

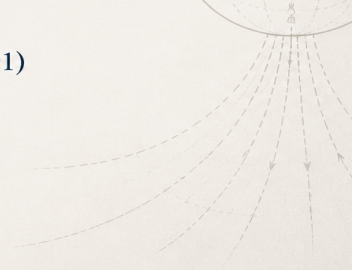
Eletrodinâmica Clássica

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima



JAMES CLERK MAXWELL (1891)

Por permissão da Oxford University Press



Escalas físicas muito diferentes

Em muitos problemas físicos, o observador está muito distante da distribuição de cargas.

Exemplos:

- partículas subatômicas;
- átomos e moléculas;
- distribuições biológicas de carga;
- núcleos atômicos observados pelos elétrons.

Ideia central

Se estamos muito longe da fonte, não precisamos conhecer todos os detalhes microscópicos da distribuição de cargas.

Podemos construir uma aproximação sistemática do potencial eletrostático válida para grandes distâncias.

Distribuição localizada

Chamamos a distribuição de cargas de **localizada** quando ela ocupa apenas uma região finita do espaço, de tamanho típico R .

Ideia central do capítulo

Problema físico

Queremos calcular o potencial eletrostático produzido por uma distribuição localizada de carga.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (4.1)$$

Consequência física

O potencial pode ser escrito como uma soma de termos sucessivos:

monopolo $\rightarrow$ dipolo $\rightarrow$ quadrupolo $\rightarrow \dots$

Cada termo carrega informações diferentes sobre a geometria da fonte.

Ideia da expansão multipolar

Se a carga está concentrada numa região de tamanho R e o observador está longe,

$$r \gg R,$$

então podemos aproximar o potencial por termos sucessivos.

Geometria do problema

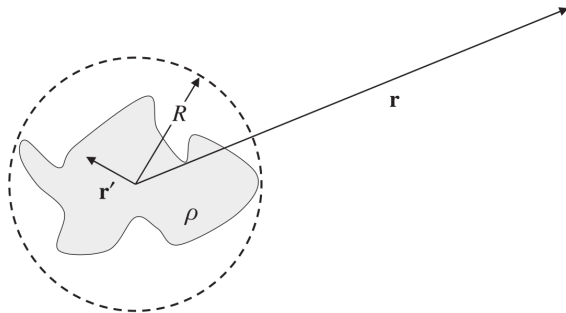


Figura 4.1: distribuição localizada de carga dentro de uma esfera de raio R , com ponto de observação em $r \gg R$.

Interpretação

O vetor $\mathbf{r}'$ localiza os elementos de carga dentro da distribuição, enquanto $\mathbf{r}$ aponta da origem até o observador.

Por que podemos expandir?

Hipótese de campo distante

Como toda a carga está dentro de uma esfera de raio R , temos

$$|r'| \leq R.$$

Para um observador distante,

$$|r'| \ll |r|.$$

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} - r' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} r'_i r'_j \nabla_i \nabla_j \frac{1}{r} + \dots \quad (4.2)$$

Notas: pag. 1-5

Primeiro passo: calcular o gradiente

Gradiente de $1/r$

Como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.$$

$$\nabla_i \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^3}. \quad (1)$$

Portanto,

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2)$$

Segundo passo: o termo dipolar

$$-r' \cdot \nabla \frac{1}{r} = -r' \cdot \left(-\frac{r}{r^3} \right) = \frac{r' \cdot r}{r^3}. \quad (3)$$

Resultado até primeira ordem

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} + \frac{r' \cdot r}{r^3} + \dots$$

Substituindo no potencial

Substituímos a expansão na integral de Coulomb:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \right]. \quad (4)$$

Separando os termos:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d^3r' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3r' + \dots \right]. \quad (4.3)$$

Definição

O primeiro momento multipolar é simplesmente a carga total:

$$Q = \int d^3r' \rho(r') = \sum_{\alpha} q_{\alpha}. \quad (4.4)$$

Logo, o primeiro termo do potencial é

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (5)$$

Interpretação

A grandes distâncias, uma distribuição com $Q \neq 0$ parece uma carga pontual.

Definição

O momento de dipolo mede a separação efetiva entre cargas positivas e negativas.

$$\mathbf{p} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}. \quad (4.5)$$

O termo dipolar do potencial fica

$$\varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.8)$$

Definição usada no texto

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho(r') r'_i r'_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} r_{\alpha i} r_{\alpha j}. \quad (4.6)$$

Interpretação

O quadrupolo mede uma informação mais refinada sobre a forma espacial da distribuição de carga.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + Q_{ij} \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots \right]. \quad (4.7)$$

Hierarquia em r

$$\varphi_0 \sim \frac{1}{r}, \quad \varphi_{\text{dip}} \sim \frac{1}{r^2}, \quad \varphi_{\text{quad}} \sim \frac{1}{r^3}.$$

Hierarquia multipolar

$$Q \longrightarrow p \longrightarrow Q_{ij} \longrightarrow \dots$$

Leitura física

Quanto mais longe estamos da distribuição, menos detalhes espaciais conseguimos enxergar.

Mensagem central

O primeiro momento multipolar não nulo determina o comportamento dominante do potencial a grandes distâncias.

Quando o dipolo domina?

Se a carga total é nula,

$$Q = 0,$$

o termo monopolar desaparece. Então o primeiro termo relevante é o dipolo.

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad r \gg R. \quad (4.8)$$

Mudança de origem

Se deslocamos a origem por um vetor d , então

$$r = r' + d.$$

O novo momento de dipolo é

$$p' = \int d^3 r' \rho(r') r' = \int d^3 r \rho(r) (r - d). \quad (6)$$

Dipolo e carga total

Continuando:

$$\mathbf{p}' = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\mathbf{r} - d \int d^3r \rho(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Usando as definições:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - Q\mathbf{d}. \quad (4.9)$$

Conclusão

Se $Q = 0$, então

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}.$$

Portanto, para sistemas neutros, o momento de dipolo não depende da origem.

Campo elétrico de um dipolo

Partimos de

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Para o potencial dipolar:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (8)$$

O resultado é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3}. \quad (4.10)$$

Dipolo alinhado com o eixo z em Coordenadas Polares

Escolhemos

$$\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}.$$

Usamos a identidade

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (9)$$

Também,

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} = p \cos \theta.$$

Notas: pag. 7-8

Substituindo em (4.10):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - p(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})}{r^3}. \quad (10)$$

Agrupando termos:

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right]. \quad (4.11)$$

Linhas de campo do dipolo

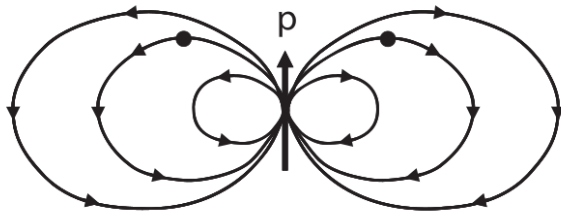


Figura 4.3: linhas de campo de um dipolo elétrico.

Componentes

Da equação (4.11):

$$E_r = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} 2 \cos \theta, \quad E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta.$$

Dedução das linhas de campo

A equação diferencial das linhas de campo é

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{E_r}{E_\theta}. \quad (11)$$

Substituindo:

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \cot \theta. \quad (12)$$

Logo,

$$\frac{dr}{r} = 2 \cot \theta d\theta. \quad (13)$$

Integração das linhas de campo

Integramos:

$$\int \frac{dr}{r} = 2 \int \cot \theta \, d\theta. \quad (14)$$

Como

$$\int \cot \theta \, d\theta = \ln(\sin \theta),$$

temos

$$\ln r = 2 \ln(\sin \theta) + C. \quad (15)$$

Portanto,

$$r = k \sin^2 \theta. \quad (4.12)$$

Exemplo 4.1

Enunciado

Seja $E(r)$ o campo elétrico produzido por uma densidade de carga $\rho(r)$ inteiramente contida em uma esfera V de raio R . Mostrar que

$$p = -3\epsilon_0 \int_V d^3r E(r).$$

Ideia

Vamos integrar o campo dentro da esfera e relacionar o resultado ao momento de dipolo da distribuição.

