

Matéria Dielétrica

Capítulo 6

Polarização, campo auxiliar, energia e forças

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima

6.1 Introdução

O que é um dielétrico?

Definição operacional

Um dielétrico é um meio que **não consegue excluir completamente** um campo elétrico estático macroscópico de seu interior.

Em um condutor perfeito:

$$E_{\text{tot}} = 0 \quad \text{no interior.}$$

Em um dielétrico:

$$E_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = E_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + E_{\text{self}}(\mathbf{r}) \neq 0. \quad (6.1)$$

Origem física

Ligações químicas e efeitos quânticos restringem o rearranjo das cargas internas.

Condutor versus dielétrico

Condutor perfeito

- Cargas livres se rearranjam sem barreira macroscópica.
- O campo interno estático é nulo.
- A carga excedente fica na superfície.

$$E_{\text{in}} = 0.$$

Dielétrico

- Cargas deslocam-se apenas um pouco.
- O campo interno é reduzido, mas não eliminado.
- Surgem cargas de polarização.

$$E_{\text{in}} \neq 0.$$

Ideia de continuidade

Aqui $\kappa \equiv \epsilon/\epsilon_0$ é a **constante dielétrica**, ou permissividade relativa. O limite $\kappa \rightarrow \infty$ de muitos resultados dielétricos reproduz o comportamento de condutores.

6.2 Polarização

Carga livre e carga de polarização

O campo externo é produzido por cargas que não pertencem ao dielétrico. Chamamos essas cargas de **cargas livres**.

Densidade total de carga

A carga que entra nas equações de Maxwell é a soma:

$$\rho(r) = \rho_f(r) + \rho_P(r). \quad (6.2)$$

- ρ_f : carga livre, colocada ou controlada externamente.
- ρ_P : carga de polarização, induzida dentro do material.

Leitura física

ρ_P é a carga macroscópica que aparece porque cargas positivas e negativas se deslocam levemente em sentidos opostos.

A função polarização $P(r)$

Para uma amostra neutra de volume V e superfície S , a carga de polarização total deve somar zero:

$$\int_V d^3r \rho_P(r) + \int_S dS \sigma_P(r_S) = 0. \quad (6.3)$$

Zangwill introduz $P(r)$ por:

$$\rho_P(r) = -\nabla \cdot P(r), \quad r \in V, \quad (6.4)$$

$$\sigma_P(r_S) = P(r_S) \cdot \hat{n}(r_S), \quad r_S \in S, \quad (6.5)$$

$$P(r) = 0, \quad r \notin V. \quad (6.6)$$

Por que essas definições garantem neutralidade?

Substituindo $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ e $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{n}$:

$$Q_P = \int_V d^3r \rho_P + \int_S dS \sigma_P.$$

$$Q_P = - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{P} + \int_S dS \mathbf{P} \cdot \hat{n}.$$

Pelo teorema da divergência,

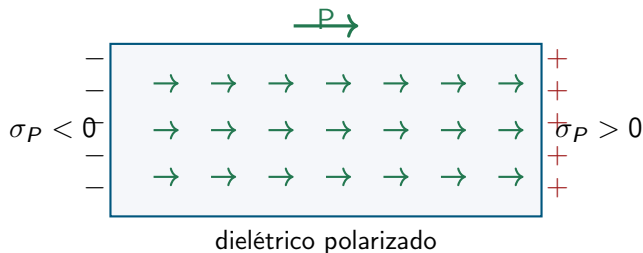
$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{P} = \int_S dS \mathbf{P} \cdot \hat{n}.$$

$$Q_P = 0. \tag{1}$$

Moral

A polarização transforma uma redistribuição interna de carga em uma combinação consistente de carga de volume e carga de superfície.

Desenho: origem de ρ_P e σ_P



Interpretação

Se $\vec{P}$ é uniforme, cargas internas vizinhas se compensam; sobra carga apenas onde a polarização termina, isto é, na superfície.

