mostre que a pressão central diverge quando $2GM/Rc^2 \rightarrow 8/9$ e conclua que nenhuma estrela estática pode ser mais compacta que esse limite, qualquer que seja a equação de estado.

10.14 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **O atraso de Shapiro.** Acrescente a `cap10_geodesicas_schwarzschild.py` a integração do tempo coordenado de um sinal de radar que vai da Terra a Vênus rente ao Sol e volta. Compare com o tempo que o mesmo percurso levaria em geometria plana e verifique que a diferença é de cerca de $200 \mu\text{s}$. Estude como o atraso cresce quando o parâmetro de impacto se aproxima da borda solar.
2. **Os anéis de fóton.** Modifique a função `deflexao` para tabelar a deflexão entre $b = 3\sqrt{3}M$ e $b = 10M$. Mostre que ela diverge logaritmicamente quando b tende ao parâmetro de impacto crítico e determine numericamente o coeficiente da divergência. Relacione o resultado com a formação dos anéis de fóton na sombra de um buraco negro.
3. **O limite de Buchdahl.** Escreva a integração da equação TOV para uma estrela de densidade uniforme, partindo do centro com uma pressão central p_c e parando onde $p = 0$. Varra p_c e faça o gráfico de $2GM/Rc^2$ contra p_c . Mostre que a compactidade satura em $8/9$ e que a pressão central diverge ali — nenhuma estrela estática pode ser mais compacta, qualquer que seja a equação de estado.

Buracos negros

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Separar singularidades físicas de singularidades de coordenadas, compreender o horizonte de eventos e introduzir buracos negros astrofísicos.

11.1 Horizonte

Em Schwarzschild, $r = 2M$ é o raio do horizonte de eventos. A divergência de g_{rr} nessa coordenada não é uma singularidade física. Invariantes de curvatura permanecem finitos em $r = 2M$ e divergem em $r = 0$.

Um invariante útil é o escalar de Kretschmann:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2}{r^6}.$$

Ele é finito no horizonte e diverge na singularidade central.

11.2 Coordenadas regulares

Coordenadas de Eddington-Finkelstein mostram que raios de luz podem atravessar o horizonte para dentro em tempo finito. A dificuldade em $r = 2M$ nas coordenadas de Schwarzschild é análoga a uma má escolha de mapa para descrever uma região perfeitamente regular.

11.3 Buracos negros em rotação

Buracos negros astrofísicos são descritos, em boa aproximação, pela métrica de Kerr, caracterizada por massa M e momento angular J . A rotação produz arrastamento de referenciais e uma ergorregião, onde observadores não podem permanecer estáticos em relação ao infinito.

11.4 Termodinâmica

Classicamente, a área do horizonte não diminui. Com efeitos quânticos, buracos negros possuem temperatura

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}$$

para o caso de Schwarzschild. A entropia é proporcional à área do horizonte.

11.5 Horizon versus singularidade

O horizonte de eventos é uma superfície causal: ele separa eventos que podem enviar sinais ao infinito futuro daqueles que não podem. A singularidade é uma região onde a descrição clássica prevê curvaturas divergentes e geodésicas incompletas. Confundir os dois conceitos leva a interpretações erradas. Um observador em queda livre atravessa o horizonte de um buraco negro grande sem encontrar uma parede local. Já a aproximação da singularidade envolve marés crescentes que destroem qualquer objeto físico.

Para um observador distante em coordenadas de Schwarzschild, a queda de um objeto parece congelar perto de $r = 2M$, com sua luz cada vez mais desviada para o vermelho. Para o objeto em queda, a travessia do horizonte ocorre em tempo próprio finito. As duas descrições usam noções diferentes de tempo e não se contradizem.

11.6 Diagramas causais

Diagramas de Penrose compactificam infinitos para representar a estrutura causal global. Linhas de luz são desenhadas a 45° , o que facilita ver quais regiões podem influenciar outras. Para Schwarzschild, o diagrama mostra claramente que, dentro do horizonte futuro, qualquer trajetória causal aponta inevitavelmente para menores valores de r . Nesse sentido, a singularidade fica no futuro de todos os observadores que cruzam o horizonte.

11.7 Buracos negros reais

Buracos negros astrofísicos não são exatamente Schwarzschild. Eles giram, crescem matéria, podem estar em binárias e são perturbados pelo ambiente. Ainda assim, a solução de Schwarzschild é o laboratório conceitual mais simples para entender horizonte, geodésicas e redshift. A solução de Kerr generaliza o caso

para rotação e introduz fenômenos novos, como ergosfera e arrastamento de referenciais.

Observacionalmente, buracos negros são estudados por órbitas estelares, emissão de discos de acreção, jatos relativísticos, sombras observadas por interferometria de base muito longa e ondas gravitacionais de fusões. Cada canal testa uma região diferente da geometria.

11.8 Leis da mecânica de buracos negros

Classicamente, a área do horizonte desempenha papel análogo à entropia: ela não diminui em processos físicos gerais. A gravidade superficial é análoga à temperatura, e a massa obedece uma relação semelhante à primeira lei da termodinâmica. A descoberta da radiação Hawking tornou essa analogia literal em teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo.

Atividade 11.1. Compare a dependência $T_H \propto 1/M$ com a intuição térmica comum. Por que buracos negros maiores são mais frios? O que isso sugere sobre a evaporação de buracos negros pequenos?

11.9 Problemas orientados

1. **Kretschmann.** Use $K = 48M^2/r^6$ para comparar a curvatura no horizonte de buracos negros de massas M e $10M$.
2. **Tempo próprio de queda.** Discuta por que um observador em queda livre cruza o horizonte em tempo próprio finito, embora a coordenada t de Schwarzschild divirja.
3. **Cone de luz.** Desenhe qualitativamente cones de luz fora, sobre e dentro do horizonte. Indique por que dentro do horizonte diminuir r é inevitável.
4. **Ergosfera.** Explique a diferença entre horizonte e ergosfera em Kerr. Por que a ergosfera permite extração de energia?
5. **Temperatura.** Estime como a temperatura de Hawking muda quando a massa é multiplicada por 10^6 .
6. **Entropia de área.** Discuta por que a entropia proporcional à área, e não ao volume, sugere uma física gravitacional profundamente diferente da termodinâmica comum.

11.10 Erros comuns e interpretação

Buracos negros não são aspiradores cósmicos. Longe do objeto, o campo gravitacional de um buraco negro de massa M é semelhante ao de qualquer corpo esférico com a mesma massa. Se o Sol fosse substituído por um buraco negro de mesma massa, as órbitas planetárias externas não seriam subitamente sugadas. O que muda é a existência de uma região compacta com horizonte.

Também é incorreto dizer que nada acontece no horizonte em todos os sentidos. Para um observador em queda livre, um horizonte de buraco negro suficientemente grande pode ser atravessado sem efeito local dramático. Para a estrutura causal global, porém, o horizonte é decisivo: após cruzá-lo, nenhum sinal causal pode alcançar o infinito futuro. A frase correta depende de qual pergunta está sendo feita: experiência local ou causalidade global.

A singularidade clássica em $r = 0$ não deve ser interpretada como um ponto material comum. Ela indica incompletude da teoria clássica em regime extremo. Espera-se que gravidade quântica modifique essa descrição, mas ainda não há uma teoria completa testada experimentalmente para substituir a previsão clássica.

11.11 Resolução numérica

As afirmações centrais deste capítulo foram feitas em palavras: que o horizonte é uma singularidade de coordenada, que quem cai não sente nada de especial ao cruzá-lo, que buracos negros maiores são mais frios. Cada uma delas vira um número aqui, e o resultado é menos intuitivo do que a versão verbal sugere. Os blocos geométricos usam $G = c = M = 1$; os astrofísicos usam SI e imprimem em unidades solares.

11.11.1 Python

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap11_buracos_negros.py`

Cones de luz, diagrama de Kruskal, marés no horizonte, termodinâmica de Hawking e a família de Kerr.