Notas: pag 13-15

Exemplo 4.1: ponto de partida

Pela lei de Coulomb,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3s \rho(\mathbf{s}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}. \quad (16)$$

Integramos sobre o volume V :

$$\frac{1}{V} \int_V d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int_V d^3r \int d^3s \frac{\rho(\mathbf{s})}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}. \quad (17)$$

Exemplo 4.1: trocando a ordem

Trocando a ordem das integrais:

$$\frac{1}{V} \int_V d^3r E(r) = \frac{1}{V} \int d^3s \rho(s) \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r \frac{r-s}{|r-s|^3} \right]. \quad (18)$$

Como

$$r-s = -(s-r),$$

podemos escrever

$$\frac{1}{V} \int_V d^3r E(r) = -\frac{1}{V} \int d^3s \rho(s) \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r \frac{s-r}{|s-r|^3} \right]. \quad (19)$$

Exemplo 4.1: interpretação do colchete

Observação importante

O termo entre colchetes é o campo elétrico no ponto s produzido por uma esfera de raio R , uniformemente carregada com densidade unitária.

Pela Lei de Gauss, para $s < R$:

$$E_{\text{esfera}}(s) = \frac{1}{3\epsilon_0} s. \quad (20)$$

Para $s > R$:

$$E_{\text{esfera}}(s) = \frac{V}{4\pi\epsilon_0} \frac{s}{s^3}. \quad (21)$$

Exemplo 4.1: caso em que toda a carga está dentro

Como a carga está inteiramente dentro de V , usamos apenas $s < R$:

$$\frac{1}{V} \int_V d^3r E(r) = -\frac{1}{V} \int_V d^3s \rho(s) \frac{s}{3\epsilon_0}. \quad (22)$$

Mas

$$p = \int_V d^3s \rho(s)s. \quad (23)$$

Logo,

$$\frac{1}{V} \int_V d^3r E(r) = -\frac{1}{3\epsilon_0 V} p. \quad (24)$$

Exemplo 4.1: resultado final

Multiplicando por V :

$$\int_V d^3r E(r) = -\frac{1}{3\epsilon_0} p. \quad (25)$$

Portanto,

$$p = -3\epsilon_0 \int_V d^3r E(r) \quad (26)$$

Interpretação

A integral volumétrica do campo dentro da esfera contém exatamente a informação do momento de dipolo da distribuição.

4.2.1 O Dipolo Elétrico Pontual

Construção de Maxwell

Um dipolo pode ser construído a partir de duas cargas iguais e opostas, separadas por uma distância muito pequena.

$$p = qb \quad (4.13a)$$

Limite de dipolo pontual

Tomamos o limite em que a separação entre as cargas vai a zero, mas o momento de dipolo p permanece finito.

Potencial do Dipolo Pontual

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (4.13)$$

Interpretação

O potencial do dipolo é obtido aplicando uma derivada direcional ao potencial de uma carga pontual.

Ideia física

Um dipolo pontual carrega informação sobre a orientação da distribuição de carga.

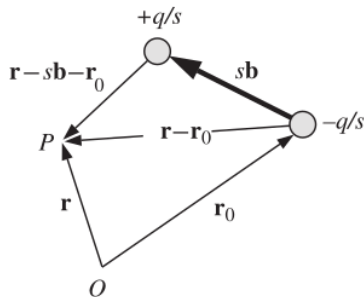


Figura 4.5: Um dipolo com carga total $Q = 0$ e momento de dipolo $\mathbf{p} = q\mathbf{b}$. O potencial é medido no ponto de observação P . O é a origem das coordenadas.

Densidade de Carga do Dipolo Pontual

Usando a equação de Poisson

A densidade de carga associada ao dipolo pontual pode ser obtida a partir de

$$\rho_D(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}).$$

$$\rho_D(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.14)$$

Comentário

Essa densidade é singular: ela não descreve um dipolo físico real, mas é uma idealização matemática útil.

Notas: pag: 16-20

4.2.2 A Singularidade na Origem

Problema

Para $r \neq r_0$, o campo do dipolo pontual é dado pela expressão usual do campo dipolar.

Questão

O que acontece exatamente no ponto $r = r_0$?

Ideia

Como o dipolo pontual foi construído a partir de cargas pontuais, esperamos que também apareça uma função delta no campo elétrico.

Resultado da integração esférica

Para um volume esférico centrado em r_0 , obtém-se:

$$\int_V d^3r E(r) = -\frac{p}{3\epsilon_0} \quad (4.15)$$

Significado

O campo dipolar regular, sozinho, não captura completamente o comportamento no ponto singular.

Campo Completo do Dipolo Pontual

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right] \quad (4.16)$$

Onde

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Mensagem

O termo com delta corrige o campo exatamente na posição do dipolo.

4.2.3 A Força sobre um Dipolo

Campo externo lentamente variável

Considere uma distribuição neutra de carga $\rho(r')$ submetida a um campo externo $E(r')$ que varia lentamente no espaço.

$$E(r') = E(r) + [(r' - r) \cdot \nabla]E(r) + \dots \quad (4.17)$$

Ideia

Expandimos o campo em torno de um ponto de referência dentro da distribuição.

Distribuição neutra

Como a carga total é zero, o termo constante da expansão não contribui para a força total.

$$\mathbf{F} = \int d^3 r' \rho(r') \mathbf{E}(r') = \int d^3 r' \rho(r') (\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{E}(r) \quad (4.18)$$

Consequência

A força depende do momento de dipolo da distribuição.

Notas: pag. 25-27

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.19)$$

Leitura física

A força aparece quando o campo elétrico muda de ponto para ponto.

Conclusão importante

Um campo elétrico uniforme pode produzir torque em um dipolo, mas não produz força resultante sobre um dipolo neutro.

Quando p é constante

Se $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ e p não depende da posição, então:

$$\mathbf{F} = \nabla(p \cdot \mathbf{E}) \quad (4.20)$$

Interpretação

A força aponta na direção em que a energia de interação varia mais rapidamente.

Notas: pag. 28-31

Dipolo pontual equivalente

A força também pode ser calculada usando a densidade singular do dipolo pontual.

$$\mathbf{F} = \int d^3r' \mathbf{E}(r') \rho_D(r') = \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \delta(r' - r) \nabla' \mathbf{E}(r') \quad (4.21)$$

Resultado

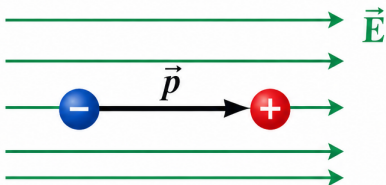
A função delta seleciona o valor local do gradiente do campo.

Notas: pag 31-32

1. O SIGNIFICADO FÍSICO CENTRAL

Um dipolo elétrico (neutro) só sente força quando o campo elétrico **varia no espaço**.