Integral de volume de $\mathbf{P}$

Queremos mostrar que a integral de $\mathbf{P}$ é o momento de dipolo total:

$$\mathbf{p} = \int_V d^3r \mathbf{P}(\mathbf{r}).$$

Para o componente cartesiano k , use:

$$\nabla \cdot (r_k \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \nabla r_k + r_k \nabla \cdot \mathbf{P}.$$

Como $\nabla r_k = \hat{\mathbf{e}}_k$,

$$\mathbf{P} \cdot \nabla r_k = P_k.$$

Logo,

$$P_k = \nabla \cdot (r_k \mathbf{P}) - r_k \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (6.7)$$

Demonstração de $\int P = p$

Integre (6.7) no volume V :

$$\int_V d^3r P_k = \int_V d^3r \nabla \cdot (r_k P) - \int_V d^3r r_k \nabla \cdot P.$$

Agora use:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot (r_k P) = \int_S dS r_k P \cdot \hat{n} = \int_S dS r_k \sigma_P,$$

e

$$-\nabla \cdot P = \rho_P.$$

$$\int_V d^3r P_k = \int_S dS r_k \sigma_P + \int_V d^3r r_k \rho_P. \quad (6.8)$$

O lado direito é exatamente o componente p_k do momento de dipolo.

Resultado: polarização como densidade de dipolo

$$\int_V d^3r P(r) = p. \quad (6.9)$$

Interpretação cuidadosa

É tentador dizer que P é o “momento de dipolo por unidade de volume”. Isso é útil, mas não é uma definição microscópica universal.

Aviso importante

Em sólidos reais, a polarização não é simplesmente a soma de dipolos moleculares localizados. Ela depende de correntes de polarização e da estrutura quântica do estado eletrônico.

Modelo de Lorentz

O modelo de Lorentz escolhe uma pequena célula microscópica Ω , centrada no ponto macroscópico r , e define:

$$P(r) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d^3s s \rho_{\text{micro}}(s) = \frac{p(r)}{\Omega}. \quad (6.10)$$

Quando funciona bem?

Gases, líquidos não polares e sólidos moleculares fracamente ligados.

Quando falha?

Em dielétricos covalentes ou iônicos, a escolha da célula pode mudar o resultado e correntes entre células podem dominar a polarização real.

Teoria moderna da polarização

Zangwill enfatiza que, em sólidos, P não é determinado apenas pela densidade de carga estática.

Ideia essencial

A polarização macroscópica pode ser calculada por uma média temporal de correntes de polarização:

$$P(R) = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^t dt' \int_{\Omega} d^3s j_{P,\text{micro}}(s, t'). \quad (6.11)$$

Mensagem

A polarização mede “quanto carregamento atravessou” uma célula ao ligar adiabaticamente o campo, não apenas onde a carga ficou no final.

6.3 Campo produzido por matéria polarizada

Potencial da carga de polarização

Se $P(r)$ é dado, então as fontes do campo produzido pela matéria polarizada são:

$$\rho_P = -\nabla \cdot P, \quad \sigma_P = P \cdot \hat{n}.$$

O potencial é:

$$\varphi_P(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{-\nabla' \cdot P(r')}{|r - r'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' \frac{P(r') \cdot \hat{n}'}{|r - r'|}. \quad (6.12)$$

Campo da matéria polarizada

O campo é $E_P = -\nabla\varphi_P$. Diferenciando em relação ao ponto de observação r :

$$E_P(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \left[-\nabla' \cdot P(r') \right] \frac{r - r'}{|r - r'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' \left[P(r') \cdot \hat{n}' \right] \frac{r - r'}{|r - r'|^3}. \quad (6.13)$$

Ponto técnico

Essa forma é bem comportada mesmo para pontos de observação dentro do material.

Poisson: amostra uniformemente polarizada

Se P é uniforme:

$$\nabla \cdot P = 0.$$

Então só resta a integral de superfície:

$$E_P(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' (P \cdot \hat{n}') \frac{r - r'}{|r - r'|^3}.$$

Use o teorema da divergência em r' :

$$\int_S dS' \hat{n}'_k F(r') = \int_V d^3r' \nabla'_k F(r').$$

Com

$$F(r') = \frac{r - r'}{|r - r'|^3}.$$

Fórmula de Poisson

Como P é constante, podemos tirá-la da integral:

$$E_P(r) = P \cdot \nabla' \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \right].$$

Mas

$$\nabla' f(r - r') = -\nabla f(r - r').$$

Defina $E_1(r)$ como o campo do mesmo corpo preenchido por uma densidade uniforme $\rho = 1$. Então:

$$E_P(r) = -(P \cdot \nabla)E_1(r). \quad (6.15)$$

Aplicação 6.1: esfera uniformemente polarizada

Para uma esfera de raio R , primeiro calcule o campo de uma esfera com densidade uniforme $\rho = 1$:

$$E_1(r) = \begin{cases} \frac{r}{3\epsilon_0}, & r < R, \\ \frac{V}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3}, & r > R. \end{cases} \quad (6.16)$$