Os cones de luz e o que a carta cobre

Em coordenadas de Schwarzschild, os raios nulos radiais satisfazem $dt/dr = \pm(1 - 2M/r)^{-1}$, que diverge em $r = 2M$: o cone se fecha e a carta termina. Em Eddington–Finkelstein entrante, com $v = t + r_*$ e $r_* = r + 2M \ln |r/2M - 1|$, a métrica é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 d\Omega^2, \quad (11.1)$$

e os dois raios radiais são $dv/dr = 0$ (entrando) e $dv/dr = 2/(1 - 2M/r)$.

ONDE SE ERRA

O sinal de $f = 1 - 2M/r$ é a conta inteira. Para $r > 2M$ o segundo raio tem $dr > 0$ e escapa; em $r = 2M$ ele fica com $dr = 0$, parado sobre o horizonte para sempre; para $r < 2M$ ele tem $dr < 0$ e *também* cai. Não há nada de singular nessa transição — é uma mudança contínua de inclinação. O que muda é global: a partir de $r = 2M$, nenhuma direção causal aponta para fora. O horizonte não é um lugar onde algo acontece; é o lugar a partir do qual o futuro tem uma propriedade diferente.

Marés no horizonte

A aceleração de maré radial entre dois pontos separados por Δx é $2GM\Delta x/r^3$. Avaliada no próprio horizonte, $r = r_s = 2GM/c^2$, ela vale $c^6\Delta x/(4G^2M^2)$: cai como $1/M^2$.

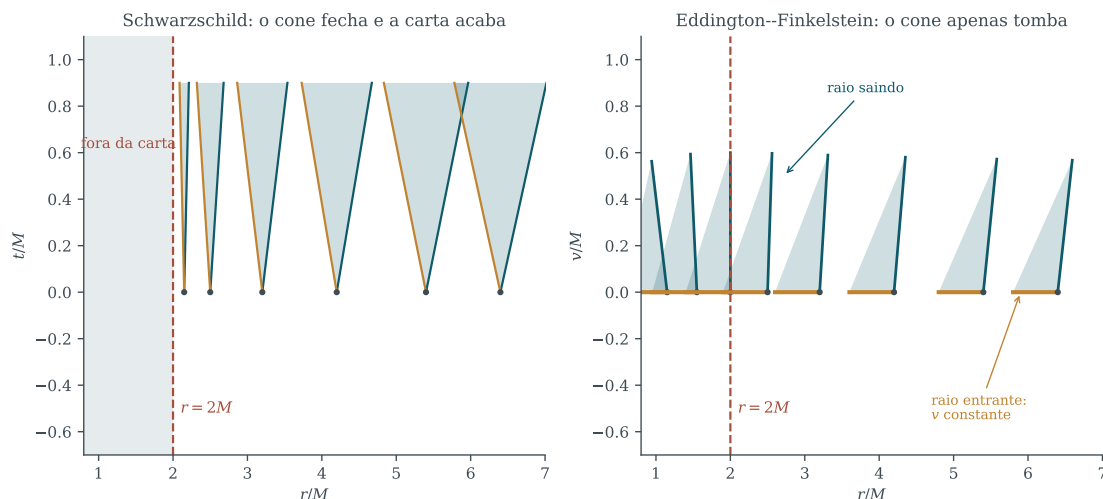


Figura 11.1. A mesma geometria em duas cartas. À esquerda, Schwarzschild: os cones se fecham ao se aproximarem de $r = 2M$ e a região sombreada simplesmente não é coberta pelas coordenadas. À direita, Eddington–Finkelstein: os cones nunca se fecham, apenas tombam progressivamente; em $r = 2M$ o raio que “sai” fica vertical, e para dentro os dois raios apontam para r decrescente.

objeto	M/M_{sol}	r_s [km]	mare em 1.8 m [g]	saída
estelar	10	29.54	$1.89\text{e}+07$	
Cygnus X-1	21	62.03	$4.29\text{e}+06$	
Sgr A*	$4.3\text{e}+06$	$1.269\text{e}+07$	0.000102	
M87*	$6.5\text{e}+09$	$1.92\text{e}+10$	$4.47\text{e}-11$	

RESULTADO CENTRAL

Um astronauta que cruzasse o horizonte de um buraco negro de $10 M_{\odot}$ sofreria uma maré de 19 milhões de g entre a cabeça e os pés — seria destruído muito antes de chegar lá. No horizonte de Sgr A* a mesma maré é de 10^{-4} g, imperceptível; no de M87*, 4×10^{-11} g. A frase “nada de especial acontece no horizonte” é rigorosamente verdadeira como afirmação sobre a *geometria local*, e ainda assim falsa como conselho prático para buracos negros estelares. O invariante que decide é o escalar de Kretschmann, $K = 48M^2/r^6$, que no horizonte vale $3/(4M^4)$ — e é por isso que a resposta depende da massa.

Termodinâmica

M/M_{sol}	T_H [K]	S/k_B	t_{evap} [anos]	saída
1	$6.169\text{e}-08$	$1.049\text{e}+77$	$2.097\text{e}+67$	
10	$6.169\text{e}-09$	$1.049\text{e}+79$	$2.097\text{e}+70$	
$4.297\text{e}+06$	$1.436\text{e}-14$	$1.938\text{e}+90$	$1.664\text{e}+87$	
buraco negro em equilíbrio com a CMB ($T = 2.7255$ K):				
$M = 2.263\text{e}-08 M_{\text{sol}} = 4.502\text{e}+22$ kg (~ 0.613 massas lunares)				

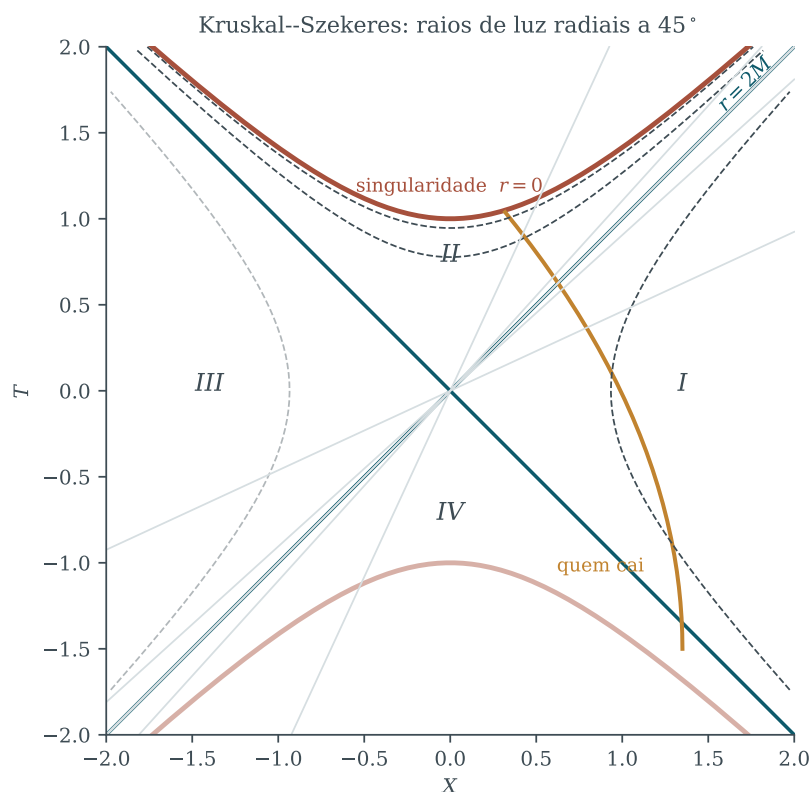


Figura 11.2. Diagrama de Kruskal-Szekeres, onde raios de luz radiais são retas a 45° . As hipérboles tracejadas são r constante e as retas claras pela origem são t constante — note que todo o horizonte, para $-\infty < t < \infty$, colapsa nas duas diagonais. A linha de mundo em amarelo cruza o horizonte sem nada de particular e termina na singularidade, que é uma *hipérbole horizontal*: um instante no futuro, não um lugar no espaço.