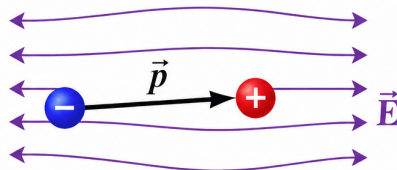
CAMPO UNIFORME



As forças nas cargas + e - são iguais e opostas.

$$\mathbf{F} = 0$$

CAMPO NÃO UNIFORME



As forças não se cancelam.
O dipolo sente força líquida.

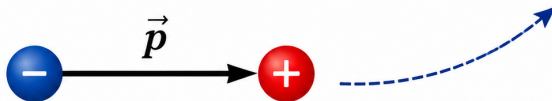
$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \neq 0$$

2. DERIVADA DIRECIONAL

$(\mathbf{p} \cdot \nabla)$ é a derivada ao longo da direção do dipolo.
O dipolo “mede” quanto o campo cresce nessa direção.

$|E|$ pequeno

$|E|$ grande



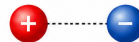
Se o campo aumenta na direção de $\mathbf{p}$:
a força aponta para **regiões de campo mais forte**.

3. POR QUE ESSA EQUAÇÃO É IMPORTANTE?



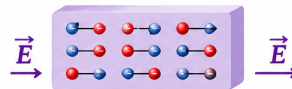
Explica forças em matéria neutra

Átomos e moléculas são quase neutros, mas possuem dipolos permanentes ou induzidos.



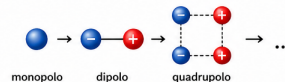
Base da física dos dielétricos

Em materiais, $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ é a densidade de dipolos. A força macroscópica vem desta física microscópica.



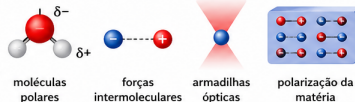
Transição monopolo $\rightarrow$ dipolo $\rightarrow$ quadrupolo ...

Monopolo responde ao valor do campo; dipolo responde ao gradiente; quadrupolo à curvatura; etc.



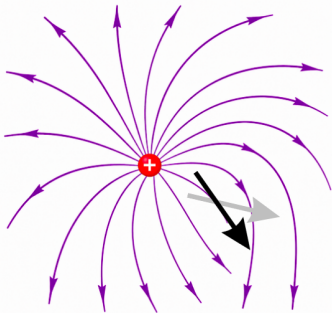
Aplicações amplas

Moléculas polares, forças intermoleculares, armadilhas ópticas, polarização da matéria e muito mais.



Esta equação mostra que um dipolo sente força apenas quando o **campo varia no espaço**. É a essência da física dos dipolos e a base de inúmeros fenômenos na natureza e na tecnologia.

4. INTERPRETAÇÃO ENERGÉTICA



A energia potencial de um dipolo em um campo $\vec{E}$

$$U = - \vec{p} \cdot \vec{E}$$

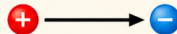
A força é o negativo do gradiente da energia:

$$\vec{F} = - \nabla U = \nabla (\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$



O dipolo move-se tentando **minimizar** sua energia potencial.

Energia mínima quando $\vec{p}$ está alinhado com $\vec{E}$.



4.2.4 O Torque sobre um Dipolo

Torque de Coulomb

De modo análogo à força, calculamos o torque exercido pelo campo elétrico sobre a distribuição dipolar.

$$\mathbf{N} = \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rho_D(\mathbf{r}') \quad (4.22)$$

Ideia

O torque mede a tendência do campo em girar a distribuição de carga.

Notas: pag 33-35

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4.24)$$

Dois efeitos

- O primeiro termo gira o dipolo em torno de seu próprio centro.
- O segundo termo gira o centro da distribuição em torno da origem escolhida.

Caso simples

Se a origem está no centro do dipolo, o termo $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ desaparece.

Torque em Campo Uniforme

Campo uniforme

Quando o campo elétrico é uniforme, a força resultante sobre o dipolo é nula:

$$F = 0.$$

$$N = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (4.24a)$$

Interpretação física

O campo tende a alinhar o momento de dipolo $\mathbf{p}$ com o campo elétrico $\mathbf{E}$.

4.2.5 Energia Potencial de um Dipolo

Ideia física

A energia de interação entre uma distribuição localizada $\rho(r)$ e um campo externo lentamente variável pode ser calculada usando a densidade singular de um dipolo pontual.

$$V_E(r) = \int d^3r' \varphi(r') \rho_D(r') = - \int d^3r' \varphi(r') \mathbf{p} \cdot \nabla' \delta(r' - r). \quad (4.25)$$

Observação

Aqui ∇' deriva em relação a r' , enquanto r é a posição do dipolo.

Integração por Partes

Partimos de

$$V_E(\mathbf{r}) = - \int d^3 r' \varphi(\mathbf{r}') \mathbf{p} \cdot \nabla' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \quad (27)$$

Como $\mathbf{p}$ é constante,

$$V_E(\mathbf{r}) = - \sum_i p_i \int d^3 r' \varphi(\mathbf{r}') \partial'_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (28)$$

$$= \sum_i p_i \int d^3 r' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \partial'_i \varphi(\mathbf{r}') \quad (29)$$

$$= \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}). \quad (30)$$

Como

$$E(r) = -\nabla\varphi(r), \quad (31)$$

temos

$$V_E(r) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(r). \quad (4.26)$$

Interpretação

A energia é mínima quando $\mathbf{p}$ está alinhado com $\mathbf{E}$.

Força sobre um Dipolo

A força é obtida a partir do gradiente negativo da energia:

$$F = -\nabla V_E \quad (32)$$

$$= -\nabla [-p \cdot E(r)] \quad (33)$$

$$= \nabla (p \cdot E). \quad (34)$$

$$F = -\nabla V_E = \nabla(p \cdot E). \quad (4.27)$$

Comentário

Se o campo é uniforme, $\nabla(p \cdot E) = 0$, portanto não há força resultante.

Rotação Infinitesimal do Dipolo

Para encontrar o torque, fazemos o dipolo girar rigidamente por um ângulo infinitesimal $\delta\alpha$.

$$\delta\mathbf{p} = \delta\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}. \quad (4.28)$$

Ideia

Uma rotação infinitesimal muda a direção de $\mathbf{p}$, mas não muda seu módulo.

Torque sobre o Dipolo

A variação da energia é

$$\delta V_E = -\delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (35)$$

$$= -(\delta \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{E} \quad (36)$$

$$= -(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \cdot \delta \boldsymbol{\alpha}. \quad (37)$$

$$\delta V_E = -\delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -(\delta \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{E} = -(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \cdot \delta \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.29)$$

Identificação do Torque

Pela mecânica,

$$\delta V_E = -N \cdot \delta \alpha. \quad (38)$$

Comparando com

$$\delta V_E = -(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \cdot \delta \alpha, \quad (39)$$

obtemos

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (4.24)$$

Interpretação

O torque tende a alinhar o dipolo com o campo elétrico.

4.2.6 Interação Dipolo–Dipolo

Considere dois dipolos pontuais pré-existentis:

p_1 em r_1 , p_2 em r_2 .

Energia de montagem

Não custa energia trazer o primeiro dipolo para sua posição.

A energia aparece ao trazer o segundo dipolo para o campo produzido pelo primeiro.

$$W_{12} = -p_2 \cdot E_1(r_2). \quad (40)$$

Campo do Primeiro Dipolo

Definimos

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad R = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \quad (41)$$

O campo produzido por $\mathbf{p}_1$ no ponto $\mathbf{r}_2$ é

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}_1}{R^3} \right]. \quad (42)$$

Portanto,

$$W_{12} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2). \quad (43)$$

Energia de Interação entre Dois Dipolos

Substituindo o campo de p_1 , obtemos

$$W_{12} = -p_2 \cdot E_1(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_1 \cdot p_2}{|r_2 - r_1|^3} - \frac{3p_1 \cdot (r_2 - r_1)p_2 \cdot (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^5} \right]. \quad (4.30)$$

Energia Total de Muitos Dipolos

Para uma coleção de N dipolos pontuais, somamos a interação de todos os pares:

$$U_E = W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} - \frac{3\mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\mathbf{p}_j \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^5} \right]. \quad (4.31)$$

Por que aparece o fator $1/2$?