Agora aplique

$$E_P = -(P \cdot \nabla)E_1.$$

Interior

Como $\nabla_i r_j = \delta_{ij}$,

$$E_P(r < R) = -\frac{P}{3\epsilon_0}.$$

Campo da esfera polarizada

O resultado completo é:

$$E_P(r) = \begin{cases} -\frac{P}{3\epsilon_0}, & r < R, \\ \frac{V}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\hat{r} \cdot P)\hat{r} - P}{r^3}, & r > R. \end{cases} \quad (6.17)$$

Leitura

Fora da esfera, o campo é exatamente o de um dipolo pontual

$$p = VP.$$

Dentro, o campo é uniforme e antiparalelo a P .

Método alternativo: carga superficial

Se $P = P\hat{z}$, então:

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = P \cos \theta. \quad (6.18)$$

Esse é o mesmo tipo de distribuição superficial que apareceu no capítulo de multipolos:

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta.$$

O potencial é:

$$\varphi_P(r, \theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} \begin{cases} z, & r < R, \\ \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, & r > R. \end{cases} \quad (6.19)$$

Matéria polarizada como coleção de dipolos

Queremos reescrever (6.12) sem uma integral de superfície explícita. Pelo teorema da divergência:

$$\int_S dS' \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_V d^3r' \nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right].$$

Expanda a divergência:

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

O primeiro termo cancela o termo de volume original em (6.12).

Resultado fundamental

Após a cancelamento, fica:

$$\varphi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' P(r') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.22)$$

Comparação com um dipolo pontual

O potencial de um dipolo $\mathbf{p}$ em $\mathbf{r}'$ tem a forma

$$\varphi_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Conclusão

Matéria polarizada é eletrostaticamente equivalente a uma distribuição contínua de dipolos pontuais $d\mathbf{p} = \mathbf{P} d^3r$.

6.4 O campo total e o campo auxiliar D

Lei de Gauss em matéria

A carga total é a soma de carga livre e carga de polarização:

$$\rho = \rho_f + \rho_P.$$

Como

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

temos:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (6.24)$$

Reorganizando:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f.$$

Definição do campo auxiliar D

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (6.25)$$

Equações eletrostáticas em matéria

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (6.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad (6.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P}. \quad (6.28)$$

Cuidado

D não é produzido apenas por carga livre. Variações espaciais de P também entram em sua estrutura.

Forma integral de Gauss para D

$$\oint_S dS \cdot D = Q_f. \quad (6.29)$$

Utilidade

Quando a simetria é boa, essa equação calcula D diretamente a partir da carga livre.

Mas não confundir

Ela não diz que a carga livre é a única causa física de D. O campo auxiliar é uma combinação de $\epsilon_0 E$ e P.

Condições de contorno para D

Em uma interface entre dois meios, com densidade superficial de carga livre σ_f :

$$\hat{n}_2 \cdot (D_1 - D_2) = \sigma_f, \quad (6.31)$$

$$\hat{n}_2 \times (D_1 - D_2) = \hat{n}_2 \times (P_1 - P_2). \quad (6.32)$$

Como $D = \epsilon_0 E + P$, a segunda condição equivale à continuidade da componente tangencial de E:

$$\hat{n}_2 \times (E_1 - E_2) = 0. \quad (6.33)$$

As equações macroscópicas ainda não fecham o problema. Precisamos relacionar P com E .

Expansão fenomenológica

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j + \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots \quad (6.34)$$

- Termo linear: resposta usual em campos fracos.
- Tensores: permitem anisotropia.
- Termos de ordem superior: óptica não linear e campos intensos.

No restante

O caso mais importante será o dielétrico simples: linear, isotrópico e homogêneo por regiões.