A entropia de um buraco negro de uma massa solar é $10^{77}k_B$. Para comparação, a entropia do Sol *inteiro* é da ordem de $10^{58}k_B$: comprimir o Sol até o horizonte multiplicaria sua entropia por 10^{19} . Buracos negros são, de longe, os objetos mais entrópicos do Universo, e é por isso que a segunda lei generalizada é uma restrição tão forte.

A última linha inverte uma intuição comum. Um buraco negro só evapora se estiver mais quente que o ambiente, e o ambiente do Universo atual é a CMB a 2,73 K. Isso exige $M < 4,5 \times 10^{22}$ kg, cerca de 0,6 massa lunar. *Todo* buraco negro conhecido está muitas ordens de grandeza acima disso: hoje todos eles absorvem mais do que irradiam. A evaporação de Hawking não é um processo em curso — é um processo que só começará quando o Universo tiver esfriado o bastante, daqui a algo como 10^{100} anos.

Kerr: o que a rotação muda

a/M	r ₊	r ₋	r _{ergo} (eq)	ISCO prog	ISCO retr	eficiencia	saída
0.000	2.0000	0.0000	2.0	6.0000	6.0000	5.72%	
0.500	1.8660	0.1340	2.0	4.2330	7.5546	8.21%	
0.900	1.4359	0.5641	2.0	2.3209	8.7174	15.58%	
0.990	1.1411	0.8589	2.0	1.4545	8.9719	26.40%	
0.998	1.0632	0.9368	2.0	1.2370	8.9944	32.10%	
limite extremo: 42.26%							

A coluna da ergosfera é constante: no equador ela fica em $2M$ para qualquer spin, enquanto o horizonte encolhe de $2M$ até M . A ergosfera não é uma casca fina em torno do horizonte — para a grande, ela é uma região espessa, e é dentro dela que o arrastamento de referenciais permite extrair energia de rotação.

RESULTADO CENTRAL

A eficiência de acreção salta de 5,72 % (estático) para 42,26 % no limite extremo $a \rightarrow M$, onde $1 - E_{\text{ISCO}} = 1 - 1/\sqrt{3}$. Compare com 0,7 % da fusão de hidrogênio: um disco em torno de um buraco negro em rotação rápida converte massa em radiação sessenta vezes mais eficientemente que uma estrela. É essa conta, e não a massa engolida, que explica por que quasares superam em brilho a galáxia inteira que os hospeda. O valor 32 % em $a = 0,998$ é o limite de Thorne, o spin máximo que a própria acreção consegue sustentar.

11.11.2 Mathematica

PROGRAMA

[baixar →](#)

codigo/cap11_buracos_negros_simbolico.wl

Regularidade de Eddington–Finkelstein no horizonte, gravidade superficial e a primeira lei.

O bloco simbólico prova o que a Figura 11.1 apenas ilustra: que a Equação (11.1) é regular no horizonte e descreve a mesma solução de vácuo.

O determinante é a chave: $\det g = -r^4 \sin^2 \theta$ vale $-16M^4 \sin^2 \theta$ em $r = 2M$, isto é, a métrica continua invertível ali. Na forma de Schwarzschild, $g_{rr} = (1 - 2M/r)^{-1}$ diverge no mesmo ponto. *A geometria é a mesma; o que era ruim era o mapa.* O termo cruzado $2 dv dr$ é o que salva o determinante.

O mesmo tensor de Riemann fornece o invariante que distingue as duas singularidades, $K = 48M^2/r^6$, finito em $r = 2M$ e divergente em $r = 0$. A gravidade superficial, $\kappa = \frac{1}{2} \partial_r (1 - 2M/r)$ avaliada no horizonte, vale $1/4M$ — e é ela que fecha a primeira lei:

RESULTADO CENTRAL

A última linha devolve exatamente 1, isto é, $T dS = dM$. Para Schwarzschild, a primeira lei da mecânica de buracos negros não é uma analogia aproximada nem um resultado de teoria quântica: é uma identidade algébrica entre $\kappa = 1/4M$, $A = 16\pi M^2$ e a própria massa. O que a radiação Hawking acrescentou não foi a relação — foi a constatação de que $T = \kappa/2\pi$ é uma temperatura de verdade, com radiação térmica de verdade, e não apenas um parâmetro com as unidades certas.

O último bloco trata de Kerr. A área do horizonte, $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$, vale $16\pi M^2$ para $a = 0$ e apenas $8\pi M^2$ para $a = M$: extrair todo o momento angular de um buraco negro extremo, a massa irreduzível mantida fixa, no máximo dobra a área — e nunca a diminui, como exige o teorema da área.

11.12 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 11.1. FÁCIL Schutz §11.2

Em $r = 2M$ a componente g_{rr} diverge. (a) Calcule o escalar de Kretschmann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 48M^2/r^6$ em $r = 2M$ e em $r \rightarrow 0$. (b) Conclua qual das duas superfícies é singularidade física. (c) Explique em uma frase a diferença entre singularidade de coordenada e singularidade de curvatura.

Exercício 11.2. FÁCIL Schutz §11.5

A temperatura de Hawking de um buraco negro de Schwarzschild é $T_H = \hbar c^3 / (8\pi G M k_B)$. (a) Calcule T_H para $M = M_\odot$. (b) Determine a massa de um buraco negro cuja temperatura iguala a da radiação cósmica de fundo, 2,73 K. (c) Conclua se algum buraco negro conhecido está evaporando hoje, e justifique.

Exercício 11.3. MÉDIO Schutz §11.2

Introduza a coordenada tartaruga $r_* = r + 2M \ln |r/2M - 1|$ e $v = t + r_*$. (a) Mostre que a métrica assume a forma $ds^2 = -(1 - 2M/r)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2$. (b) Calcule $\det g$ e mostre que ela é regular em $r = 2M$. (c) Determine as duas direções nulas radiais e mostre que, para $r < 2M$, ambas apontam para r decrescente.

Exercício 11.4. MÉDIO Schutz §11.1

Uma partícula cai radialmente do repouso no infinito. (a) Mostre que $dr/d\tau = -\sqrt{2M/r}$ e integre para obter o tempo próprio até $r = 0$. (b) Obtenha dr/dt e mostre que diverge o tempo coordenado necessário para atingir $r = 2M$. (c) Explique por que as duas descrições não se contradizem.

Exercício 11.5. DIFÍCIL Schutz §11.3

Para o buraco negro de Kerr, a área do horizonte é $A = 8\pi M(M + \sqrt{M^2 - a^2})$ e a massa irreduzível é $M_{\text{irr}} = \sqrt{A/16\pi}$. (a) Mostre que $M^2 = M_{\text{irr}}^2 + J^2/(4M_{\text{irr}}^2)$, com $J = aM$. (b) Conclua que a fração máxima de massa extraível de um buraco negro extremo, sem violar o teorema da área, é $1 - 1/\sqrt{2} \approx 29\%$. (c) Aplique o teorema da área à fusão de dois buracos negros iguais e sem spin e obtenha a cota superior da energia irradiável.

11.13 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **O buraco branco.** Refaça a figura de cones de luz de `cap11_buracos_negros.py` para coordenadas de Eddington–Finkelstein *saintes*, $u = t - r_*$. Mostre que agora a região $r < 2M$ é aquela de onde tudo necessariamente *sai*. Situe as duas cartas no diagrama de Kruskal e explique por que elas cobrem regiões diferentes da mesma solução.
2. **Um buraco negro evaporando agora.** Use `tempo_evaporacao` para determinar a massa de um buraco negro primordial cujo tempo de evaporação é exatamente a idade do Universo, 13,8 Gyr. Calcule a temperatura de Hawking e a energia típica dos fótons emitidos nos últimos segundos. Em que faixa do espectro eletromagnético essa explosão apareceria, e por que ela é procurada por telescópios de raios gama?
3. **O teorema da área em ação.** Acrescente ao script uma rotina que, dadas as massas e os spins de dois buracos negros de Kerr, calcule a área total antes da fusão e a área mínima do buraco negro final compatível com o teorema da área. Use-a para obter a cota superior da energia irradiável em uma fusão de dois buracos negros iguais e sem spin, e compare com os 5 % efetivamente irradiados em GW150914.

