

# Capítulo 3 – Eletrostática

- ❶ **3.1 Introdução:** equações diferenciais da eletrostática e significado físico de  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ .
- ❷ **3.1.1 Escopo da eletrostática:** problemas de somação e de contorno.
- ❸ **3.2 Lei de Coulomb:** obtenção da forma integral do campo.
- ❹ **Exemplo 3.1:** anel, disco e folha infinita uniformemente carregados.
- ❺ **3.3 Potencial escalar:** definição, casos particulares e equação de Poisson.
- ❻ **Exemplo 3.2:** mudança de escala em distribuições de carga.
- ❼ **3.3.1 Força de Coulomb conservativa:** trabalho e independência do caminho.

## 3.1 Introdução

Na eletrostática, consideramos distribuições de carga  $\rho(\mathbf{r})$  independentes do tempo. Essas distribuições geram um campo elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  que deve obedecer às equações de Maxwell no regime estático.

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0 \quad (2)$$

### Interpretação

- A equação (1) diz que o campo eletrostático é **irrotacional**.
- A equação (2) diz que a **fonte** do campo é a densidade de carga.
- Conhecendo  $\rho(\mathbf{r})$ , queremos determinar  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  em todo o espaço.

# Força, torque e energia

O campo elétrico é relevante porque determina a força e o torque exercidos por uma distribuição  $\rho(\mathbf{r})$  sobre uma segunda distribuição  $\rho^*(\mathbf{r})$ .

$$\mathbf{F} = \int d^3r \rho^*(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

$$\mathbf{N} = \int d^3r \mathbf{r} \times \rho^*(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

## Comentário físico

Mesmo quando força e torque não são o foco principal, a **energia eletrostática** associada a  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\rho(\mathbf{r})$  e  $\rho^*(\mathbf{r})$  quase sempre é de interesse. Por isso, desenvolver expressões equivalentes para o campo e para o potencial será central ao longo do capítulo.

### 3.1.1 O escopo da eletrostática

#### Problemas de somação

A distribuição  $\rho(\mathbf{r})$  é dada **em todo o espaço**, de uma vez por todas. Então, determinar  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  se reduz, em essência, a calcular integrais sobre as fontes.

#### Problemas de contorno

A função  $\rho(\mathbf{r})$  não é totalmente conhecida de antemão. A presença de matéria, especialmente condutores e meios polarizáveis, faz a carga se redistribuir e impõe condições adicionais nas interfaces.

Historicamente, essa redistribuição recebe nomes diferentes conforme o material:

- **indução eletrostática** em condutores;
- **polarização elétrica** em não condutores.

Neste capítulo, o foco principal está nos **problemas de somação**, enquanto problemas de contorno aparecem mais adiante.

## 3.2 Lei de Coulomb: ponto de partida

As equações (??) e (??) especificam exatamente o rotacional e a divergência de  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Pelo teorema de Helmholtz, isso é suficiente para reconstruir o campo.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \int d^3 r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla \times \int d^3 r' \frac{\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5)$$

### Ideia essencial

Como o campo eletrostático satisfaz  $\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') = 0$ , o segundo termo desaparece. Já a divergência pode ser substituída por  $\rho(\mathbf{r}')/\epsilon_0$ , levando diretamente a uma expressão puramente em termos das fontes.

## Da forma geral à forma eletrostática

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6)$$

A derivada pode ser levada para dentro da integral porque o operador  $\nabla$  atua sobre a coordenada de observação  $\mathbf{r}$ , e não sobre a variável de integração  $\mathbf{r}'$ .

$$\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7)$$

### Consequência

Substituindo (7) em (6), obtemos a forma explícita do campo elétrico como superposição das contribuições produzidas por cada elemento de carga.

## Lei de Coulomb em forma integral

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (8)$$

A equação (??) mostra que o campo é a soma vetorial de todas as contribuições elementares

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Cada elemento de carga contribui ao longo da reta que liga a fonte ao ponto de observação.

### Leitura física

A intensidade decai como  $1/R^2$ , enquanto a direção é dada pelo versor radial que aponta da fonte para o ponto onde o campo está sendo calculado.



# Força de Coulomb entre distribuições

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \rho^*(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9)$$

## Consequência imediata

Trocando  $\rho \leftrightarrow \rho^*$ , o integrando muda de sinal, o que implica

$$\mathbf{F}^* = -\mathbf{F}.$$

Logo, a força entre duas distribuições de carga obedece a uma forma contínua da terceira lei de Newton.

Além disso, se  $\rho = \rho^*$ , a força total líquida da distribuição sobre si mesma é nula.

## Exemplo 3.1: anel uniformemente carregado

### Problema

Encontrar o campo sobre o eixo de simetria de um anel de raio  $R$  com densidade linear uniforme  $\lambda$ .

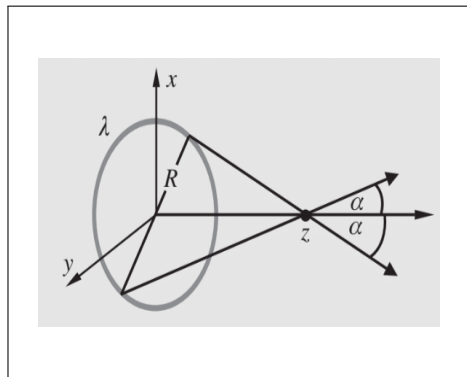
Por simetria:

- componentes transversais se cancelam;
- apenas a componente ao longo de  $\hat{z}$  sobrevive.

Se a carga total do anel é

$$Q = 2\pi R\lambda,$$

então o campo aponta ao longo de  $\hat{z}$ .



## Campo no eixo de um anel

$$\mathbf{E}_{\text{anel}}(z \geq 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint d\ell \frac{\cos \alpha}{z^2 + R^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_{\text{anel}}(z \geq 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi Rz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \quad (11)$$

### Observações

- Em  $z = 0$ , o campo é nulo por simetria.
- Para  $z \gg R$ , recuperamos o comportamento de uma carga puntiforme total  $Q$ .