6.5 Matéria dielétrica simples

Constitutiva linear e isotrópica

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}. \quad (6.35)$$

Definimos a permissividade ϵ e a constante dielétrica κ :

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E}. \quad (6.36)$$

Então:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (6.37)$$

Equações em uma região de ϵ constante

Use $D = \epsilon E$ em $\nabla \cdot D = \rho_f$:

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = \rho_f.$$

Se ϵ varia no espaço:

$$\epsilon \nabla \cdot E + E \cdot \nabla \epsilon = \rho_f. \quad (6.38)$$

Se ϵ é constante em cada região:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_f}{\epsilon}. \quad (6.39)$$

Como $E = -\nabla \varphi$:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}. \quad (6.40)$$

Carga de polarização em dielétrico simples

De $\mathbf{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)\mathbf{E}$:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\epsilon_0(\kappa - 1)\nabla \cdot \mathbf{E}.$$

Em região homogênea, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f/\epsilon = \rho_f/(\kappa\epsilon_0)$.

$$\rho_P = \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) \rho_f. \quad (6.43)$$

Na superfície:

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \epsilon_0(\kappa - 1)\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (6.44)$$

Resposta a uma carga pontual livre

Para uma carga livre q_0 em um meio simples infinito:

$$\rho_f(r) = q_0 \delta(r).$$

Pela equação (6.43):

$$\rho_P(r) = - \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) q_0 \delta(r). \quad (6.45)$$

Logo, a carga efetiva macroscópica é:

$$q_{\text{eff}} = q_0 + q_P = \frac{q_0}{\kappa}.$$

Screening

O dielétrico reduz o campo de Coulomb por um fator κ .

Campo e potencial de uma carga em meio simples

Pela lei de Gauss para D:

$$\oint dS \cdot D = q_0.$$

Assim,

$$D(r) = \frac{q_0}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Como $D = \epsilon E = \kappa \epsilon_0 E$:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \kappa \epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \hat{r}. \quad (6.46)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi \kappa \epsilon_0} \frac{q_0}{r}. \quad (6.47)$$

Capacitor: carga fixa

Considere placas paralelas com carga livre fixa $\pm Q_f$, área A e separação d . Então:

$$D = \sigma_f = \frac{Q_f}{A}.$$

Com dielétrico simples entre as placas:

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma_f}{\kappa\epsilon_0}.$$

Logo:

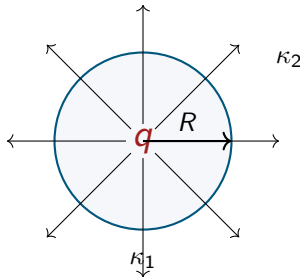
$$\Delta\varphi = Ed = \frac{\sigma_f d}{\kappa\epsilon_0}. \quad (6.48)$$

Como $C = Q_f/\Delta\varphi$:

$$C = \kappa C_0, \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (6.52)$$

Interface simples: carga no centro de uma esfera

Uma carga q está no centro de uma esfera de raio R e permissividade $\epsilon_1 = \kappa_1 \epsilon_0$. Fora dela há meio $\epsilon_2 = \kappa_2 \epsilon_0$.



Pela simetria esférica:

$$\mathbf{D}(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad r > 0. \quad (6.53)$$

Carga de polarização na interface esférica

Em cada lado da interface:

$$E_i = \frac{D}{\epsilon_i}, \quad P_i = (\epsilon_i - \epsilon_0)E_i.$$

Logo,

$$P_i = \left(1 - \frac{1}{\kappa_i}\right) D.$$

A carga superficial de polarização recebe contribuição dos dois lados:

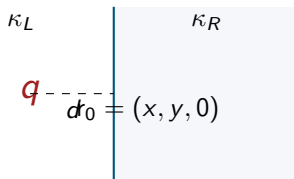
$$\sigma_P = \hat{r} \cdot (P_1 - P_2).$$

Assim:

$$\sigma_P(R) = \frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1} \right). \quad (6.58)$$

Exemplo 6.2: carga perto de uma interface plana

Uma carga q está em $z = -d$. O meio à esquerda tem κ_L e o meio à direita tem κ_R . A interface é o plano $z = 0$.



Resultado

A carga de polarização induzida na interface é

$$\sigma_P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa_L - \kappa_R}{\kappa_L(\kappa_L + \kappa_R)} \frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Exemplo 6.2: de onde vem a fórmula?