Cosmologia relativística

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Usar simetria cosmológica para obter a métrica FLRW, as equações de Friedmann e as relações observacionais básicas da expansão do Universo.

12.1 Princípio cosmológico

Em grandes escalas, o Universo é aproximadamente homogêneo e isotrópico. A métrica compatível com essas simetrias é

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right],$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e $k = 0, \pm 1$ representa a curvatura espacial.

12.2 Redshift cosmológico

O comprimento de onda da luz cresce com o fator de escala:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}.$$

Esse redshift não é simplesmente Doppler local; ele expressa a evolução da geometria entre emissão e observação.

12.3 Equações de Friedmann

Para fluido perfeito homogêneo,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}.$$

A conservação local fornece

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0.$$

Com uma equação de estado $p = w\rho$, segue

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}.$$

Matéria fria tem $w = 0$; radiação tem $w = 1/3$; energia escura do tipo constante cosmológica tem $w = -1$.

12.4 Distâncias em cosmologia

Em um Universo em expansão, a palavra distância precisa ser qualificada. A distância própria entre duas galáxias em uma fatia de tempo cosmológico cresce com $a(t)$. A distância comóvel remove essa expansão e permanece fixa para galáxias que acompanham o fluxo de Hubble. A distância luminosidade é definida pela relação entre luminosidade intrínseca e fluxo observado:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}.$$

A distância angular relaciona tamanho físico e tamanho angular:

$$\theta = \frac{\ell}{d_A}.$$

Em cosmologia relativística, d_L e d_A não são iguais; eles obedecem

$$d_L = (1+z)^2 d_A.$$

Essa relação é chamada dualidade de Etherington e depende da conservação do número de fótons e da propagação em geodésicas nulas.

12.5 Horizontes cosmológicos

O horizonte de partículas indica a maior distância comóvel de onde a luz pôde chegar desde o início da expansão. O horizonte de eventos cosmológico, quando existe, indica regiões que nunca poderão nos enviar sinais, mesmo esperando tempo infinito. Em um Universo dominado por constante cosmológica, a expansão acelerada produz um horizonte de eventos cosmológico.

Esses horizontes são diferentes do horizonte de um buraco negro. O horizonte de buraco negro é associado a uma região da qual não se escapa para o infinito. O horizonte cosmológico depende da história global da expansão e do observador cosmológico considerado.

12.6 Eras de dominação

Com $p = w\rho$, a densidade escala como

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}.$$

Assim, radiação decai como a^{-4} : três potências vêm da diluição do número de fótons e uma potência adicional vem do redshift da energia de cada fóton. Matéria fria decai como a^{-3} , apenas por diluição do volume. A densidade de uma constante cosmológica permanece constante.

Essa diferença produz uma sequência natural. No Universo muito jovem, a radiação domina. Depois, a matéria passa a dominar e permite crescimento mais eficiente de estruturas. Em tempos recentes, a energia escura domina e acelera a expansão.

12.7 Parâmetros observacionais

Define-se a densidade crítica

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Os parâmetros adimensionais

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$$

medem a contribuição atual de cada componente. Para $k = 0$,

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1.$$

Observações de supernovas, radiação cósmica de fundo, oscilações acústicas de bárions e estrutura em larga escala indicam um Universo aproximadamente plano, com matéria escura fria e energia escura dominante hoje.

12.8 Problemas conceituais

O modelo cosmológico padrão é extremamente bem-sucedido, mas deixa questões abertas. A natureza da matéria escura não é conhecida. A energia escura

pode ser uma constante cosmológica, mas seu valor observado é extraordinariamente pequeno em comparação com escalas naturais de teoria quântica de campos. A inflação resolve problemas de horizonte e planura em muitos modelos, mas sua realização microscópica permanece em aberto. Essas questões mostram que a cosmologia é tanto aplicação da relatividade geral quanto fronteira de física fundamental.

12.9 Problemas orientados

1. **Redshift e escala.** Calcule $a(t_e)/a(t_0)$ para $z = 1$, $z = 3$ e $z = 1100$. Interprete o último valor no contexto da radiação cósmica de fundo.
2. **Escala da radiação.** Derive $\rho_r \propto a^{-4}$ separando diluição de número e redshift de energia.
3. **Universo de matéria.** Para $k = 0$ e $\Lambda = 0$, resolva $H^2 = 8\pi G\rho/3$ com $\rho \propto a^{-3}$ e obtenha $a \propto t^{2/3}$.
4. **Universo de radiação.** Repita o problema anterior para $\rho \propto a^{-4}$ e obtenha $a \propto t^{1/2}$.
5. **Aceleração.** Use $\ddot{a}/a = -(4\pi G/3)(\rho + 3p) + \Lambda/3$ para determinar quando a expansão acelera.
6. **Distâncias.** Explique por que distância luminosidade e distância angular diferem em um Universo em expansão. Qual papel é desempenhado pelo fator $(1+z)^2$?

12.10 Erros comuns e interpretação

O redshift cosmológico não deve ser reduzido simplesmente a um efeito Doppler global. Para galáxias próximas, a lei de Hubble pode ser aproximada por uma interpretação Doppler. Em grandes distâncias, porém, a luz atravessa um espaço-tempo cuja escala muda durante a propagação. A relação $1+z = a(t_0)/a(t_e)$ resume esse efeito geométrico.

Outro cuidado é com a frase “o Universo expande para dentro de algo”. A métrica FLRW descreve a evolução das distâncias internas entre observadores comóveis. Ela não exige um espaço externo no qual o Universo esteja embutido. A pergunta correta é como a distância própria entre pontos comóveis muda com o tempo cosmológico.

A expansão acelerada também não significa que todas as distâncias aumentem em todos os sistemas. Sistemas ligados, como átomos, planetas, estrelas e galáxias virializadas, não acompanham a expansão de Hubble em sua escala in-

terna. A expansão cosmológica descreve a dinâmica média em grandes escalas, onde a hipótese de homogeneidade e isotropia se torna adequada.

12.11 Síntese conceitual do curso

A relatividade geral começa com uma mudança de linguagem: de forças em um espaço absoluto para geometria dinâmica do espaço-tempo. A relatividade especial ensina que o intervalo substitui tempo e espaço absolutos. O cálculo tensorial fornece a gramática para escrever leis independentes de coordenadas. A curvatura codifica marés e torna precisa a ideia de gravidade geométrica. As equações de Einstein dizem como matéria e energia determinam essa curvatura.

As soluções e aproximações estudadas no final do curso mostram a força da teoria. Schwarzschild descreve o exterior de corpos esféricos e introduz horizontes. Ondas gravitacionais mostram que a geometria possui graus de liberdade radiativos. Cosmologia aplica as equações de campo ao Universo como um todo. Em todos os casos, a pergunta central permanece a mesma: quais quantidades são invariantes, quais dependem do observador e quais são apenas artefatos de coordenadas?

12.12 Resolução numérica

A cosmologia de fundo é, do ponto de vista computacional, uma única função:

$$E(a) \equiv \frac{H(a)}{H_0} = \sqrt{\frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda}, \quad \Omega_k = 1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_\Lambda. \quad (12.1)$$

Tudo o mais — a evolução $a(t)$, a idade do universo, as distâncias, os horizontes — são integrais dessa expressão. Nenhuma delas tem primitiva elementar quando mais de uma componente contribui, e é por isso que a cosmologia observacional é numérica desde sempre. Medimos tempo em unidades de $1/H_0$ e distância em c/H_0 , convertendo apenas no fim. Os valores de fundo são próximos aos de Planck: $h = 0,674$, $\Omega_m = 0,315$, $\Omega_\Lambda = 0,685$, $\Omega_r = 9,24 \times 10^{-5}$.