## Disco uniformemente carregado

O disco pode ser visto como uma superposição de anéis concêntricos de raio  $r$ , cada um contendo

$$dQ = 2\pi r\sigma dr.$$

Somando as contribuições de todos esses anéis, obtemos o campo ao longo do eixo.

$$\mathbf{E}_{\text{disco}}(z > 0) = \frac{z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr \frac{2\pi r\sigma}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \quad (12)$$

$$\mathbf{E}_{\text{disco}}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (13)$$

## Limite de folha infinita e condição de salto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\text{disco}}(z > 0) = \mathbf{E}_{\text{folha}}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \quad (14)$$

Por simetria, no lado oposto da folha,

$$\mathbf{E}(z < 0) = -\mathbf{E}(z > 0).$$

Logo, a componente normal do campo sofre uma descontinuidade ao atravessar a superfície carregada.

$$\mathbf{E}(0^+) - \mathbf{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \quad (15)$$

### 3.3 O potencial escalar

A forma integral do campo em (??) é poderosa, mas nem sempre fácil de calcular diretamente. A estrutura de (??) sugere definir uma nova função escalar, o **potencial eletrostático**.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (16)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (17)$$

#### Vantagem conceitual

Em muitos problemas, é mais simples primeiro encontrar um escalar  $\varphi$  e depois obter  $\mathbf{E}$  por derivação, do que calcular diretamente uma integral vetorial.

# Casos particulares do potencial

## Distribuição superficial

Se toda a carga estiver sobre uma superfície, com densidade  $\sigma(\mathbf{r}_s)$ , então:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dS \frac{\sigma(\mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} \quad (18)$$

## Distribuição linear

Se toda a carga estiver confinada a um filamento, com densidade linear  $\lambda(\ell)$ , então:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\ell \frac{\lambda(\ell)}{|\mathbf{r} - \ell|} \quad (19)$$

Essas expressões são muito úteis em problemas com simetria planar, cilíndrica ou em geometrias reduzidas.

# Da lei de Gauss à equação de Poisson

Aplicando a divergência à relação  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  e usando a lei de Gauss, obtemos a equação fundamental para o potencial eletrostático.

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (20)$$

## Interpretação

- **Poisson:** quando há fontes,  $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ .
- **Laplace:** quando a região é livre de carga,  $\rho(\mathbf{r}) = 0$ , de modo que

$$\nabla^2\varphi = 0.$$



## Importância

Grande parte da eletrostática prática se reduz a resolver a equação de Poisson ou, em regiões sem carga, a equação de Laplace.

## Exemplo 3.2: mudança de escala na distribuição

### Hipótese

Considere duas distribuições de carga com a mesma forma geométrica, mas em escalas diferentes:

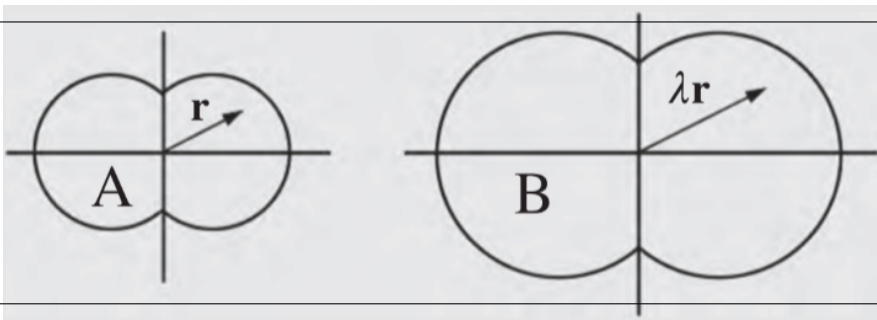
$$\rho_B(\mathbf{r}) = \lambda \rho_A(\lambda \mathbf{r}),$$

onde  $\lambda$  é constante.

Queremos relacionar:

- os potenciais  $\varphi_A(\mathbf{r})$  e  $\varphi_B(\mathbf{r})$ ;
- os campos  $\mathbf{E}_A(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{E}_B(\mathbf{r})$ .

O truque é reescalar a variável de integração na definição do potencial.



# Resultado da mudança de escala

Usando a dica:

$$\varphi_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho_A(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho_B(\lambda\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (21)$$

Trocando a variável de integração para  $\lambda\mathbf{r}'$

$$\varphi_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\lambda^2} \int d^3(\lambda\mathbf{r}') \frac{\rho_B(\lambda\mathbf{r}')}{|\lambda\mathbf{r} - \lambda\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\lambda^2} \varphi_B(\lambda\mathbf{r}) \quad (22)$$

Então, como  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ,

$$\mathbf{E}_B(\lambda\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial(\lambda\mathbf{r})} \varphi_B(\lambda\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial(\lambda\mathbf{r})} \lambda^2 \varphi_A(\mathbf{r}) = \lambda \mathbf{E}_A(\mathbf{r}) \quad (23)$$

## Leitura física

Ao reescalar o tamanho da distribuição, o potencial e o campo não mudam da mesma maneira:

- o potencial ganha um fator  $1/\lambda^2$ ;
- o campo transforma-se linearmente com  $\lambda$ .

### 3.3.1 A força de Coulomb é conservativa

Como  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , o trabalho realizado pela força elétrica sobre uma carga puntiforme  $q$  entre dois pontos depende apenas dos valores do potencial nos extremos.

$$W_e[\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2] = q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\ell \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\ell \cdot \nabla\varphi = -q [\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)] \quad (24)$$

#### Conclusão

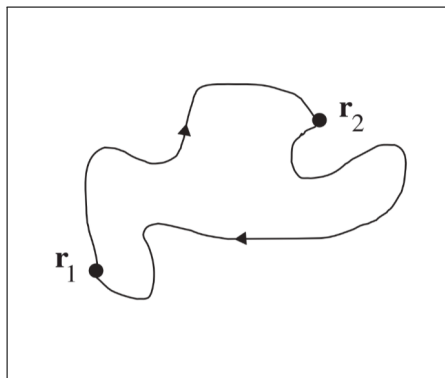
O trabalho não depende do caminho seguido, mas apenas dos pontos inicial e final. Isso caracteriza a força eletrostática como **conservativa**.