No ponto $r_0 = (x, y, 0)$, escrevemos:

$$\sigma_P = \hat{z} \cdot (P_L - P_R) = \epsilon_0(\chi_L E_L - \chi_R E_R) \cdot \hat{z}.$$

Perto da superfície, o campo da própria folha de carga tem salto:

$$\epsilon_0 E_{Lz} = \frac{1}{4\pi\kappa_L} \frac{qd}{r^3} - \frac{\sigma_P}{2}, \quad \epsilon_0 E_{Rz} = \frac{1}{4\pi\kappa_L} \frac{qd}{r^3} + \frac{\sigma_P}{2},$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + d^2$. Como não há carga livre na interface:

$$\kappa_L E_{Lz} = \kappa_R E_{Rz}.$$

Resolvendo a equação linear resultante para σ_P , obtemos:

$$\sigma_P = \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa_L - \kappa_R}{\kappa_L(\kappa_L + \kappa_R)} \frac{qd}{r^3}.$$

Condições de contorno em potencial

Como $E = -\nabla\varphi$, a continuidade da componente tangencial de E implica:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{na interface.} \quad (6.70)$$

Se há carga livre superficial σ_f :

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f. \quad (6.71)$$

Sem carga livre na interface:

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}. \quad (6.73)$$

Capacitor: potencial fixo

Agora a bateria mantém V fixo entre as placas. Portanto:

$$V = \int_0^d d\ell E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{V}{d}. \quad (6.62-6.63)$$

Diferença em relação à carga fixa

O campo E não é reduzido quando o dielétrico é inserido, porque a bateria fornece carga livre extra às placas.

Capacitor a potencial fixo: carga livre

A carga livre na placa passa a ser:

$$\sigma_f = D = \epsilon E = \kappa \epsilon_0 \frac{V}{d}. \quad (6.65)$$

Logo, novamente:

$$C = \frac{\sigma_f A}{V} = \kappa C_0. \quad (6.66)$$

Teoria de potencial para dielétricos simples

Em uma região de permissividade constante:

$$\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\kappa}. \quad (6.69)$$

Se não há carga livre:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (6.72)$$

Receita

Resolver problemas dielétricos simples é resolver Laplace/Poisson em cada região e aplicar:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_1 \partial_n \varphi_1 = \epsilon_2 \partial_n \varphi_2$$

quando não há carga livre na interface.

Exemplo 6.3: cavidade esférica em campo uniforme

Uma cavidade esférica de raio R é escavada em um meio infinito de constante κ . Um campo uniforme $E_0 = E_0 \hat{z}$ é mantido por placas distantes.

Forma dos potenciais

Pela simetria axial e por $\nabla^2 \varphi = 0$:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{in}} &= Ar \cos \theta, \\ \varphi_{\text{out}} &= \left(-E_0 r + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta.\end{aligned}$$

O termo $-E_0 r \cos \theta$ é o potencial do campo aplicado distante. O termo $B \cos \theta / r^2$ é a resposta dipolar induzida pela cavidade.

Exemplo 6.3: determinando A e B

Em $r = R$, impomos continuidade do potencial:

$$AR = -E_0 R + \frac{B}{R^2}. \quad (1)$$

Sem carga livre na interface:

$$\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_{\text{in}}}{\partial r} \right|_R = \kappa \epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_{\text{out}}}{\partial r} \right|_R. \quad (2)$$

Como

$$\begin{aligned} \partial_r \varphi_{\text{in}} &= A \cos \theta, \\ \partial_r \varphi_{\text{out}} &= \left(-E_0 - \frac{2B}{r^3} \right) \cos \theta, \end{aligned}$$

o sistema linear dá:

$$A = -\frac{3\kappa}{2\kappa + 1} E_0, \quad B = -\frac{\kappa - 1}{2\kappa + 1} E_0 R^3.$$

Exemplo 6.3: campo dentro da cavidade

No interior da cavidade:

$$\varphi_{\text{in}} = Ar \cos \theta = Az.$$

Logo:

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = -\nabla \varphi_{\text{in}} = -A\hat{z}.$$

Usando o valor de A :

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{3\kappa}{2\kappa + 1} E_0 \hat{z}. \quad (2)$$

Interpretação

O campo dentro da cavidade é maior que E_0 para $\kappa > 1$. A carga de polarização na parede da cavidade reforça o campo no interior vazio.

Refração de linhas de campo

Em uma interface plana sem carga livre:

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}, \quad \epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp}.$$

Se θ_i é o ângulo entre E_i e a normal:

$$\tan \theta_i = \frac{E_{i\parallel}}{E_{i\perp}}.$$

Dividindo as duas relações:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}. \quad (6.68)$$

Leitura

Linhas de E dobram ao cruzar uma interface dielétrica.