Na soma dupla,

$$(i, j) \quad \text{e} \quad (j, i)$$

representam o mesmo par físico de dipolos.

Exemplo

A interação entre os dipolos 1 e 2 aparece duas vezes:

$$W_{12} \quad \text{e} \quad W_{21}.$$

Por isso dividimos por 2:

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} W_{ij}. \quad (44)$$

Forma Compacta da Energia Total

Se $E(r_i)$ é o campo produzido por todos os outros dipolos na posição do dipolo i , então

$$U_E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i \cdot E(r_i). \quad (4.32)$$

Importante

O campo $E(r_i)$ não inclui o campo do próprio dipolo i . Ele inclui apenas os campos dos outros dipolos.

4.3 C

Definição informal

Uma camada de dipolos é uma distribuição de dipolos elétricos confinados a uma superfície.

- Cada molécula possui momento de dipolo p .
- Muitas moléculas próximas formam uma distribuição superficial.
- A grandeza macroscópica relevante é o momento de dipolo por unidade de área.

$$\tau = \frac{p}{S} = \frac{qb}{S} = \sigma b. \quad (4.33)$$

Representação por Duas Superfícies Carregadas

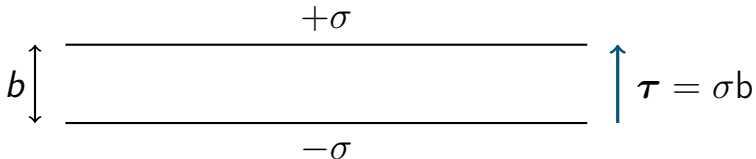


Figura 4.7

Vista lateral de uma camada de dipolos: duas superfícies com densidades de carga opostas $\pm\sigma$, separadas por uma distância b .

Limite de camada fina

Tomamos

$$b \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \tau = \sigma b \text{ fixo.}$$

- A separação microscópica entre as cargas deixa de ser resolvida.
- A camada passa a ser descrita apenas por τ .
- τ é uma propriedade superficial, assim como σ .

4.3.1 Potencial de uma Camada de Dipolos

Para uma superfície S , generalizamos a densidade de momento de dipolo:

$$\tau = \frac{dp}{dS}. \quad (4.34)$$

Caso geral

A superfície não precisa ser plana, τ não precisa ser uniforme e os dipolos não precisam ser perpendiculares à superfície.

Potencial por Superposição de Dipolos Pontuais

O potencial de uma camada é obtido somando os potenciais de dipolos pontuais:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\mathbf{p}(\mathbf{r}_s) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}. \quad (4.35a)$$

Como

$$d\mathbf{p}(\mathbf{r}_s) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}_s) dS,$$

temos

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}_s) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}. \quad (4.35)$$

Convertendo a Integral de Superfície em Volume

Para uma camada no plano $z = 0$, escrevemos

$$\mathbf{r}'_s = x'\hat{x} + y'\hat{y}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_s + z'\hat{z}.$$

A superfície pode ser representada por uma delta de Dirac:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta(z') \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}'_s) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.36)$$

Mudando o Gradiente de r para r'

Usamos a identidade

$$\nabla \frac{1}{|r - r'|} = -\nabla' \frac{1}{|r - r'|}. \quad (45)$$

Assim,

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta(z') \tau(r'_s) \cdot \nabla \frac{1}{|r - r'|} \quad (46)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta(z') \tau(r'_s) \cdot \nabla' \frac{1}{|r - r'|}. \quad (47)$$

Integração por Partes

Definindo

$$A(r') = \tau(r'_s)\delta(z'),$$

temos

$$\int d^3r' A \cdot \nabla' \frac{1}{|r - r'|} = - \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot A}{|r - r'|}. \quad (48)$$

Logo,

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot [\tau(r'_s)\delta(z')]}{|r - r'|}. \quad (4.37)$$

Densidade Singular de Carga da Camada

Comparando com

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (49)$$

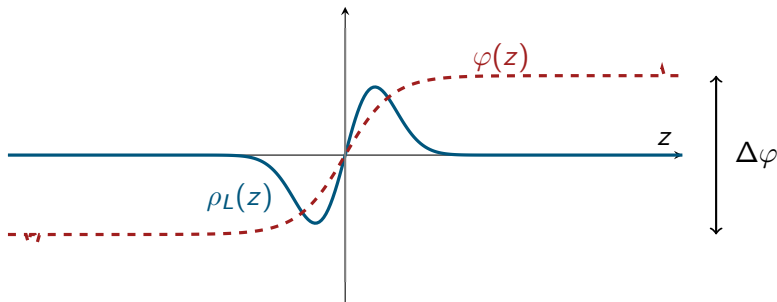
identificamos

$$\rho_L(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}_s)\delta(z)]. \quad (4.38)$$

Interpretação

Uma camada de dipolos é equivalente a uma distribuição singular de carga localizada na superfície.

Figura 4.8: Potencial e Densidade Singular



Mensagem da figura

No limite macroscópico, ρ_L torna-se singular em $z = 0$, enquanto o potencial sofre um salto finito $\Delta\varphi$.

Para interpretar ρ_L , definimos o gradiente superficial:

$$\nabla_S = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.39)$$

Ideia

∇_S mede variações apenas ao longo da superfície, não na direção perpendicular.

A variação lateral da densidade de dipolos gera uma carga superficial efetiva:

$$\sigma(r_s) = -\nabla_S \cdot \boldsymbol{\tau}(r_s). \quad (4.40)$$

Interpretação

Se $\boldsymbol{\tau}$ varia ao longo da superfície, os extremos positivos e negativos dos dipolos paralelos não se cancelam completamente.

Separando as Contribuições de ρ_L

Escrevemos

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\parallel} + \tau_z \hat{\mathbf{z}}.$$

Então,

$$\rho_L(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}_s)\delta(z)] \quad (50)$$

$$= -\nabla_S \cdot [\boldsymbol{\tau}_{\parallel}(\mathbf{r}_s)\delta(z)] - \frac{\partial}{\partial z} [\tau_z(\mathbf{r}_s)\delta(z)]. \quad (51)$$

Como $\boldsymbol{\tau}$ não depende de z ,

$$\rho_L(\mathbf{r}) = -\tau_z(\mathbf{r}_s)\delta'(z) + \sigma(\mathbf{r}_s)\delta(z). \quad (4.41)$$

Significado dos Dois Termos

$$\rho_L(\mathbf{r}) = -\tau_z(r_s)\delta'(z) + \sigma(r_s)\delta(z). \quad (4.41)$$

Termo perpendicular

$$-\tau_z(r_s)\delta'(z)$$

vem da componente do dipolo perpendicular à superfície.

Termo paralelo

$$\sigma(r_s)\delta(z)$$

vem da variação lateral dos dipolos paralelos à superfície.

Relação com a Equação de Poisson

No caso unidimensional,

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} = -\rho_L(z). \quad (4.42)$$

Leitura física

A curvatura do potencial está diretamente ligada à densidade de carga.