# Trabalho em um caminho fechado

$$W_{\text{ciclo}} = q \oint_C d\ell \cdot \mathbf{E} = q \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (25)$$

## Interpretação

Como  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , o trabalho ao percorrer qualquer curva fechada  $C$  é nulo. Isso equivale à independência do caminho e reforça a natureza conservativa da força de Coulomb.



## Diferença de potencial e escolha do zero

O potencial é definido a menos de uma constante aditiva. Por isso, podemos escolher arbitrariamente um ponto de referência  $\mathbf{r}_0$  onde o potencial é fixado.

$$\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\ell \cdot \mathbf{E} \quad (26)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\ell \cdot \mathbf{E} \quad \text{se } \varphi(\mathbf{r}_0) = 0 \quad (27)$$

### Escolha usual

Para distribuições localizadas, é comum adotar

$$\varphi(\infty) = 0.$$



- ❶ A eletrostática é governada por

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho.$$

- ❷ A lei de Coulomb em forma integral é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

- ❸ O potencial escalar simplifica a teoria:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

- 4 O potencial satisfaz a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

- 5 A força de Coulomb é conservativa:

$$\oint_C d\ell \cdot \mathbf{E} = 0.$$

## Exercício 3.2: Simétrico e sem traço

As componentes cartesianas do campo elétrico em uma região livre de cargas são

$$E_k = C_k + D_{jk} r_j,$$

onde  $C_k$  e  $D_{jk}$  são constantes.

(a) Mostre que  $D_{jk}$  é **simétrico**

$$D_{jk} = D_{kj}$$

e **sem traço**

$$\sum_k D_{kk} = 0.$$

(b) Encontre o **potencial eletrostático mais geral** que gera o campo elétrico do item (a).

## Por que esse exercício existe?

O campo dado

$$E_k = C_k + D_{jk}r_j$$

não é arbitrário: ele representa a **expansão de Taylor** do campo elétrico em torno de um ponto.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}(0) + (\nabla \mathbf{E}) \cdot \mathbf{r} \quad (28)$$

### Interpretação

- $C_k$  = campo uniforme (ordem zero)
- $D_{jk}$  = variação espacial do campo

## Significado físico do tensor $D_{jk}$

$$D_{jk} = \frac{\partial E_k}{\partial r_j} \quad (29)$$

O tensor  $D_{jk}$  mede **como o campo muda no espaço**. Ele contém toda a informação sobre **gradientes do campo elétrico**.

### Onde isso aparece na prática?

- Força sobre dipolos:  $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$
- Armadilhas eletrostáticas (íons, elétrons)
- Interações quadrupolares em átomos
- Campos não uniformes em experimentos reais

Por que  $D_{jk}$  deve ser simétrico?

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (30)$$

Em eletrostática, o campo não pode ter rotação local. Isso impõe:

$$D_{jk} = D_{kj}$$

### Interpretação

A parte antissimétrica corresponderia a uma **rotação local do campo**. Isso é proibido em eletrostática.

Por que  $D_{kk} = 0$ ?

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (31)$$

Em uma região sem carga, o campo não pode ter fontes nem sumidouros. Isso implica:

$$D_{kk} = 0$$

### Interpretação

O traço mede o quanto o campo está **expandindo ou comprimindo volume**. Sem carga  $\rightarrow$  volume preservado  $\rightarrow$  traço zero.

# Interpretação geométrica

O tensor  $D_{jk}$  descreve como o campo **deforma o espaço localmente**.

## Decomposição

- Parte antissimétrica  $\rightarrow$  rotação (proibida)
- Parte com traço  $\rightarrow$  fonte/sumidouro (proibida)
- Resta: deformação pura (permitida)

## Analogia poderosa

Isso é análogo a:

- tensor de deformação (elasticidade)
- tensor de maré (gravitação)



## Conexão com o potencial

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (32)$$

$$D_{jk} = -\partial_j\partial_k\varphi \quad (33)$$

O tensor  $D_{jk}$  é o **Hessiano do potencial**.

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (34)$$

### Mensagem central

O traço nulo de  $D$  é exatamente a equação de Laplace.

# Mensagem final do exercício

Este exercício mostra que o campo eletrostático mais geral, localmente, é:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \text{campo uniforme} + \text{deformação linear (sem rotação e sem fonte)} \quad (35)$$

## Ideia profunda

- Maxwell  $\rightarrow$  restrições físicas
- restrições  $\rightarrow$  estrutura matemática
- estrutura  $\rightarrow$  forma do campo

## Resumo em uma frase

O tensor  $D_{jk}$  é o gradiente do campo elétrico, e sua forma é totalmente determinada pelas equações de Maxwell.

## Exercício 3.5: Lei de Gauss na prática

Utilize a **lei de Gauss** para determinar o campo elétrico quando a densidade de carga é:

(a)

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\kappa\sqrt{x^2}}.$$

Expresse a resposta em **coordenadas cartesianas**.

(b)

$$\rho(x, y) = \rho_0 e^{-\kappa\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Expresse a resposta em **coordenadas cilíndricas**.

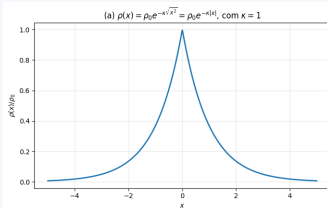
(c)

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-\kappa\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

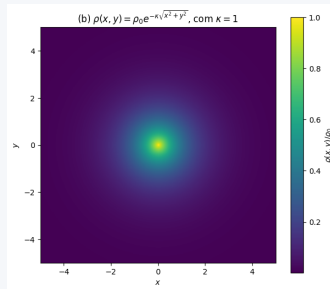
Expresse a resposta em **coordenadas esféricas**.