12.12.1 Python

PROGRAMA

[baixar →](#)

`codigo/cap12_friedmann.py`

Idade do universo, evolução do fator de escala, distâncias cosmológicas e horizontes.

Escalas temporais

A idade do universo é $t_0 = \int_0^1 da/[aE(a)]$. O integrando diverge como a^{-1} em $a \rightarrow 0$ na era de matéria e como a^{-1} vezes a na de radiação, de modo que a integral converge — mas a quadratura adaptativa precisa ser avisada, e é por isso que passamos `limit=200`.

```
1/H_0 = 14.507 Gyr
idade do universo t_0 = 0.95063/H_0 = 13.791 Gyr
t_0 analitico (sem radiacao) = 0.95099/H_0 = 13.796 Gyr
[diferenca: 5.2 Myr, que e' o efeito da radiacao]
igualdade materia-radiacao: z_eq = 3408.1, t = 0.051 Myr
igualdade materia-Lambda:   z   = 0.2956, t = 10.294 Gyr
inicio da aceleracao:       z   = 0.6323, t = 7.690 Gyr
```

saída

RESULTADO CENTRAL

A comparação entre as duas primeiras linhas é o melhor teste possível do código: a solução fechada para matéria mais Λ (obtida adiante no bloco simbólico) difere da integração completa em 5 Myr, num universo de 13,8 Gyr. Essa diferença de 4×10^{-4} não é erro numérico — é exatamente a contribuição da era de radiação, ausente da solução analítica. Quando a discrepância entre numérico e analítico tem interpretação física, o código está certo.

As três últimas linhas merecem ser lidas juntas. A igualdade matéria–radiação em $z \approx 3400$ ocorre aos 51 mil anos; a matéria domina por quase dez bilhões de anos; a expansão passa a acelerar em $z \approx 0,63$, isto é, há cerca de 6 Gyr, bem antes de Λ se igualar à matéria em $z \approx 0,30$. A aceleração começa quando $\ddot{a} = 0$, ou seja, quando $\Omega_m/a^3 = 2\Omega_\Lambda$ — o fator 2 vem do termo de pressão em $\ddot{a}/a = -(4\pi/3)(\rho + 3p)$, e é uma boa pergunta de prova.

Evolução do fator de escala

Integrar $da/dt = aE(a)$ é direto, e vale a pena fazê-lo para vários universos ao mesmo tempo: as diferenças de forma são mais instrutivas que qualquer curva isolada.

Einstein-de Sitter em $t = 0.5/H_0$: $a_{\text{num}} = 0.82548181$, $(3t/2)^{(2/3)} = 0.82548181$
domínio de radiação em $t = 0.5/H_0$: $a_{\text{num}} = 1.00000000$, $(2t)^{(1/2)} = 1.00000000$

saída

Oito dígitos de concordância com $a \propto t^{2/3}$ e $a \propto t^{1/2}$. Só depois desse teste faz sentido confiar na curva de Λ CDM, para a qual não há solução elementar com radiação incluída.

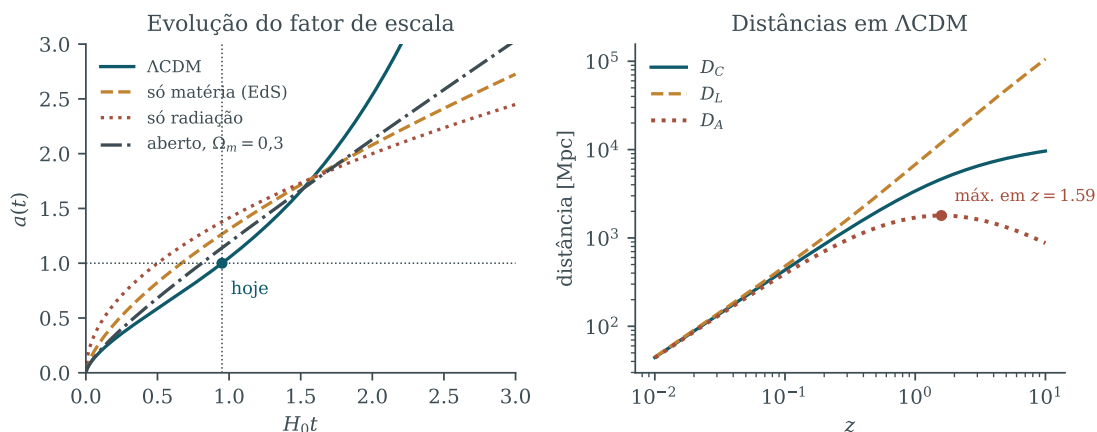


Figura 12.1. À esquerda, $a(t)$ para quatro universos. Todos passam pela mesma origem, mas Λ CDM é o único que muda de concavidade: a curva desacelera enquanto a matéria domina e volta a acelerar depois. O universo aberto expande para sempre sem nunca acelerar. À direita, as três distâncias: D_L cresce sem limite, mas D_A tem um máximo em $z \approx 1,59$ — objetos mais distantes que isso aparecem *maiores* no céu.

Distâncias e horizontes

z	D_C [Mpc]	D_L [Mpc]	D_A [Mpc]	saída
0.1	434.1	477.5	394.6	
0.5	1951.3	2927.0	1300.9	
1.0	3401.0	6802.1	1700.5	
2.0	5311.3	15934.0	1770.4	
5.0	7943.8	47662.6	1324.0	
1100.0	13866.3	15266789.6	12.6	

maximo de D_A em z = 1.5877, D_A = 1794.1 Mpc
 horizonte de partículas hoje = 14144.3 Mpc = 46.13 Glyr

ONDE SE ERRA

A última linha da tabela é a que mais confunde. Na superfície de último espalhamento, $z \approx 1100$, a distância de diâmetro angular vale 13 Mpc: a mesma superfície cuja distância comóvel é de 13,9 Gpc. Não há contradição — são grandezas diferentes, ligadas por $D_A = D_C / (1 + z)$, e é D_A que converte tamanho físico em ângulo observado. É por isso que o horizonte acústico da CMB, de cerca de 150 Mpc comóveis, subtende aproximadamente um grau no céu. Trocar D_A por D_C nessa conta erra o resultado por um fator de mil.

Note ainda que o horizonte de partículas, 46 Glyr, é maior que $ct_0 = 13,8$ Glyr. Isso não viola nada: a luz percorreu 13,8 Gyr de *tempo*, mas o espaço por onde ela passou continuou se expandindo.

12.12.2 Mathematica

PROGRAMA

[baixar →](#)

codigo/cap12_friedmann_simbolico.wl

Derivação das equações de Friedmann a partir da métrica FLRW e a solução fechada em $\sinh^{2/3}$.

O bloco simbólico faz aqui o que o numérico não pode fazer: deriva as equações de Friedmann a partir da métrica, em vez de assumi-las. É o mesmo maquinário do Capítulo 8, aplicado à métrica de Robertson–Walker.

A componente rr , combinada com a anterior, devolve $\ddot{a}/a = -(4\pi/3)(\rho + 3p)$, e a divergência covariante de $T^{\mu\nu}$ devolve $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$.

RESULTADO CENTRAL

A equação de continuidade *não* é uma terceira equação independente. Ela sai das duas primeiras por causa da identidade de Bianchi contraída, $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, provada no Capítulo 6. Vale verificar isso explicitamente no

notebook: é a demonstração mais concreta de que a conservação local da matéria está costurada na geometria, e não imposta por fora.

Por fim, a solução fechada para o caso plano com matéria e Λ , que serviu de referência para o teste numérico:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right), \quad t_0 = \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}. \quad (12.2)$$

Vale contemplar essa expressão por um instante. O $\sinh^{2/3}$ contém as duas eras: para argumento pequeno, $\sinh x \approx x$ e recuperamos $a \propto t^{2/3}$ de Einstein-de Sitter; para argumento grande, $\sinh x \approx e^x/2$ e a expansão vira exponencial. A transição entre matéria e energia escura, que na figura aparece como uma inflexão discreta, está inteira nessa única função.