- Onde $\rho_L(z)$ é positiva, a curvatura de $\varphi(z)$ é negativa.
- Onde $\rho_L(z)$ é negativa, a curvatura de $\varphi(z)$ é positiva.
- No limite de camada infinitamente fina, o potencial apresenta uma descontinuidade.

4.3.2 Condições de Contorno em uma Camada de Dipolos

Condição já conhecida

O termo proporcional a $\sigma(r_s)\delta(z)$ gera uma descontinuidade na componente normal do campo elétrico:

$$\epsilon_0 \hat{n}_2 \cdot [E_1 - E_2] = \sigma(r_s).$$

Agora queremos entender o efeito do primeiro termo de

$$\rho_L(r) = -\tau_z(r_s)\delta'(z) + \sigma(r_s)\delta(z). \quad (4.41)$$

Equação de Poisson para o Termo $\delta'(z)$

Usando apenas o termo

$$\rho_L(r) = -\tau_z(r_s)\delta'(z),$$

a equação de Poisson

$$\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = -\rho_L$$

fica, na direção normal à camada,

$$\epsilon_0 \frac{d^2}{dz^2} \varphi(r_s, z) = \tau_z(r_s) \delta'(z). \quad (4.43)$$

Ideia

A derivada da delta de Dirac gera uma descontinuidade no próprio potencial.

Integramos a equação

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \tau_z(r_s) \delta'(z)$$

uma vez em relação a z :

$$\epsilon_0 \frac{d}{dz} \varphi(r_s, z) = \tau_z(r_s) \delta(z) + C. \quad (4.44)$$

Comentário

A constante C desaparece quando calculamos a diferença entre os dois lados imediatamente vizinhos da camada.

Integramos (4.44) de $z = 0^-$ até $z = 0^+$:

$$\int_{0^-}^{0^+} \epsilon_0 \frac{d\varphi}{dz} dz = \int_{0^-}^{0^+} \tau_z(r_s) \delta(z) dz \quad (52)$$

$$\epsilon_0 [\varphi(r_s, 0^+) - \varphi(r_s, 0^-)] = \tau_z(r_s). \quad (53)$$

$$\varphi(r_s, z = 0^+) - \varphi(r_s, z = 0^-) = \frac{\tau_z(r_s)}{\epsilon_0}. \quad (4.45)$$

Resultado principal

Uma camada de dipolos produz uma descontinuidade finita no potencial eletrostático.

$$\Delta\varphi = \varphi(0^+) - \varphi(0^-) = \frac{\tau_z}{\epsilon_0}.$$

Por quê?

Dentro da camada microscópica, o campo elétrico aponta da carga positiva para a carga negativa.

Assim, ao atravessar a camada, o potencial muda rapidamente.

Descontinuidade no Campo Tangencial

Se a densidade de dipolo varia ao longo da superfície, o campo tangencial também pode ser descontínuo.

$$\hat{n}_2 \times [\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] = \nabla \times [\hat{n}_2 (\hat{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau})] / \epsilon_0. \quad (4.46)$$

Comentário físico

Essa condição altera as fórmulas usuais de reflexão e transmissão quando há uma camada de dipolos na interface.



Hipóteses

Consideramos uma gota retangular de área fixa

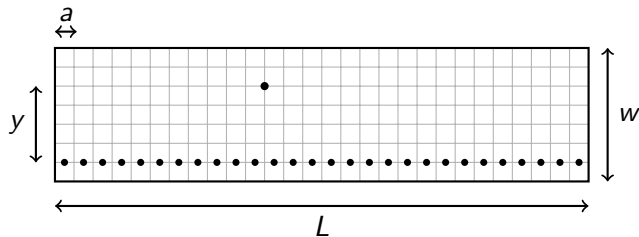
$$A = Lw,$$

com comprimento L e largura w , no regime

$$L \gg w \gg a.$$

- a : distância lateral entre moléculas vizinhas;
- cada molécula possui dipolo apontando para fora da página;
- queremos encontrar a largura de equilíbrio w_0 .

Figura 4.9: Vista Superior da Gota



Representação

Cada quadrado contém uma molécula polar. Os pontos pretos destacam uma linha completa de moléculas e uma molécula a uma distância y dessa linha.

Energia de Perímetro

A energia química é proporcional ao perímetro da gota.
Como $L \gg w$, o perímetro é aproximadamente

$$2L.$$

Se λ é a energia química por unidade de comprimento,

$$U_C \approx 2L\lambda = \frac{2\lambda A}{w}. \quad (4.47)$$

Interpretação

Para área fixa A , aumentar w diminui $L = A/w$, reduzindo a energia de perímetro.

Energia Eletrostática entre Duas Linhas

Cada linha contém dipolos paralelos distribuídos ao longo do comprimento L .
A interação entre duas linhas separadas por distância y é

$$U(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 \frac{\tau^2 a^2}{[(x_1 - x_2)^2 + y^2]^{3/2}}. \quad (4.48a)$$

Origem

Este termo vem da interação dipolo–dipolo para dipolos perpendiculares ao plano da gota.

Resultado da Integral entre Linhas

A integral resulta em

$$U(y) = \frac{\tau^2 a^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{y^2} \left[\sqrt{L^2 + y^2} - y \right]. \quad (4.48)$$

No limite

$$L \gg y,$$

temos

$$\sqrt{L^2 + y^2} \approx L, \quad (54)$$

portanto

$$U(y) \approx \frac{\tau^2 a^2 L}{2\pi\epsilon_0 y^2}. \quad (55)$$

Somando Pares de Linhas

Há aproximadamente

$$\frac{w}{a}$$

linhas paralelas de dipolos.

Contagem dos pares

- $w/a - 1$ pares separados por a ;
- $w/a - 2$ pares separados por $2a$;
- $w/a - n$ pares separados por na .

Assim,

$$y = na.$$

Energia Eletrostática Total

Somando todos os pares de linhas,

$$U_E = \frac{\tau^2 L}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{w/a} \frac{w/a - n}{n^2}. \quad (4.49a)$$

Para $w \gg a$, aproximamos a soma por uma integral:

$$U_E \approx \frac{\tau^2 L}{2\pi\epsilon_0} \int_1^{w/a} dn \frac{w/a - n}{n^2}. \quad (4.49b)$$

Calculamos

$$\int_1^{w/a} \frac{w/a - n}{n^2} dn = \frac{w}{a} \int_1^{w/a} \frac{dn}{n^2} - \int_1^{w/a} \frac{dn}{n} \quad (56)$$

$$= \frac{w}{a} \left[1 - \frac{a}{w} \right] - \ln \frac{w}{a} \quad (57)$$

$$\approx \frac{w}{a} - \ln \frac{w}{a}. \quad (58)$$

Logo,

$$U_E \approx \frac{\tau^2 L}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{w}{a} - \ln \frac{w}{a} \right]. \quad (4.49)$$

Energia Total da Gota

A energia total é a soma de

$$U_T = U_C + U_E.$$

Usando

$$L = \frac{A}{w},$$

temos

$$U_T = U_C + U_E = \frac{2A}{w} \left[\lambda + \frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{w}{a} - \ln \frac{w}{a} \right) \right]. \quad (4.50)$$

Minimização da Energia

Queremos minimizar

$$U_T(w) = \frac{2A}{w} \left[\lambda + \frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{w}{a} - \ln \frac{w}{a} \right) \right].$$

Definindo

$$C = \frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0},$$

temos

$$U_T(w) = 2A \left[\frac{\lambda}{w} + \frac{C}{a} - \frac{C}{w} \ln \frac{w}{a} \right].$$