# Distribuições de carga

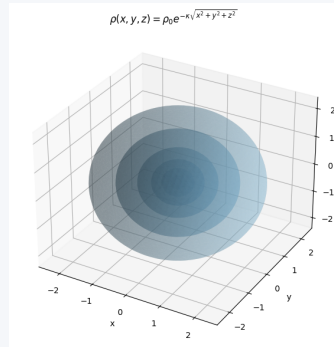
(a)



(b)

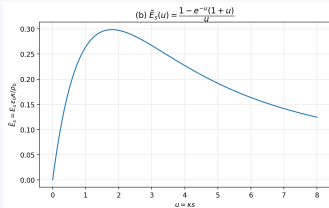


(c)

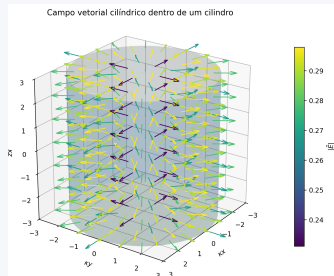


# Plots das Soluções

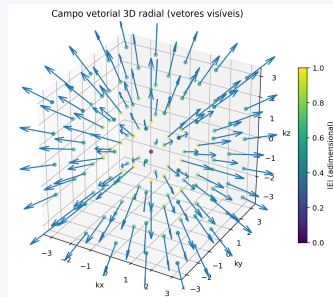
(a)



(b)



(c)



### 3.3.2 Condições de contorno para $\phi(\mathbf{r})$

#### Ideia física

As condições de contorno do potencial eletrostático decorrem do comportamento do campo elétrico próximo a uma interface com densidade de carga superficial  $\sigma(\mathbf{r}_S)$ .

- Seja  $\hat{\mathbf{n}}_2$  o vetor normal saindo da região 2;
- Definimos a derivada direcional:

$$\frac{\partial}{\partial n_2} = \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \nabla \quad (36)$$

- Sabemos que:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (37)$$

## Descontinuidade do campo elétrico normal

Condição de contorno para  $\mathbf{E}$

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (38)$$

# Descontinuidade do campo elétrico normal

## Condição de contorno para $\mathbf{E}$

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (38)$$

Substituindo  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ :

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot (-\nabla\phi_1 + \nabla\phi_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (39)$$



# Descontinuidade do campo elétrico normal

## Condição de contorno para $\mathbf{E}$

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (38)$$

Substituindo  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ :

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot (-\nabla\phi_1 + \nabla\phi_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (39)$$

## Resultado

$$\left[ \frac{\partial\phi_2}{\partial n_2} - \frac{\partial\phi_1}{\partial n_2} \right] = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.19)$$

- A derivada normal do potencial sofre uma **descontinuidade**;
- Essa descontinuidade é causada pela presença de **carga superficial**;
- Ou seja:

*o campo elétrico normal é descontínuo na interface*

- A derivada normal do potencial sofre uma **descontinuidade**;
- Essa descontinuidade é causada pela presença de **carga superficial**;
- Ou seja:

*o campo elétrico normal é descontínuo na interface*

## Resumo

$$\text{salto na derivada normal de } \phi \iff \sigma \neq 0$$

(40)

# Continuidade do potencial

## Argumento físico

Considere dois pontos infinitesimalmente próximos em lados opostos da interface.

# Continuidade do potencial

## Argumento físico

Considere dois pontos infinitesimalmente próximos em lados opostos da interface.

- A separação  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow 0$ ;
- A integral relevante só pode ser não nula se  $\mathbf{E}$  divergir;
- Porém:

$\mathbf{E}$  é finito (exceto na componente normal já tratada)

# Continuidade do potencial

## Argumento físico

Considere dois pontos infinitesimalmente próximos em lados opostos da interface.

- A separação  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow 0$ ;
- A integral relevante só pode ser não nula se  $\mathbf{E}$  divergir;
- Porém:

$\mathbf{E}$  é finito (exceto na componente normal já tratada)

## Conclusão

O potencial é contínuo ao atravessar a interface.

$$\phi_1(\mathbf{r}_S) = \phi_2(\mathbf{r}_S) \quad (3.20)$$

$$\phi_1(\mathbf{r}_S) = \phi_2(\mathbf{r}_S) \quad (3.20)$$

## Interpretação

- O potencial não pode ter saltos finitos;
- Caso contrário:
  - $\nabla\phi$  teria uma divergência infinita;
  - implicaria  $\mathbf{E} \rightarrow \infty$  (não físico).



## Continuidade do potencial: PROVA

Queremos provar

$$\phi_1(\mathbf{r}_S) = \phi_2(\mathbf{r}_S) \quad (3.20)$$

# Continuidade do potencial: PROVA

Queremos provar

$$\phi_1(\mathbf{r}_S) = \phi_2(\mathbf{r}_S) \quad (3.20)$$

- Consideramos dois pontos infinitamente próximos da interface:
  - $\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_S - \epsilon \hat{\mathbf{n}}$
  - $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_S + \epsilon \hat{\mathbf{n}}$
- Vamos analisar:

$$\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-) \quad (41)$$

# Diferença de potencial como integral

## Definição fundamental

$$\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-) = - \int_{\mathbf{r}_-}^{\mathbf{r}_+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (42)$$

# Diferença de potencial como integral

## Definição fundamental

$$\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-) = - \int_{\mathbf{r}_-}^{\mathbf{r}_+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (42)$$

Escolhendo um caminho normal à superfície:

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{n}} \, dn \quad (43)$$

# Diferença de potencial como integral

## Definição fundamental

$$\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-) = - \int_{\mathbf{r}_-}^{\mathbf{r}_+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (42)$$

Escolhendo um caminho normal à superfície:

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{n}} \, dn \quad (43)$$

$$\Rightarrow \phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-) = - \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} E_n(n) \, dn \quad (44)$$

$$\text{onde } E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

## Comportamento do campo na interface

Condição conhecida

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (45)$$

# Comportamento do campo na interface

## Condição conhecida

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (45)$$

- O campo pode ter **salto finito**;
- Mas **não diverge** como  $1/\epsilon$ ;
- Logo, existe uma constante  $M$  tal que:

$$|E_n(n)| \leq M \quad (46)$$

# Comportamento do campo na interface

## Condição conhecida

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (45)$$

- O campo pode ter **salto finito**;
- Mas **não diverge** como  $1/\epsilon$ ;
- Logo, existe uma constante  $M$  tal que:

$$|E_n(n)| \leq M \quad (46)$$

## Conclusão

O campo é **limitado** na vizinhança da interface.