6.6 A física da constante dielétrica

Para um objeto pequeno em um campo aproximadamente uniforme, definimos:

$$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (6.75)$$

Interpretação

α mede o quão facilmente a nuvem eletrônica e os núcleos se deformam sob ação do campo.

Para uma esfera condutora, do capítulo 5:

$$\alpha = 4\pi R^3.$$

Para átomos e moléculas, α é uma propriedade microscópica medida ou calculada.

Estimativa ingênua da constante dielétrica

Se há n moléculas por unidade de volume e cada uma adquire

$$p = \alpha \epsilon_0 E,$$

então:

$$P = np = n\alpha \epsilon_0 E.$$

Comparando com

$$P = \epsilon_0 (\kappa - 1) E,$$

obtemos:

$$\kappa \simeq 1 + n\alpha. \quad (6.79)$$

Limitação

Essa fórmula ignora que cada molécula responde ao campo local, não exatamente ao campo macroscópico médio.

Campo local de Lorentz

O campo que polariza uma molécula é melhor aproximado por:

$$E_{\text{local}} = E - E_{\text{self}}.$$

Para uma cavidade esférica dentro de um meio uniformemente polarizado:

$$E_{\text{self}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}.$$

Logo:

$$E_{\text{local}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (6.80-6.81)$$

Comentário

O termo $P/3\epsilon_0$ é a correção de Lorentz para o campo de cavidade.

Clausius-Mossotti: dedução

Cada molécula tem:

$$p = \alpha \epsilon_0 E_{\text{local}}.$$

Como $P = np$:

$$P = n\alpha\epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right).$$

Agrupando os termos em P :

$$\left(1 - \frac{n\alpha}{3} \right) P = n\alpha\epsilon_0 E.$$

$$P = \frac{n\alpha\epsilon_0}{1 - n\alpha/3} E. \quad (6.82)$$

Fórmula de Clausius-Mossotti

Compare

$$P = \frac{n\alpha\epsilon_0}{1 - n\alpha/3} E$$

com

$$P = \epsilon_0(\kappa - 1)E.$$

Então:

$$\kappa - 1 = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}. \quad (6.83)$$

Reorganizando:

$$\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} = \frac{n\alpha}{3}. \quad (6.84)$$

Validade

Boa para gases não polares e alguns líquidos simples; ruim para muitos sólidos e líquidos polares.

O limite $\kappa \rightarrow \infty$

Ideia

Quando κ cresce muito, o campo macroscópico no interior de um dielétrico simples tende a ser fortemente reduzido.

Em muitos problemas sem carga livre em contato direto com o dielétrico:

$$\kappa \rightarrow \infty \implies E_{\text{in}} \rightarrow 0.$$

Conexão

Esse é o comportamento de um condutor perfeito.

Cuidado

Se há carga livre embutida no dielétrico, o limite pode ser singular e não equivaler simplesmente a um condutor.

6.7 Energia de matéria dielétrica

Trabalho para estabelecer o campo

Considere um condutor carregado dentro de um dielétrico. Ao trazer uma carga δQ do infinito até o condutor, fazemos trabalho:

$$\delta U_E = \varphi \delta Q.$$

Pela lei de Gauss:

$$\delta Q = \int_S dS \cdot \delta \mathbf{D}.$$

Então:

$$\delta U_E = \int_S dS \cdot \delta \mathbf{D} \varphi.$$

Aplicando o teorema da divergência no volume externo ao condutor:

$$\delta U_E = - \int_V d^3r \nabla \cdot (\varphi \delta \mathbf{D}).$$

Variação da energia

Expanda:

$$\nabla \cdot (\varphi \delta \mathbf{D}) = \nabla \varphi \cdot \delta \mathbf{D} + \varphi \nabla \cdot \delta \mathbf{D}.$$

No dielétrico sem carga livre no volume:

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{D} = 0.$$

Como $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$:

$$\delta U_E = \int d^3r \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}. \quad (6.87)$$

Resultado chave

A energia é uma função natural de $\mathbf{D}$, isto é, da carga livre que determina $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$.

Energia total geral

Para construir o campo desde zero até o valor final D , integramos:

$$U_E = \int d^3r \int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}. \quad (6.91)$$

Observação importante

Não podemos calcular essa integral sem uma relação constitutiva que diga como $\mathbf{E}$ depende de $\mathbf{D}$.