Encontrando a Largura de Equilíbrio

Derivamos em relação a w :

$$\frac{dU_T}{dw} = 2A \left[-\frac{\lambda}{w^2} - C \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{w} \ln \frac{w}{a} \right) \right] \quad (59)$$

$$= 2A \left[-\frac{\lambda}{w^2} - C \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^2} \ln \frac{w}{a} \right) \right]. \quad (60)$$

No equilíbrio,

$$\frac{dU_T}{dw} = 0.$$

Resultado para w_0

Da condição

$$-\lambda - C + C \ln \frac{w_0}{a} = 0,$$

obtemos

$$\ln \frac{w_0}{a} = 1 + \frac{\lambda}{C}.$$

Como

$$C = \frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0},$$

segue que

$$w_0 = a \exp \left(1 + \frac{4\pi\epsilon_0\lambda}{\tau^2} \right).$$

Negligenciando o fator e na aproximação logarítmica,

$$w_0 \approx a \exp \left(\frac{4\pi\epsilon_0\lambda}{\tau^2} \right). \quad (4.51)$$

$$w_0 \approx a \exp \left(\frac{4\pi\epsilon_0\lambda}{\tau^2} \right). \quad (4.51)$$

Consequência importante

A largura de equilíbrio w_0 é independente do comprimento L da gota.

- A gota cresce aumentando seu comprimento L .
- A largura permanece aproximadamente fixa.
- Isso explica por que as gotas observadas têm praticamente a mesma largura.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_{ij} \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5}$$

Ideia Física

O termo de quadrupolo domina quando:

$$Q = 0 \quad \text{e} \quad p = 0.$$

Ou seja:

- carga total nula;
- momento de dipolo nulo.

Exemplos

- núcleos atômicos;
- moléculas diatômicas homonucleares (N_2 , por exemplo).

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_{ij} \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} \quad (4.52)$$

Tensor de Quadrupolo

Definição

Os componentes do tensor de quadrupolo elétrico são:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) r_i r_j \quad (4.53)$$

Interpretação

O quadrupolo mede como a distribuição de carga é “esticada” ou “achatada” espacialmente.

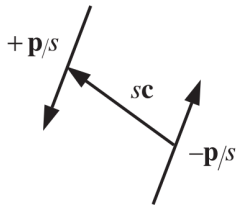
- monopolo: mede carga total;
- dipolo: mede separação entre cargas;
- quadrupolo: mede deformações da distribuição.

Origem do Nome Quadrupolo

Construção

Um quadrupolo pode ser construído com:

- dois dipolos opostos;
- quatro cargas no total.



Ideia

Os dipolos possuem orientações opostas:

$$+\frac{p}{s} \quad \text{e} \quad -\frac{p}{s}$$

separados por:

s .

Resultado

No limite:

$$s \rightarrow 0,$$

surge um quadrupolo pontual.

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{c} \cdot \nabla)(\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{1}{r} \quad (4.54)$$

Interpretação

O quadrupolo envolve duas derivadas espaciais do potencial:

$$\frac{1}{r}.$$

Analogia Multipolar

$$\text{monopolo} \sim \frac{1}{r}$$

$$\text{dipolo} \sim \nabla \frac{1}{r}$$

$$\text{quadrupolo} \sim \nabla \nabla \frac{1}{r}$$

Forma do Tensor de Quadrupolo

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}(c_i p_j + c_j p_i) \quad (4.55)$$

Simetria

$$Q_{ij} = Q_{ji}$$

Consequência

Uma matriz 3×3 simétrica possui apenas:

6

componentes independentes.

Quadrupolo Pontual

A densidade de carga singular correspondente é:

$$\rho_Q(\mathbf{r}) = Q_{ij} \nabla_i \nabla_j \delta(\mathbf{r}) \quad (4.56)$$

Notas: pag. 40-41

Cada Multipolo corresponde a uma derivada adicional da delta

- monopolo:

$$\delta(\mathbf{r})$$

- dipolo:

$$\nabla \delta(\mathbf{r})$$

- quadrupolo:

$$\nabla \nabla \delta(\mathbf{r})$$

O Tensor de Quadrupolo

Tensor Simétrico

O tensor de quadrupolo possui a propriedade:

$$Q_{ij} = Q_{ji}.$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Consequência

Uma matriz 3×3 genérica possui:

9

componentes independentes.

Mas a Simetria Impõe

$$Q_{xy} = Q_{yx},$$

$$Q_{xz} = Q_{zx},$$

$$Q_{yz} = Q_{zy}.$$

Por Que o Tensor é Simétrico?

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(r) r_i r_j \quad (4.53 \text{ revisitada})$$

Observe

Os fatores:

$$r_i r_j$$

satisfazem:

$$r_i r_j = r_j r_i.$$

Exemplo

$$xy = yx, \quad xz = zx.$$

Ideia Física

Existe um sistema especial de coordenadas:

$$(x', y', z')$$

em que o tensor de quadrupolo fica diagonal.

$$Q' = \begin{bmatrix} Q'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{zz} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Significado

Nesse sistema:

- desaparecem os termos mistos;
- a geometria da distribuição fica mais clara;
- os eixos se alinham às direções naturais da distribuição.

Tensor original:

Q

Termos Diagonais

$$Q_{xx}, \quad Q_{yy}, \quad Q_{zz}$$

medem alongamentos ao longo dos eixos principais.

Termos Mistos

$$Q_{xy}, \quad Q_{xz}, \quad Q_{yz}$$

medem inclinações e correlações geométricas entre direções espaciais.

Diagonalizar o tensor significa remover essas correlações.

Definição no Sistema Principal

$$Q'_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \int d^3 r' \rho(r') r'_i r'_j \quad (4.58)$$

Papel da Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Consequência

A delta elimina automaticamente:

$$Q'_{xy},$$

$$Q'_{xz},$$

$$Q'_{yz}.$$

Somente os termos:

$$Q'_{xx},$$

$$Q'_{yy},$$

$$Q'_{zz}$$

sobrevivem.

Transformação de Base

A mudança de coordenadas é escrita como:

$$Q' = U^{-1}QU \quad (4.59)$$

Quem é U?

U

é a matriz formada pelos autovetores de:

Q.

Diagonalização: Resultado Físico

Resultado Importante

Toda matriz simétrica:

$$Q_{ij} = Q_{ji}$$

pode ser diagonalizada.

$$Q \implies Q' = \begin{bmatrix} Q'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{zz} \end{bmatrix}$$

Interpretação

A nova base revela os eixos principais da distribuição de carga.

Autovetores

Definem as direções principais da distribuição de carga.

$$Qv = \lambda v$$

Autovalores

Os números:

$$Q'_{xx}, \quad Q'_{yy}, \quad Q'_{zz}$$

são os autovalores do tensor.

Eles quantificam a deformação espacial ao longo dos eixos principais.

Analogia com o Tensor de Inércia

Observação Importante do Livro

O tensor de quadrupolo é matematicamente análogo ao tensor de inércia da mecânica clássica.

Tensor de Quadrupolo

Descreve:

- geometria da distribuição de carga;
- deformações elétricas;
- anisotropias do potencial.

Tensor de Inércia

Descreve:

- distribuição de massa;
- resistência à rotação;
- eixos principais do corpo.

Ambos são tensores simétricos diagonalizáveis.

O Quadropolo Elétrico

mede deformações espaciais da distribuição de carga.

- Tensor simétrico:

$$Q_{ij} = Q_{ji}$$

- Apenas 6 componentes independentes;
- Pode ser diagonalizado;
- Possui eixos principais naturais;
- É análogo ao tensor de inércia.

Tensor de Quadrupolo Sem Traço

Motivação

Nem sempre é conveniente medir ou escrever o tensor de quadrupolo no sistema de eixos principais.