## Estimativa

$$|\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-)| \leq \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |E_n| dn \quad (47)$$

## Estimativa

$$|\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-)| \leq \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |E_n| dn \quad (47)$$

$$\leq \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} M dn = 2M\epsilon \quad (48)$$

## Estimativa

$$|\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-)| \leq \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |E_n| dn \quad (47)$$

$$\leq \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} M dn = 2M\epsilon \quad (48)$$

$$\Rightarrow |\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-)| \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (49)$$

# Prova da continuidade

## Estimativa

$$|\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-)| \leq \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |E_n| dn \quad (47)$$

$$\leq \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} M dn = 2M\epsilon \quad (48)$$

$$\Rightarrow |\phi(\mathbf{r}_+) - \phi(\mathbf{r}_-)| \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (49)$$

## Resultado

$$\phi_1(\mathbf{r}_S) = \phi_2(\mathbf{r}_S) \quad (50)$$

## Prova por absurdo (mais forte)

Suponha

$$\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi \neq 0 \quad (51)$$

## Prova por absurdo (mais forte)

Suponha

$$\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi \neq 0 \quad (51)$$

Então:

$$\frac{\Delta\phi}{2\epsilon} \sim \frac{\partial\phi}{\partial n} \quad (52)$$

## Prova por absurdo (mais forte)

Suponha

$$\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi \neq 0 \quad (51)$$

Então:

$$\frac{\Delta\phi}{2\epsilon} \sim \frac{\partial\phi}{\partial n} \quad (52)$$

Como  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ :

$$E_n \sim -\frac{\Delta\phi}{2\epsilon} \quad (53)$$

# Prova por absurdo (mais forte)

Suponha

$$\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi \neq 0 \quad (51)$$

Então:

$$\frac{\Delta\phi}{2\epsilon} \sim \frac{\partial\phi}{\partial n} \quad (52)$$

Como  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ :

$$E_n \sim -\frac{\Delta\phi}{2\epsilon} \quad (53)$$

Problema

$$E_n \rightarrow \infty \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (54)$$



# Prova por absurdo (mais forte)

Suponha

$$\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi \neq 0 \quad (51)$$

Então:

$$\frac{\Delta\phi}{2\epsilon} \sim \frac{\partial\phi}{\partial n} \quad (52)$$

Como  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ :

$$E_n \sim -\frac{\Delta\phi}{2\epsilon} \quad (53)$$

Problema

$$E_n \rightarrow \infty \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (54)$$

**Isso não é físico para  $\sigma$  finita!**

# Interpretação via equação de Poisson

## Equação fundamental

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (55)$$

# Interpretação via equação de Poisson

## Equação fundamental

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (55)$$

Para carga superficial:

$$\rho = \sigma \delta(n) \quad (56)$$

# Interpretação via equação de Poisson

## Equação fundamental

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (55)$$

Para carga superficial:

$$\rho = \sigma \delta(n) \quad (56)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi \sim \delta(n) \quad (57)$$

# Interpretação via equação de Poisson

## Equação fundamental

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (55)$$

Para carga superficial:

$$\rho = \sigma \delta(n) \quad (56)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi \sim \delta(n) \quad (57)$$

- $\delta$  na **segunda derivada**;
- $\Rightarrow$  salto na **primeira derivada**;
- $\Rightarrow \phi$  **permanece contínua**.

## Conclusão matemática

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (58)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (59)$$

## Conclusão matemática

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (58)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (59)$$

## Mensagem central

*O potencial não pode ter salto finito, pois isso implicaria campo elétrico infinito.*

### Relação com $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

- A existência de  $\phi$  depende de:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (60)$$

- Isso implica:
  - continuidade das componentes tangenciais de  $\mathbf{E}$ ;
  - portanto, continuidade de  $\phi$ .



# Comentário importante

## Relação com $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

- A existência de  $\phi$  depende de:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (60)$$

- Isso implica:
  - continuidade das componentes tangenciais de  $\mathbf{E}$ ;
  - portanto, continuidade de  $\phi$ .

## Insight

As condições de contorno para  $\phi$  carregam a mesma informação das condições para  $\mathbf{E}$ .

### 3.3.3 Teorema de Earnshaw

O potencial eletrostático  $\phi(\mathbf{r})$  em uma região finita e livre de cargas  $R$ :

**não possui máximos nem mínimos no interior**

### 3.3.3 Teorema de Earnshaw

O potencial eletrostático  $\phi(\mathbf{r})$  em uma região finita e livre de cargas  $R$ :

**não possui máximos nem mínimos no interior**

$\Rightarrow$  seus extremos ocorrem apenas na **fronteira**

### 3.3.3 Teorema de Earnshaw

O potencial eletrostático  $\phi(\mathbf{r})$  em uma região finita e livre de cargas  $R$ :

**não possui máximos nem mínimos no interior**

$\Rightarrow$  seus extremos ocorrem apenas na **fronteira**

Consequência física

Não existe equilíbrio estável puramente eletrostático.

Ideia

Vamos provar por **contradição**.

## Ideia

Vamos provar por **contradição**.