12.13 Exercícios

LEITURA ORIENTADA

Cinco problemas por capítulo, para entrega. A marca indica a dificuldade e a *seção de leitura* do Schutz (3ª ed., 2022) que cobre o assunto — use-a para localizar o apoio antes de tentar resolver. Os enunciados são próprios: seguem os tópicos e a ordem do livro, mas não reproduzem os problemas dele.

Exercício 12.1. FÁCIL Schutz §13.2

A métrica FLRW é $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dr^2/(1 - kr^2) + r^2d\Omega^2]$. (a) Mostre que $1 + z = a(t_0)/a(t_e)$. (b) Calcule $a(t_e)/a(t_0)$ para $z = 1$, $z = 3$ e $z = 1100$. (c) Interprete fisicamente o último valor.

Exercício 12.2. FÁCIL Schutz §13.3

Com $p = w\rho$ e $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$: (a) mostre que $\rho \propto a^{-3(1+w)}$; (b) obtenha os expoentes para matéria, radiação e constante cosmológica; (c) explique por que a densidade de Λ não diminui com a expansão.

Exercício 12.3. MÉDIO Schutz §13.3

Para $k = 0$ e uma única componente dominante: (a) resolva a equação de Friedmann e mostre que $a \propto t^{2/3}$ na era de matéria e $a \propto t^{1/2}$ na de radiação; (b) determine a idade do universo em cada caso em termos de H_0 ; (c) explique por que a idade de Einstein–de Sitter, $2/3H_0$, é menor que a idade observada, e como Λ resolve a discrepância.

Exercício 12.4. MÉDIO Schutz §13.2

As distâncias cosmológicas se distinguem em um universo em expansão. (a) Escreva D_C , D_L e D_A em termos de $\int dz/E(z)$. (b) Demonstre a relação de Etherington $D_L = (1 + z)^2 D_A$, indicando onde entram a conservação do número de fótons e a propagação em geodésicas nulas. (c) Mostre que D_A tem um máximo e explique por que objetos muito distantes aparecem *maiores* no céu.

Exercício 12.5. DIFÍCIL Schutz §13.4

O problema do horizonte. (a) Calcule o tamanho comóvel do horizonte de partículas na época da recombinação, $z \approx 1100$, em um universo dominado por matéria. (b) Determine o ângulo que ele subtende no céu hoje. (c) Conclua quantas regiões causalmente desconexas cobrem a superfície de último espalhamento. (d) Explique por que a uniformidade da radiação cósmica de fundo a 10^{-5} é então um problema, e como uma fase de expansão acelerada no Universo primordial o resolve.

12.14 Conteúdo extra

Os três problemas abaixo pedem para *modificar* um programa da página da disciplina e obter um resultado que não está nesta apostila. Baixe o arquivo indicado em <https://rafaelcrdelima.github.io/RelatividadeGeral/codigos/>, altere o que se pede e compare.

1. **Um universo que recolapsa.** Acrescente a `cap12_friedmann.py` um universo fechado com $\Omega_m = 1,5$ e $\Omega_\Lambda = 0$. Determine numericamente o instante de expansão máxima e o de recolapso, e compare com o resultado analítico em termos da ciclóide. Mostre que o tempo total de vida é exatamente o dobro do tempo até a expansão máxima.
2. **As supernovas de 1998.** Calcule o módulo de distância

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right)$$

para Λ CDM e para um universo sem Λ com o mesmo Ω_m . Faça o gráfico da *diferença* entre as duas curvas em função de z e mostre que ela é de poucos décimos de magnitude em $z \sim 0,5$. Essa é exatamente a precisão que as supernovas Ia precisaram atingir para detectar a aceleração.

3. **O horizonte de eventos cosmológico.** Calcule $d_E = a(t_0) \int_{t_0}^{\infty} dt/a(t)$ numericamente para Λ CDM e mostre que ele é finito, obtendo seu valor em Gpc. Repita para Einstein–de Sitter e mostre que diverge. Determine o redshift a partir do qual a luz emitida hoje jamais nos alcançará, e comente o que isso significa para o futuro observacional da cosmologia.

Projetos finais

Os projetos abaixo foram pensados para duas ou três semanas de trabalho em duplas. Cada projeto deve resultar em um relatório curto e uma apresentação de 15 minutos.

13.1 Projeto 1: geodésicas em Schwarzschild

Implementar numericamente as equações de geodésicas no plano equatorial da métrica de Schwarzschild. Comparar órbitas ligadas, espalhamento e queda radial. Entregar gráficos de $r(\lambda)$ e da trajetória no plano.

13.2 Projeto 2: redshift gravitacional

Derivar a expressão do redshift em uma métrica estacionária e aplicá-la a Schwarzschild. Discutir o limite fraco e estimar o efeito na superfície da Terra, do Sol e de uma estrela de nêutrons típica.

13.3 Projeto 3: ondas gravitacionais

Estudar uma forma de onda simplificada de binária compacta inspiralante. Relacionar crescimento de frequência e amplitude à perda de energia orbital. Comparar com a ideia de sirene padrão.

13.4 Projeto 4: cosmologias simples

Resolver numericamente as equações de Friedmann para componentes de matéria, radiação e constante cosmológica. Plotar $a(t)$ e $H(z)$ para diferentes parâmetros.

Truques com índices e tensores

Este apêndice fornece um algoritmo de trabalho para manipular expressões com índices sem medo. O objetivo não é substituir a interpretação geométrica dos tensores, mas dar ferramentas rápidas para calcular, simplificar e conferir sinais.

A.1 A filosofia dos índices

Índices são uma linguagem para controlar somas. Um índice repetido é um índice mudo: ele é somado e seu nome não importa. Por exemplo,

$$A_i B_i = A_j B_j = A_k B_k.$$

As três expressões representam o mesmo número. O nome do índice repetido é apenas uma variável de soma. Já um índice livre não pode ser renomeado em apenas um lado da equação. A expressão

$$A_i = B_i + C_i$$

é uma igualdade entre componentes de vetores. A expressão

$$A_i = B_j + C_j$$

não é uma igualdade vetorial bem escrita, pois o lado esquerdo tem índice livre i e o lado direito não.

RESULTADO CENTRAL

Regra de ouro: em cada termo de uma equação, os índices livres devem ser os mesmos; índices repetidos são somados e podem ser renomeados.

Em relatividade, costuma-se somar apenas quando um índice aparece uma vez acima e uma vez abaixo:

$$A_\mu B^\mu.$$

Em cálculo vetorial euclidiano tridimensional, muitas vezes escrevemos todos os

índices embaixo, usando implicitamente a métrica euclidiana δ_{ij} para levantar e abaixar índices. Ao traduzir identidades 3D para relatividade, é preciso recolocar a métrica correta e respeitar a assinatura.

A.2 Delta de Kronecker

O delta de Kronecker é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Ele funciona como identidade para índices:

$$\delta_{ij}V_j = V_i, \quad \delta_{ij}A_{jk} = A_{ik}.$$

Em três dimensões,

$$\delta_{ii} = 3.$$

Em quatro dimensões,

$$\delta^\mu_\mu = 4.$$

O valor é a dimensão do espaço de índices que está sendo somado.

Exemplo A.1. Se A_{ij} é uma matriz, então

$$\delta_{ij}A_{ij} = A_{ii}$$

é o traço de A . Em quatro dimensões relativísticas, a contração T^μ_μ é o traço tensorial; se os dois índices estiverem ambos embaixo, é preciso usar a métrica para contrair:

$$T^\mu_\mu = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}.$$

A.3 Índices mudos e troca de nomes

Muitas simplificações dependem de trocar nomes de índices mudos. Considere

$$S_{ij}A_{ij},$$

com $S_{ij} = S_{ji}$ simétrico e $A_{ij} = -A_{ji}$ antissimétrico. Como i e j são mudos, podemos trocar seus nomes:

$$S_{ij}A_{ij} = S_{ji}A_{ji}.$$

Usando as simetrias,

$$S_{ji}A_{ji} = S_{ij}(-A_{ij}) = -S_{ij}A_{ij}.$$

Portanto

$$S_{ij}A_{ij} = 0.$$

Esse truque aparece o tempo todo. Toda contração completa entre uma parte simétrica e uma parte antissimétrica se anula.