Problema

Em um sistema arbitrário, o tensor primitivo:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho(r') r'_i r'_j$$

possui:

6

componentes independentes.

Estratégia

Podemos reescrever o potencial usando um novo tensor:

$$\Theta_{ij},$$

que é:

- simétrico;
- sem traço;
- mais econômico.

$$Q_{ij} \implies \Theta_{ij}$$

$$6 \longrightarrow 5$$

componentes independentes

Substituindo Q_{ij} no Potencial

Potencial quadrupolar

Começamos de:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_{ij} \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5}.$$

Usando:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') r'_i r'_j,$$

obtemos:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') r'_i r'_j \right\} \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}. \quad (4.60)$$

A Identidade Algébrica Importante

Identidade usada

O passo central é usar:

$$r'_i r'_j r^2 \delta_{ij} = r^2 r'^2 = r_i r_j r'^2 \delta_{ij}. \quad (4.61)$$

Por quê?

Como há soma sobre i e j , temos:

$$r'_i r'_j \delta_{ij} = r'_i r'_i = r'^2.$$

Logo:

$$r'_i r'_j r^2 \delta_{ij} = r^2 r'^2.$$

Reorganizando o Numerador

A Eq. (4.60) contém o produto:

$$r'_i r'_j (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) .$$

Distribuindo:

$$3r'_i r'_j r_i r_j - r'_i r'_j r^2 \delta_{ij} .$$

Agora usamos a identidade:

$$r'_i r'_j r^2 \delta_{ij} = r_i r_j r'^2 \delta_{ij} .$$

Portanto:

$$3r'_i r'_j r_i r_j - r_i r_j r'^2 \delta_{ij} = (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) r_i r_j .$$

Nova Forma do Potencial

Assim, a Eq. (4.60) pode ser escrita como:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(r') (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \right\} \frac{r_i r_j}{r^5}. \quad (4.62)$$

Ideia

Toda a informação da distribuição de carga agora está dentro das chaves.

Próximo passo

Definimos essa quantidade como um novo tensor:

$$\Theta_{ij}.$$

Definição do Tensor Sem Traço

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho(r') (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) = 3Q_{ij} - Q_{kk} \delta_{ij}. \quad (4.63)$$

Comparação

O tensor primitivo era:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho(r') r'_i r'_j.$$

O que mudou?

Subtraímos a parte proporcional a:

$$\delta_{ij}.$$

Essa parte corresponde ao traço, isto é, à parte esfericamente simétrica.

Potencial com Θ_{ij}

Com a definição:

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho(r') (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) ,$$

a Eq. (4.62) fica:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Theta_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5}. \quad (4.64)$$

Vantagem

O potencial fica mais simples:

tensor $\times$ geometria angular.

Por Que “Sem Traço”?

Traço de um tensor

O traço é a soma dos elementos diagonais:

$$\text{Tr}[\Theta] = \Theta_{xx} + \Theta_{yy} + \Theta_{zz}.$$

Em notação indicial:

$$\text{Tr}[\Theta] = \delta_{ij} \Theta_{ij}.$$

Usando a definição de Θ_{ij} :

$$\text{Tr}[\Theta] = \delta_{ij} \Theta_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(r) (3r_i r_i - r^2 \delta_{ii}). \quad (4.65)$$

Mostrando que o Traço é Zero

Agora usamos:

$$r_i r_i = r^2$$

e, em três dimensões,

$$\delta_{ii} = \delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz} = 3.$$

Logo:

$$3r_i r_i - r^2 \delta_{ii} = 3r^2 - 3r^2 = 0.$$

Portanto:

$$\text{Tr}[\Theta] = 0. \tag{4.65}$$

Restrição Sobre as Componentes

Como o traço é zero:

$$\text{Tr}[\boldsymbol{\Theta}] = \Theta_{xx} + \Theta_{yy} + \Theta_{zz} = 0. \quad (4.66)$$

Consequência

As três componentes diagonais não são independentes.

Por exemplo:

$$\Theta_{zz} = -\Theta_{xx} - \Theta_{yy}.$$

Assim, o número de componentes independentes cai de:

$$6 \longrightarrow 5.$$

Por Que Isso é Mais Econômico?

Tensor primitivo

$$Q_{ij} = Q_{ji}$$

possui:

6

componentes independentes.

Tensor sem traço

$$\Theta_{ij} = \Theta_{ji}, \quad \text{Tr}[\Theta] = 0$$

possui:

5

componentes independentes.

O tensor sem traço remove a parte esfericamente simétrica, que não contribui de forma independente para o potencial quadrupolar.

Mensagem Principal

O tensor de quadrupolo sem traço é definido por:

$$\Theta_{ij} = 3Q_{ij} - Q_{kk}\delta_{ij}.$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Theta_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5}.$$

Por que ele é útil?

- simplifica o potencial;
- funciona em coordenadas arbitrárias;
- reduz o número de componentes independentes;
- separa a parte verdadeiramente quadrupolar da parte esférica.

$$Q_{ij} \Rightarrow \Theta_{ij}$$

Ideia Física

O tensor de quadrupolo mede desvios da simetria esférica em distribuições de carga.

Núcleos Atômicos

Muitos núcleos possuem simetria de rotação em torno de um eixo principal, geralmente escolhido como o eixo z .

Se o núcleo é axialmente simétrico:

$$\Theta_{xx} = \Theta_{yy}.$$

Além disso, como o tensor é sem traço:

$$\Theta_{xx} + \Theta_{yy} + \Theta_{zz} = 0.$$

Substituindo a simetria axial:

$$2\Theta_{xx} + \Theta_{zz} = 0.$$

Portanto:

$$\Theta_{zz} = -2\Theta_{xx} = -2\Theta_{yy} \quad (4.70)$$

Apenas Um Parâmetro Independente

Consequência

Devido à simetria axial e à condição de traço nulo, todo o tensor pode ser descrito por apenas:

$$Q \equiv \Theta_{zz}.$$

$$\Theta_{ij} \implies Q$$

Interpretação

O sinal de Q revela o formato da distribuição de carga nuclear.

Interpretação Geométrica do Quadrupolo

Caso Esférico

Se:

$$Q = 0,$$

a distribuição é aproximadamente esférica.

Caso Prolato

Se:

$$Q > 0,$$

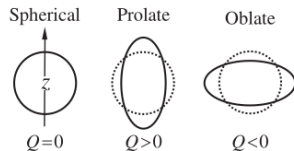
o núcleo é alongado ao longo do eixo z , como um charuto.

Caso Oblato

Se:

$$Q < 0,$$

o núcleo é achatado ao longo do eixo z , como uma abóbora.



Por Que o Sinal de Q Define a Forma?

Lembre que:

$$\Theta_{zz} = \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(r') (3z'^2 - r'^2) \quad (4.63)$$

- Se a carga se concentra ao longo do eixo z , então:

$$z'^2$$

tende a dominar.

- Nesse caso:

$$3z'^2 - r'^2 > 0,$$

e o momento quadrupolar fica positivo.