- Suponha que  $\phi$  tenha um **mínimo local** em um ponto  $P$ ;
- Construimos uma pequena superfície fechada  $S$  envolvendo  $P$ ;
- Analisamos o comportamento de  $\nabla\phi$  nessa superfície.

## Ideia

Vamos provar por **contradição**.

- Suponha que  $\phi$  tenha um **mínimo local** em um ponto  $P$ ;
- Construimos uma pequena superfície fechada  $S$  envolvendo  $P$ ;
- Analisamos o comportamento de  $\nabla\phi$  nessa superfície.

*Se a hipótese levar a contradição, ela é falsa.*

## Propriedade de um mínimo local

Se  $\phi$  tem mínimo em  $P$

- $\phi(P)$  é menor que os valores ao redor;
- Logo, ao sair de  $P$ , o potencial **aumenta**.



## Propriedade de um mínimo local

Se  $\phi$  tem mínimo em  $P$

- $\phi(P)$  é menor que os valores ao redor;
- Logo, ao sair de  $P$ , o potencial **aumenta**.

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi > 0 \tag{61}$$

em toda a superfície  $S$  ao redor de  $P$

# Propriedade de um mínimo local

Se  $\phi$  tem mínimo em  $P$

- $\phi(P)$  é menor que os valores ao redor;
- Logo, ao sair de  $P$ , o potencial **aumenta**.

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi > 0 \quad (61)$$

em toda a superfície  $S$  ao redor de  $P$

## Interpretação

O gradiente aponta **para fora** da superfície.

$$\oint_S dS \, \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi > 0 \quad (3.21)$$

$$\oint_S dS \, \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi > 0 \quad (3.21)$$

Por quê?

- $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi > 0$  em todos os pontos;
- A integral de algo positivo continua positiva.

# Usando o campo elétrico

Sabemos que:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (62)$$

## Usando o campo elétrico

Sabemos que:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (62)$$

Então:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi \quad (63)$$

# Usando o campo elétrico

Sabemos que:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (62)$$

Então:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi \quad (63)$$

$$\Rightarrow \oint_S dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} < 0 \quad (64)$$

# Teorema da divergência

Transformando a integral

$$\oint_S dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (65)$$



# Teorema da divergência

Transformando a integral

$$\oint_S dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (65)$$

Logo:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} < 0 \quad (3.22)$$

# Usando a equação de Maxwell

Sabemos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (66)$$

# Usando a equação de Maxwell

Sabemos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (66)$$

Mas na região  $R$ :

$$\rho = 0 \quad (67)$$

# Usando a equação de Maxwell

Sabemos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (66)$$

Mas na região  $R$ :

$$\rho = 0 \quad (67)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (68)$$

# Usando a equação de Maxwell

Sabemos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (66)$$

Mas na região  $R$ :

$$\rho = 0 \quad (67)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (68)$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (69)$$

# Contradição

Obtivemos duas conclusões:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} < 0 \quad (70)$$

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (71)$$

# Contradição

Obtivemos duas conclusões:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} < 0 \quad (70)$$

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (71)$$

## Contradição

As duas não podem ser verdade simultaneamente.

# Contradição

Obtivemos duas conclusões:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} < 0 \quad (70)$$

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (71)$$

## Contradição

As duas não podem ser verdade simultaneamente.

$\Rightarrow$  A hipótese inicial é falsa.



## Resultado

- $\phi$  não pode ter **mínimos locais** no interior;
- Um argumento idêntico mostra que não pode ter **máximos**.

## Resultado

- $\phi$  não pode ter **mínimos locais** no interior;
- Um argumento idêntico mostra que não pode ter **máximos**.

Os extremos de  $\phi$  ocorrem apenas na fronteira

(72)

# Conclusão

## Resultado

- $\phi$  não pode ter **mínimos locais** no interior;
- Um argumento idêntico mostra que não pode ter **máximos**.

Os extremos de  $\phi$  ocorrem apenas na fronteira

(72)

## Interpretação física

Não existe aprisionamento eletrostático estável.

- Linhas de campo elétrico:
  - saem de cargas positivas;
  - entram em cargas negativas.

- Linhas de campo elétrico:
  - saem de cargas positivas;
  - entram em cargas negativas.
- Em uma região sem cargas:
  - não há fontes nem sumidouros;
  - o campo não pode "convergir" para um ponto.

- Linhas de campo elétrico:
  - saem de cargas positivas;
  - entram em cargas negativas.
- Em uma região sem cargas:
  - não há fontes nem sumidouros;
  - o campo não pode "convergir" para um ponto.
- Logo:

não há como formar um mínimo ou máximo de potencial

## Exercício 3.10 — Dois Teoremas Eletrostáticos

- (a) Use a segunda identidade de Green,

$$\int_V d^3r (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) = \oint_S d\mathbf{S} \cdot (f \nabla g - g \nabla f), \quad (73)$$

para provar que o potencial  $\phi(0)$  no centro de um volume esférico  $V$ , livre de cargas, é igual à média de  $\phi(\mathbf{r})$  sobre a superfície  $S$  da esfera.

No texto, este teorema foi demonstrado usando a relação de reciprocidade de Green.

- (b) Use o resultado do item (a) para fornecer uma derivação alternativa do teorema de Earnshaw apresentado no texto.

## Lei de Gauss (forma integral)

$$\epsilon_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = Q_V \quad (3.39)$$

- Relaciona fluxo elétrico com carga total envolvida.
- Base para determinação de campos com simetria.
- Independente da forma da superfície fechada.



# Importância da simetria

Ideia central Simetrias espaciais permitem determinar:

- direção do campo  $\mathbf{E}$ ;
- dependência funcional de sua magnitude;
- escolha da superfície gaussiana ideal.

# Importância da simetria

Ideia central Simetrias espaciais permitem determinar:

- direção do campo  $\mathbf{E}$ ;
- dependência funcional de sua magnitude;
- escolha da superfície gaussiana ideal.