Analogia

Em condutores isolados, U_E é natural nas cargas Q_k . Em dielétricos, U_E é natural em $\mathbf{D}$, que é fixado pela carga livre.

Energia em dielétrico simples

Para um dielétrico simples:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon}.$$

Então:

$$\int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} = \int_0^{\mathbf{D}} \frac{\mathbf{D}'}{\epsilon} \cdot \delta \mathbf{D}' = \frac{|\mathbf{D}|^2}{2\epsilon}.$$

$$U_E[\mathbf{D}] = \frac{1}{2} \int d^3r \frac{|\mathbf{D}|^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (6.94)$$

Mudança de energia ao inserir um dielétrico

Se as cargas livres que produzem o campo são mantidas fixas, inserir um dielétrico muda:

$$E_0, D_0 \longrightarrow E, D.$$

A mudança de energia é:

$$\Delta U_E = \frac{1}{2} \int d^3r (E \cdot D - E_0 \cdot D_0).$$

Depois de reorganizar termos e usar que a carga livre foi mantida fixa, Zangwill obtém:

$$\Delta U_E = -\frac{1}{2} \int d^3r P \cdot E_0. \quad (6.101)$$

De onde vem o fator 1/2?

Para um pequeno objeto linear:

$$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_0.$$

Se o dipolo já estivesse pronto, sua energia de interação seria:

$$U_{\text{ext}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0.$$

Mas o dipolo precisa ser criado. Há um custo interno, que para resposta linear é quadrático em p :

$$\Delta U_E = -pE_0 + \zeta p^2.$$

Minimizando:

$$\frac{d}{dp}(-pE_0 + \zeta p^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{E_0}{2\zeta}.$$

Como $p = \alpha \epsilon_0 E_0$, o mínimo dá:

$$\Delta U_E = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0.$$

Transformada de Legendre: potenciais fixos

Quando condutores estão ligados a baterias, os potenciais φ_k são mantidos fixos. Como em condutores, usamos uma energia transformada:

$$\hat{U}_E = U_E - \sum_k Q_k \varphi_k. \quad (6.109)$$

Ideia

U_E é natural em cargas livres. $\hat{U}_E$ é natural em potenciais fixos.

Para dielétrico simples, essa função é usada para calcular forças quando a geometria muda mantendo φ_k constantes.

6.8 Forças em matéria dielétrica

Força sobre um corpo dielétrico isolado

Para um dielétrico polarizado $P(r)$ em campo externo $E_0(r)$, a densidade de carga de polarização sente força:

$$dF = \rho_P E_0 d^3r + \sigma_P E_0 dS.$$

Assim:

$$F = \int_V d^3r \rho_P E_0 + \int_S dS \sigma_P E_0. \quad (6.115)$$

Importante

Essa fórmula vale para um corpo isolado em campo externo, não para um subvolume arbitrário dentro de um dielétrico contínuo.

Forma de dipolos

Como matéria polarizada é equivalente a dipolos com densidade P , a força também pode ser escrita como:

$$F = \int_V d^3r (P \cdot \nabla) E_0. \quad (6.116)$$

Para campo quase uniforme

Se o corpo é pequeno:

$$F \simeq (p \cdot \nabla) E_0.$$

Dieletroforese

Um dielétrico neutro pode ser atraído para regiões de campo mais intenso.

Por que subvolumes são sutis?

Se cortamos mentalmente um subvolume de um dielétrico contínuo, aparecem forças microscópicas de curto alcance nas fronteiras artificiais.

Problema

A fórmula de Coulomb com ρ_P e σ_P não conta corretamente todas as forças internas quando a fronteira não é uma superfície física real.

Zangwill mostra que isso é crucial para interfaces dielétricas: uma fórmula ingênua pode errar até por um fator 2 no limite condutor.

Estratégia correta

Para dielétricos simples, use variação de energia ou tensor de tensões.

Interface dielétrica: tentativa ingênua

Considere um capacitor de carga livre fixa σ_f , com uma interface plana entre κ_1 e κ_2 . Se usamos apenas a força sobre a carga de polarização da interface, obtemos:

$$f_{\text{ing}} = \frac{\sigma_f^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) \hat{z}. \quad (6.121)$$

Problema

No limite $\kappa_1 \rightarrow \infty$, o meio 1 deveria se comportar como condutor. Mas o resultado correto para a pressão entre placas teria um fator $1/2$.