Atividade A.1. Mostre que $F_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0$ se $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico. A pista é notar que $U^\mu U^\nu$ é simétrico em μ, ν .

A.4 Símbolo de Levi-Civita

Em três dimensões euclidianas, o símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} é totalmente antissimétrico e definido por

$$\epsilon_{123} = 1.$$

Trocar dois índices muda o sinal; repetir índices dá zero. Assim,

$$\epsilon_{213} = -1, \quad \epsilon_{113} = 0.$$

O produto vetorial pode ser escrito como

$$(A \times B)_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k.$$

Essa fórmula é mais segura que o determinante mnemônico quando as expressões ficam longas.

A.5 A identidade fundamental

A identidade mais útil em três dimensões é

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

Ela transforma produtos de dois símbolos ϵ em deltas. Depois disso, os deltas eliminam índices.

Exemplo A.2. Vamos obter o produto vetorial triplo:

$$[A \times (B \times C)]_i = \epsilon_{ijk}A_j(B \times C)_k.$$

Como

$$(B \times C)_k = \epsilon_{klm}B_lC_m,$$

temos

$$[A \times (B \times C)]_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m.$$

Usando a identidade fundamental,

$$[A \times (B \times C)]_i = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m.$$

Logo,

$$[A \times (B \times C)]_i = B_i (A_j C_j) - C_i (A_j B_j).$$

Em notação vetorial,

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C.$$

A.6 Derivadas como índices

Em coordenadas cartesianas euclidianas, escrevemos

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Então

$$\nabla \cdot A = \partial_i A_i, \quad (\nabla \times A)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k.$$

As identidades usuais de cálculo vetorial viram consequências de simetria e antissimetria.

Exemplo A.3. Para mostrar que $\nabla \times \nabla f = 0$, escrevemos

$$(\nabla \times \nabla f)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f.$$

O fator ϵ_{ijk} é antissimétrico em j, k , enquanto $\partial_j \partial_k f$ é simétrico em j, k se as derivadas mistas comutam. Logo a contração é zero.

Exemplo A.4. Para mostrar que $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$,

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k.$$

Novamente, ϵ_{ijk} é antissimétrico em i, j , enquanto $\partial_i \partial_j$ é simétrico. Portanto,

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0.$$

A.7 Rotacional do rotacional

Uma identidade muito usada em eletromagnetismo é

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A.$$

Em componentes,

$$[\nabla \times (\nabla \times A)]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times A)_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m.$$

Usando a identidade fundamental,

$$[\nabla \times (\nabla \times A)]_i = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m.$$

Assim,

$$[\nabla \times (\nabla \times A)]_i = \partial_i \partial_m A_m - \partial_j \partial_j A_i,$$

isto é,

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A.$$

A.8 Tradução para relatividade

No espaço-tempo, as regras de índices continuam, mas alguns objetos mudam de papel:

- o delta δ^μ_ν continua sendo a identidade;
- a métrica $g_{\mu\nu}$ é quem levanta e abaixa índices;
- a contração correta usa um índice acima e outro abaixo;
- o símbolo de Levi-Civita em quatro dimensões tem quatro índices;
- em espaço-tempo curvo, derivadas parciais de tensores são substituídas por derivadas covariantes.

Por exemplo, a norma de um vetor não é $V_\mu V_\mu$, mas

$$V_\mu V^\mu = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu.$$

Com assinatura $(-, +, +, +)$, um vetor temporal possui norma negativa. Esse sinal é físico e não deve ser apagado por analogia com a geometria euclidiana.

A.9 Checklist para não errar

Antes de aceitar uma conta com índices, verifique:

1. Todo índice livre aparece igual em todos os termos?
2. Algum índice aparece três vezes no mesmo termo?
3. Todo índice repetido está realmente sendo somado?
4. Em relatividade, a contração tem um índice acima e um abaixo?
5. Alguma simetria ou antissimetria torna o termo zero?
6. Algum delta pode eliminar um índice?
7. Dois símbolos ϵ podem ser trocados por deltas?
8. A derivada usada deveria ser parcial ou covariante?

Esse checklist é simples, mas resolve a maior parte dos erros algébricos em relatividade geral introdutória.

A invariância do intervalo: demonstração geral

A Seção 1.2 justifica a invariância de ds^2 com um relógio de luz e o teorema de Pitágoras. Aquele argumento é físico e suficiente para começar o curso, mas deixa duas lacunas: ele trata um par de eventos de cada vez, e supõe conhecida a transformação entre os referenciais. Este apêndice fecha as duas. A demonstração vem em quatro etapas: fixar o que exatamente significa *invariante*, verificar a afirmação por cálculo direto no *boost* ao longo de x , reescrever a verificação em forma matricial — o que a estende de uma vez a todo o grupo de Lorentz — e, por fim, mostrar que a invariância não é uma propriedade accidental da transformação escolhida, mas a única possibilidade compatível com a constância da velocidade da luz. Ele usa a convenção de soma de Einstein e a notação de índices do Capítulo 3, e a leitura natural é depois da Seção 1.4.

Etapas: **o enunciado preciso.** Sejam S e S' referenciais inerciais com coordenadas $x^\mu = (t, x, y, z)$ e $x'^\mu = (t', x', y', z')$ relacionadas por uma transformação linear

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (\text{B.1})$$

com $\Lambda^\mu{}_\nu$ e a^μ constantes; a linearidade é consequência da homogeneidade do espaço-tempo e é retomada na Seção 1.4. Com a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, o intervalo entre dois eventos separados por Δx^μ é

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (\text{B.2})$$

Provar a invariância é provar que $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ para *todo* par de eventos — não para um par particular, e sem supor nada sobre o sinal de Δs^2 . Como (B.1) é linear com coeficientes constantes, diferenças e diferenciais obedecem à mesma regra,

$$\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu, \quad dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu,$$

e a constante a^μ cancela nos dois casos. Duas consequências que usaremos sem comentário adicional: a prova para separações infinitesimais vale automaticamente para separações finitas, e vice-versa; e translações no espaço e no tempo

são invariâncias de graça, porque só diferenças de coordenadas aparecem em (B.2).

Etapa 1: cálculo direto para o *boost* ao longo de x . Tome S' movendo-se com velocidade v na direção $+x$ de S . A transformação é

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (\text{B.3})$$

cujas deduções estão na Seção 1.4; aqui ela é o dado de entrada. Diferenciando (os coeficientes são constantes),

$$dt' = \gamma(dt - v dx), \quad dx' = \gamma(dx - v dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz.$$

Calcule o bloco (t, x) do intervalo em S' , sem descartar nenhum termo:

$$\begin{aligned} -dt'^2 + dx'^2 &= -\gamma^2(dt - v dx)^2 + \gamma^2(dx - v dt)^2 \\ &= \gamma^2 \left[- (dt^2 - 2v dt dx + v^2 dx^2) + (dx^2 - 2v dt dx + v^2 dt^2) \right] \\ &= \gamma^2 \left[- dt^2 + v^2 dt^2 + dx^2 - v^2 dx^2 \underbrace{+ 2v dt dx - 2v dt dx}_{=0} \right] \\ &= \gamma^2(1 - v^2)(-dt^2 + dx^2) = -dt^2 + dx^2, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa $\gamma^2(1 - v^2) = 1$, que é exatamente a definição de γ em (B.3). Somando as direções transversas, que não mudam,

$$ds'^2 = -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Vale isolar onde cada hipótese entrou. Os termos cruzados $dt dx$ se cancelam porque o *mesmo* fator γ multiplica as duas linhas de (B.3) — se a transformação de t e a de x tivessem fatores diferentes, sobraria um termo cruzado e o intervalo não seria invariante. E o valor específico de γ é usado uma única vez, no último passo. Nada mais foi suposto: em particular, o cálculo não distingue separações temporais, nulas ou espaciais.