## Ideia central

Necessários para identificar uma superfície  $S$  na qual o termo  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}$  se reduz a uma quantidade escalar.

# Importância da simetria

Ideia central Simetrias espaciais permitem determinar:

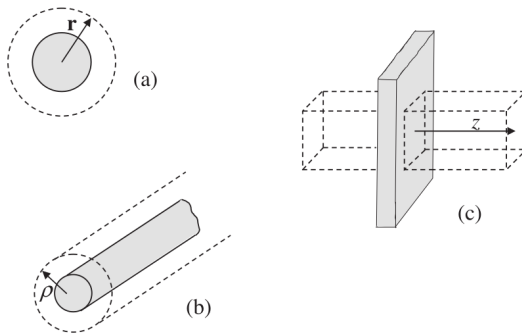
- direção do campo  $\mathbf{E}$ ;
- dependência funcional de sua magnitude;
- escolha da superfície gaussiana ideal.

## Ideia central

Necessários para identificar uma superfície  $S$  na qual o termo  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}$  se reduz a uma quantidade escalar.

- Rotacional, translacional, reflexão
- Redução de integrais  $\rightarrow$  escalares constantes

# Exemplos de Simetrias



**Figure 3.8:** Shaded areas are highly symmetrical distributions of charge: (a)  $\rho_0(r, \theta, \phi) = \rho_0(r)$ ; (b)  $\rho_0(\rho, \phi, z) = \rho_0(\rho)$ ; (c)  $\rho_0(x, y, z) = \rho_0(z)$ . Dashed lines outline possible choices for Gaussian surfaces.

$$\mathbf{E}(r) = E(r)\hat{\mathbf{r}} \Rightarrow E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.40)$$

- Distribuição invariante por rotações
- Campo puramente radial
- Equivalente a carga pontual externa

Notas: pag. 1

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.41)$$

- Resultado direto da Lei de Gauss
- Base para construção de soluções gerais

Notas: pag. 2

$$\mathbf{E}(\rho) = E(\rho) \hat{\rho} \Rightarrow E(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (3.42)$$

- Invariância por translação e rotação
- Campo radial no plano transversal

Notas: pag. 3

# Potencial de uma Linha Uniforme de Infinita

Ponto de partida Queremos obter o potencial gerado por uma distribuição de carga que é **invariante por translações ao longo de  $\hat{z}$** .

Nesse caso:

Para uma linha infinita de carga com densidade linear  $\lambda$ , o potencial é

$$\varphi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho. \quad (3.43)$$

- Aqui,  $\rho$  é a distância perpendicular entre o ponto de observação e a linha.
- Na derivação de (3.47), cada elemento da distribuição bidimensional fornece exatamente um potencial desse tipo.



## Distribuição planar infinita

Finalmente, uma lâmina infinita de carga [é invariante sob translações ao longo dos eixos ( $x$ ) e ( $y$ )]. Se  $\sigma(z)$  é a carga por unidade de área contida em um paralelepípedo de largura ( $2z$ ), a lei de Gauss nos diz que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(z) \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma(z)}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}. \quad (3.44)$$

Até uma outra constante (infinita), o potencial para  $\sigma(z) = \sigma$  é

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|. \quad (3.45)$$

# Potenciais fundamentais: comparação

## Esses potenciais merecem atenção especial

Os resultados a seguir são fundamentais e aparecem como blocos básicos para construções mais gerais.

### Carga pontual

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.41)$$

- Decai como  $1/r$
- Referência natural:  
 $\varphi(\infty) = 0$

### Linha infinita

$$\varphi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho \quad (3.43)$$

- Crescimento logarítmico
- Não há zero natural no infinito

### Plano infinito

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| \quad (3.45)$$

- Dependência linear
- Campo constante por regiões

É importante notar que a **simetria de uma distribuição de carga** — isto é, sua invariância sob rotações, translações e reflexões —

**não determina diretamente o campo elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$** , mas apenas garante que essas operações transformam uma solução em outra.

A solução obtida pela Lei de Gauss é a solução física correta

porque ela é **única**, conforme garantido pelo **teorema de Helmholtz**.

# Cuidado: Simetria não resolve o problema

## Erro conceitual comum

“Se a simetria fixa a forma do campo, então ela determina o campo.”

O que a simetria realmente faz

- Determina a **direção** do campo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \hat{\mathbf{r}}$$

- Impõe uma **forma funcional qualitativa**

## O ponto crítico

- Existem infinitas funções  $f(r)$  compatíveis com a simetria
- Mas apenas **uma** satisfaz:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Conclusão **Simetria restringe a solução.**  
**Maxwell determina a solução.**

# Potencial geral à partir do Pontual

Sem simetria especial: Quando a distribuição de carga não possui simetria particular, utilizamos diretamente o potencial de carga pontual (3.41) como bloco básico.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.46)$$

## Interpretação

Superposição contínua de potenciais de cargas pontuais.

## Potencial para distribuição 2D

Invariância em uma direção: Distribuições bidimensionais são invariantes por translações ao longo de uma direção (por exemplo,  $\hat{z}$ ). Então a partir da (3.43)

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int dx' \int dy' \ln \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \Lambda(x', y') \quad (3.47)$$

### Interpretação

Superposição de potenciais logarítmicos de linhas infinitas.

# Potencial para distribuição 1D

Invariância em duas direções: Distribuições unidimensionais são invariantes por translações ao longo de  $x$  e  $y$ .

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\epsilon_0} \int dz' |z - z'| \gamma(z') \quad (3.48)$$

## Interpretação

Superposição de potenciais lineares gerados por folhas infinitas de carga.



## Exemplo 3.4: Potencial de uma distribuição esférica

Objetivo - Partir do campo elétrico e obter uma expressão para o potencial  $\varphi(r)$  gerado por uma distribuição esfericamente simétrica  $\rho(r)$ .