Diagnóstico

A força sobre um subvolume dielétrico não é apenas a força Coulombiana sobre ρ_P e σ_P . Faltam forças microscópicas de curto alcance na fronteira do subvolume.

Fórmula de Helmholtz

Para um dielétrico simples, a força total pode ser obtida variando a energia:

$$U_E = \frac{1}{2} \int d^3r \frac{|D|^2}{\epsilon}.$$

O resultado local é a fórmula de Helmholtz:

$$F = \int d^3r \left[\rho_f E - \frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon \right]. \quad (6.130)$$

- $\rho_f E$: força sobre carga livre.
- $-\frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon$: força onde a permissividade varia.

Exemplo 6.6: força correta na interface

Pela fórmula de Helmholtz, perto de uma interface sem carga livre:

$$f = -\frac{1}{2} \int dz E^2(z) \frac{d\epsilon}{dz} \hat{z}.$$

Como E_z salta na interface, essa forma é delicada. Mas D_z é contínuo:

$$D_z = \sigma_f.$$

Use $E = D/\epsilon$:

$$E^2 d\epsilon = \frac{D^2}{\epsilon^2} d\epsilon = -D^2 d\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Então:

$$f = \frac{\sigma_f^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) \hat{z}. \quad (3)$$

Cheque: limite condutor

Se $\kappa_1 \rightarrow \infty$, a interface se comporta como uma placa condutora em contato com o meio 2:

$$f \rightarrow \frac{\sigma_f^2}{2\kappa_2\epsilon_0} \hat{z}.$$

Comparação com capacitor

Para um capacitor preenchido pelo meio 2:

$$C = \frac{\kappa_2\epsilon_0 A}{d}.$$

Com carga fixa $Q = \sigma_f A$, a energia é

$$U_E = \frac{Q^2}{2C}.$$

A força por área é:

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma_f^2}{2\kappa_2\epsilon_0},$$

em acordo com a fórmula de Helmholtz.

Tensor de tensões em dielétrico simples

A força também pode ser escrita como uma integral de superfície:

$$\mathbf{F} = \oint_S dS \left[(\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \hat{\mathbf{n}} \right]. \quad (6.132)$$

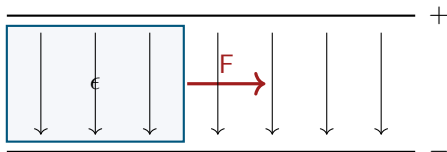
Isso motiva o tensor:

$$T_{ij} = D_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.133)$$

$$F_i = \oint_S dS T_{ij} \hat{n}_j. \quad (6.134)$$

Exemplo: slab dielétrico em capacitor

Um slab dielétrico parcialmente inserido em um capacitor é puxado para dentro.



Energia

O sistema reduz sua energia ao preencher mais da região de campo forte com material de maior ϵ .

Slab no capacitor: cálculo da força

Para potencial fixo, a energia relevante é a transformada de Legendre $\hat{U}_E$. Se o slab avança uma distância s , o volume adicional preenchido é Lds .

$$\Delta \hat{U}_E = -\frac{1}{2}\epsilon_0(\kappa - 1) \left(\frac{V}{d}\right)^2 (Lds).$$

Sinal

O sinal negativo diz que a energia diminui quando mais dielétrico entra na região entre as placas.

$$F = -\frac{\partial \Delta \hat{U}_E}{\partial s} \hat{x} = \frac{\epsilon_0(\kappa - 1)LV^2}{2d} \hat{x}.$$

Mensagem prática

Dielétricos são atraídos para regiões onde o campo elétrico é mais intenso.

O que a fórmula está dizendo

$$F \propto (\kappa - 1), \quad F \propto V^2, \quad F \propto \frac{L}{d}.$$

O efeito cresce com a polarizabilidade do material, com o campo aplicado e com a área de borda que entra no capacitor.

Fórmulas essenciais

- $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.
- $\int_V \mathbf{P} d^3r = \mathbf{p}$.
- $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$.
- Dielétrico simples: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$.
- Energia: $U_E = \int d^3r \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}$.
- Para dielétrico simples: $U_E = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$.

Ideia unificadora

A resposta dielétrica é uma competição entre energia eletrostática, polarização induzida e forças microscópicas que mantêm a matéria coesa.