É instrutivo repetir a conta em termos da *rapidez* φ , definida por $v = \tanh \varphi$, de modo que $\gamma = \cosh \varphi$ e $\gamma v = \sinh \varphi$. A transformação (B.3) vira

$$t' = t \cosh \varphi - x \sinh \varphi, \quad x' = x \cosh \varphi - t \sinh \varphi,$$

e então

$$-t'^2 + x'^2 = (-t^2 + x^2)(\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi) = -t^2 + x^2.$$

A invariância do intervalo é, nessa linguagem, a identidade $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$, exatamente como a invariância de $x^2 + y^2$ sob rotações é $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Um *boost* é uma rotação hiperbólica no plano (t, x) .

Etapa 2: o critério matricial, válido para qualquer Λ . O cálculo da Etapa 1 é uma verificação para uma matriz específica. Para cobrir todas as transformações de Lorentz de uma vez, substitua $dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$ diretamente no intervalo:

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta dx^\alpha dx^\beta \equiv M_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Exigir $ds'^2 = ds^2$ para todo dx^α significa que as formas quadráticas $M_{\alpha\beta}$ e $\eta_{\alpha\beta}$ coincidem em todo vetor. Como ambas são simétricas, isso força a igualdade dos coeficientes, e não apenas dos valores: tomando dx^μ ao longo de um único eixo obtém-se $M_{\alpha\alpha} = \eta_{\alpha\alpha}$, e tomando-o ao longo da soma de dois eixos, $M_{\alpha\alpha} + 2M_{\alpha\beta} + M_{\beta\beta} = \eta_{\alpha\alpha} + 2\eta_{\alpha\beta} + \eta_{\beta\beta}$, o que deixa $M_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ também fora da diagonal. Logo

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad \text{ou, em matrizes,} \quad \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta. \quad (\text{B.4})$$

Essa é a condição *necessária e suficiente* para a invariância — e é também a definição do grupo de Lorentz. Provar que uma dada transformação preserva o intervalo reduz-se, portanto, a verificar (B.4). Para o *boost* (B.3), no bloco (t, x) ,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma^2(1-v^2) & 0 \\ 0 & \gamma^2(1-v^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que é a Etapa 1 em três linhas. Duas consequências imediatas de (B.4) valem registro. Primeiro, tomando determinantes, $(\det \Lambda)^2 \det \eta = \det \eta$, ou seja $\det \Lambda = \pm 1$: nenhuma transformação de Lorentz é degenerada, e todas são inversíveis. Segundo, se Λ_1 e Λ_2 satisfazem (B.4), então $\Lambda_1 \Lambda_2$ e Λ_1^{-1} também satisfazem — o conjunto das transformações que preservam o intervalo é um grupo.

Etapa 3: rotações e boosts em direção arbitrária. O critério (B.4) liquida os dois casos restantes sem conta nova. Uma rotação espacial R deixa t intacto e preserva $dx^2 + dy^2 + dz^2$, logo preserva ds^2 e satisfaz (B.4). Um *boost* com velocidade v em direção qualquer pode ser escrito como $\Lambda_v = R \Lambda_x(v) R^{-1}$, onde R é a rotação que leva o eixo x à direção de v ; como cada fator satisfaz (B.4) e a condição é fechada por produto, Λ_v também satisfaz. Isso cobre todas as transformações de Lorentz próprias e ortócronas, que é o que se usa na prática, e junto com (B.1) cobre também as translações. A invariância do intervalo está provada.

Etapa 4: por que tinha de ser assim. Falta a pergunta mais interessante: a invariância é uma coincidência da forma (B.3), ou é forçada pela física? É forçada — e a única entrada física necessária é que a luz se propaga com a mesma velocidade em todo referencial inercial. Suponha apenas isso, mais a linearidade de (B.1). Nas coordenadas de S' , o intervalo é a forma quadrática $M_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$

definida na Etapa 2, com coeficientes constantes. O postulado diz que um raio de luz em S é um raio de luz em S' ; isto é, sempre que $\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0$, também $M_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0$. Tome então $dx^\mu = (1, \mathbf{n})$ com $\mathbf{n}$ unitário arbitrário, que é nulo para η . A hipótese dá

$$M_{00} + 2M_{0i}n^i + M_{ij}n^i n^j = 0 \quad \text{para todo } |\mathbf{n}| = 1.$$

Trocando $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ e subtraindo as duas relações, $M_{0i}n^i = 0$ para todo $\mathbf{n}$, ou seja $M_{0i} = 0$. Somando-as, $M_{ij}n^i n^j = -M_{00}$ para todo $\mathbf{n}$ unitário: a forma simétrica M_{ij} é constante sobre a esfera unitária, e avaliando-a nos seus próprios autovetores conclui-se que os três autovalores são iguais, isto é $M_{ij} = -M_{00} \delta_{ij}$. Chamando $k = -M_{00}$, os três resultados juntos dizem

$$M_{\alpha\beta} = k \eta_{\alpha\beta}, \quad \text{ou seja} \quad ds'^2 = k ds^2.$$

Preservar o cone de luz já obriga o intervalo a ser preservado *a menos de um fator*. Falta mostrar que $k = 1$. Por isotropia, k não pode depender da direção de $\mathbf{v}$, apenas de $v = |\mathbf{v}|$. Aplique agora a transformação inversa, que é o *boost* com $-\mathbf{v}$: ela devolve $ds^2 = k(v) ds'^2$, e combinando as duas relações, $k(v)^2 = 1$. Como k é contínua e $k(0) = 1$ (velocidade relativa nula é a identidade), a raiz $k = -1$ está excluída e resta

$$k = 1, \quad ds'^2 = ds^2.$$

Ou seja: dada a constância de c , a homogeneidade do espaço-tempo e a isotropia do espaço, a invariância do intervalo não é uma hipótese adicional — é um teorema. E, uma vez estabelecida, ela determina de volta a forma das transformações, que é o caminho percorrido na Seção 1.4. Não há circularidade: o postulado físico é a constância de c ; a invariância de ds^2 e a forma de Λ são duas maneiras equivalentes de expressá-lo.

Resumo de fórmulas

C.1 Relatividade especial

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad p^\mu = mU^\mu, \quad E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2.$$

C.2 Geometria

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda.$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}.$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0 \Rightarrow \xi_\mu p^\mu = \text{const.}$$

C.3 Einstein

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x + S_m, \quad T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right).$$

C.4 Ondas gravitacionais

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}, \quad P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle.$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^3} \right)^{5/3} f^{11/3}, \quad \mathcal{M}_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}.$$

C.5 Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

$$V_{\text{ef}} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right), \quad r_{\text{ISCO}} = 6M, \quad r_{\text{fton}} = 3M.$$

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}, \quad \delta = \frac{4GM}{c^2 b}, \quad \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}.$$

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}, \quad S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}.$$

C.6 Cosmologia

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3},$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad \rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad 1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}, \quad d_L = (1+z)^2 d_A.$$

Bibliografia comentada

- Bernard Schutz, *A First Course in General Relativity*, 3ª ed., Cambridge University Press, 2022. Referência principal do curso; excelente para primeira exposição, com forte ligação entre cálculo tensorial e aplicações astrofísicas.
- Sean Carroll, *Spacetime and Geometry*. Tratamento mais geométrico e moderno, recomendado para aprofundamento após os módulos de curvatura e equações de Einstein.
- James Hartle, *Gravity*. Muito bom para intuição física, problemas e aplicações.
- Robert Wald, *General Relativity*. Referência avançada, indicada para estudantes que queiram seguir pesquisa em gravitação matemática, buracos negros ou teoria clássica de campos em espaço-tempo curvo.
- Misner, Thorne e Wheeler, *Gravitation*. Enciclopédico, historicamente importante e cheio de intuição geométrica.