- Isso produz um núcleo alongado:

$$Q > 0.$$

Já para núcleos achatados

Grande parte da carga fica distribuída no plano transversal, fazendo:

$$r'^2 > 3z'^2$$

em média, o que leva a:

$$Q < 0.$$

Dados Experimentais de Quadropolo Nuclear

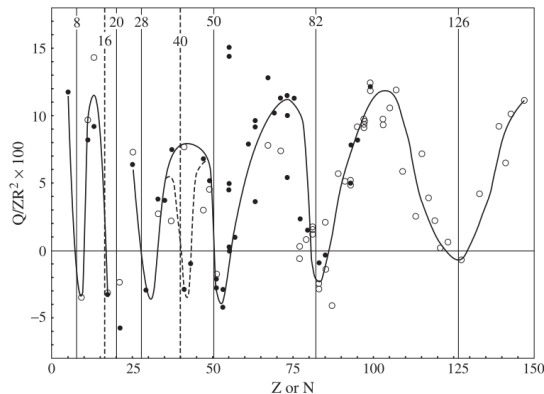


Figura: Parâmetro de quadropolo elétrico do estado fundamental Q para núcleos de massa ímpar. Os círculos preenchidos (abertos) representam núcleos com número ímpar de prótons (nêutrons) $Z(N)$. Os dados foram normalizados por ZR^2 , onde R é o raio nuclear. As linhas verticais indicam os números “mágicos”, nos quais camadas ou subcamadas nucleares se fecham.

Interpretando o Gráfico Experimental

Eixos do gráfico

$$Q/ZR^2$$

mede o quadrupolo elétrico normalizado.

O eixo horizontal representa:

$$Z \text{ ou } N,$$

isto é:

- número de prótons;
- ou número de nêutrons.

Linhas verticais

As linhas verticais indicam os chamados:

magic numbers.

Eles correspondem ao fechamento de camadas nucleares.

Resultado Importante

Quando uma camada fecha:

$$Q \approx 0,$$

pois o núcleo tende a recuperar simetria esférica.

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

Interpretação

Esses números aparecem naturalmente no modelo de camadas nucleares. Eles correspondem a níveis nucleares completamente preenchidos.

Analogia

São análogos aos gases nobres na estrutura eletrônica atômica: camadas completas tendem a produzir sistemas mais estáveis e mais simétricos.

Predominância de Núcleos Prolatos

Os dados experimentais mostram algo curioso:

núcleos prolatos aparecem com maior frequência.

Observação Experimental

Após o fechamento de uma camada nuclear, muitos núcleos tornam-se inicialmente:

$$Q < 0$$

(oblatos), mas rapidamente passam para:

$$Q > 0$$

(prolatos).

Questão em Aberto

Ainda não existe uma explicação simples e definitiva para a predominância observada de formas prolatas na natureza.

Exemplo 4.2: Elipsoide Uniforme

Problema

Calcular o tensor de quadrupolo sem traço

$$\Theta_{ij}$$

para um elipsoide com:

- densidade uniforme ρ ;
- volume V ;
- semi-eixos a_x, a_y, a_z .

O centro do elipsoide é escolhido como origem.

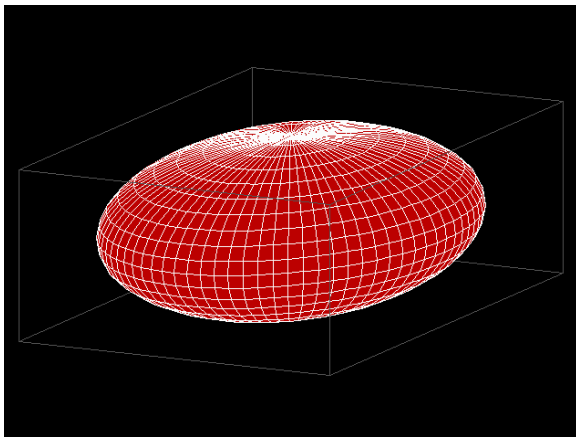
A superfície do elipsoide é:

$$\frac{x'^2}{a_x^2} + \frac{y'^2}{a_y^2} + \frac{z'^2}{a_z^2} = 1 \quad (4.71)$$

Elipsoide

$$a_x, a_y, a_z$$

Elipsoide



Simetria

Como os eixos coordenados coincidem com os eixos principais do elipsoide:

$$\Theta_{xy} = \Theta_{xz} = \Theta_{yz} = 0.$$

Isso ocorre porque integrais contendo termos ímpares, como:

$$xy, \quad xz, \quad yz,$$

cancelam-se pela simetria do volume.

Assim, basta calcular os elementos diagonais.

Por exemplo:

$$\Theta_{xx} = \frac{1}{2}\rho \int_V d^3r' (3x'^2 - r'^2) \quad (4.72)$$

Mudança de Variáveis

Definimos novas coordenadas adimensionais:

$$x' = a_x x, \quad y' = a_y y, \quad z' = a_z z. \quad (4.73)$$

Substituindo na equação do elipsoide:

$$\frac{(a_x x)^2}{a_x^2} + \frac{(a_y y)^2}{a_y^2} + \frac{(a_z z)^2}{a_z^2} = 1,$$

obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Resultado Importante

A integral sobre o elipsoide transforma-se em uma integral sobre uma esfera unitária.

Jacobiano da Transformação

O elemento de volume transforma-se como:

$$d^3 r' = dx' dy' dz'.$$

Usando:

$$dx' = a_x dx, \quad dy' = a_y dy, \quad dz' = a_z dz,$$

segue que:

$$d^3 r' = a_x a_y a_z d^3 r. \quad (4.74)$$

Substituindo tudo em Θ_{xx} :

$$\Theta_{xx} = \frac{1}{2} \rho a_x a_y a_z \int d^3 r (2a_x^2 x^2 - a_y^2 y^2 - a_z^2 z^2).$$

Integrais na Esfera Unitária

Pela simetria esférica:

$$\int d^3r x^2 = \int d^3r y^2 = \int d^3r z^2.$$

Além disso:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Somando as três integrais:

$$3 \int d^3r x^2 = \int d^3r r^2.$$

Portanto:

$$\int d^3r x^2 = \frac{1}{3} \int d^3r r^2. \quad (4.75)$$

Calculando a Integral Radial

Na esfera unitária:

$$d^3r = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

Então:

$$\int d^3r \, r^2 = \int_0^1 dr \, r^4 \int_0^\pi d\theta \, \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi.$$

Calculando:

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 2,$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi,$$

$$\int_0^1 r^4 \, dr = \frac{1}{5}.$$

Logo:

Resultado Final para Θ_{xx}

Substituindo as integrais:

$$\Theta_{xx} = \frac{1}{2} \rho a_x a_y a_z \frac{4\pi}{15} (2a_x^2 - a_y^2 - a_z^2).$$

Agora usamos o volume do elipsoide:

$$V = \frac{4\pi}{3} a_x a_y a_z. \quad (4.77)$$

Assim:

$$\frac{1}{2} \rho a_x a_y a_z \frac{4\pi}{15} = \frac{\rho V}{10}.$$

Finalmente:

$$\Theta_{xx} = \frac{1}{10} \rho V (2a_x^2 - a_y^2 - a_z^2). \quad (4.78)$$

Outras Componentes

Por simetria cíclica:

$$\Theta_{yy} = \frac{1}{10} \rho V (2a_y^2 - a_z^2 - a_x^2), \quad (4.79)$$

$$\Theta_{zz} = \frac{1}{10} \rho V (2a_z^2 - a_x^2 - a_y^2). \quad (4.80)$$

Somando:

$$\Theta_{xx} + \Theta_{yy} + \Theta_{zz} = 0.$$

Verificação

O tensor é realmente sem traço.

Elipsoide Alongado

Se:

$$a_z > a_x, a_y,$$

então:

$$\Theta_{zz} > 0.$$

A distribuição é prolata.

Elipsoide Achatado

Se:

$$a_z < a_x, a_y,$$

então:

$$\Theta_{zz} < 0.$$

A distribuição é oblata.

o tensor quadrupolar mede desvios da esfericidade