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r ds s^2 \rho(s) \quad (74)$$

- $Q(r)$ : carga contida dentro de uma esfera de raio  $r$
- Centro na origem

Lei de Gauss A simetria esférica implica que o campo depende apenas de  $r$ .

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (75)$$

- Campo radial
- Determinado apenas pela carga interna

# Definição do potencial

Ponto de partida - Usamos a definição do potencial com referência no infinito.

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r d\ell \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (76)$$

- Escolhemos  $d\ell = dr' \hat{\mathbf{r}}$

$$\varphi(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} ds s^2 \rho(s) \quad (77)$$

- Integral dupla aparece naturalmente
- Vamos reorganizar para facilitar

Definição auxiliar

$$u(r') = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r'} ds s^2 \rho(s) \quad (78)$$

$$\varphi(r) = \int_{\infty}^r d\left(\frac{1}{r'}\right) u(r') \quad (79)$$

$$\varphi(r) = \frac{u(r')}{r'} \Big|_{\infty}^r - \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'} \frac{du}{dr'} \quad (80)$$

- Primeiro termo: contribuição da carga interna
- Segundo termo: contribuição externa

$$\varphi(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \quad (81)$$

### Interpretação

- Primeiro termo: carga interna  $\rightarrow$  comportamento tipo  $1/r$
- Segundo termo: contribuição das camadas externas

### Exercício 3: energia potencial entre distribuições

Enunciado: Duas distribuições esfericamente simétricas, de cargas totais  $Q_1$  e  $Q_2$ , possuem raios  $a_1$  e  $a_2$ , e seus centros estão separados por uma distância  $R > a_1 + a_2$ .

Mostre que a energia potencial eletrostática de interação entre elas é:

$$V_E = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (82)$$

#### Ideia física

Distribuições esfericamente simétricas, quando não se sobrepõem, se comportam externamente como cargas pontuais concentradas em seus centros.



### 3.4.2 Condições de contorno para $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

Situação física Uma superfície arbitrária  $S$  carrega uma densidade superficial de carga  $\sigma(\mathbf{r}_S)$ .

- Consideramos dois pontos infinitamente próximos:
  - um em cada lado da superfície
- Campos correspondentes:

$$\mathbf{E}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_2$$

#### Ideia central

Queremos entender como o campo elétrico muda ao atravessar a superfície.

Notas: pag. 14-15

# Decomposição do campo

Estratégia - Decompor o campo em duas contribuições:

- Campo de um pequeno disco local:

$E_{\text{disk}}$

- Campo do restante da superfície:

$E_S$

## Propriedades

- $E_{\text{disk}}$ : descontínuo (muda de sinal)
- $E_S$ : contínuo

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_S - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_S - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}_2 \quad (3.49)$$

- $\hat{\mathbf{n}}_1$  e  $\hat{\mathbf{n}}_2$ : normais aos dois lados

### Observação

A descontinuidade vem apenas da contribuição do disco local.

## Condições de contorno

Subtraindo as equações:

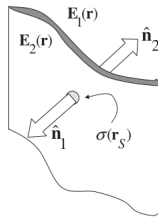
$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\sigma(\mathbf{r}_S)}{\epsilon_0} \quad (3.50)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (3.51)$$

### Resultado físico

- Componente normal: descontínua
- Componente tangencial: contínua

## Figura 3.9



**Figure 3.9:** A surface  $S$  endowed with charge density  $\sigma(\mathbf{r}_S)$ . The unit normal vector  $\hat{\mathbf{n}}_1$  points outward from region 1. The unit normal vector  $\hat{\mathbf{n}}_2$  points outward from region 2.

- Normais opostas em cada lado da superfície
- Campo muda ao atravessar a superfície carregada

### 3.4.3 Força sobre a superfície

Problema - Como calcular a força sobre uma superfície carregada?

Não é imediatamente óbvio como calcular a força de Coulomb sobre uma superfície carregada  $S$ , pois (3.50) indica que  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}$  é descontínuo nesse ponto. Por outro lado, nenhum elemento de superfície pode exercer força sobre si mesmo. Portanto, a quantidade  $\mathbf{E}_S$  em (3.49) deve ser a única responsável pela força por unidade de área sentida em  $\mathbf{r}_S$ . Como  $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}_2$ , a soma das duas equações em (3.49) fornece  $\mathbf{E}_S$  como a média simples de  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$ .

- Campo é descontínuo
- Não podemos usar diretamente  $\mathbf{E}$

Notas: 15-16

Ideia chave A força depende apenas do campo suave  $\mathbf{E}_S$ .

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_S = \frac{1}{2} \sigma (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \quad (3.52)$$

## Interpretação

O campo relevante é a média dos dois lados.

### 3.4.4 Ângulo sólido

Definição: Ângulo sólido é a área projetada numa esfera unitária.

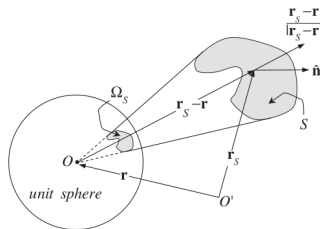
$$\Omega_S(\mathbf{r}) = \int_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3} \quad (3.53)$$

Notas: pag. 16-17



# Interpretação geométrica

- Cada elemento  $dS$  projeta área na esfera unitária
- Soma total define  $\Omega_S$

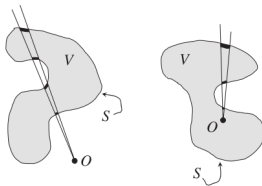


**Figure 3.10:**  $\Omega_S$  is the solid angle subtended at the observation point  $O$  by the surface  $S$ . See text for discussion.

$$d\Omega_S = \frac{dS}{r_S^2} = \sin \theta \, d\theta d\phi \quad (3.54)$$

## Resultado para superfície fechada

$$\Omega_S = \begin{cases} 4\pi & O \in V \\ 0 & O \notin V \end{cases} \quad (3.55)$$



**Figure 3.11:** A closed surface  $S$  that encloses a volume  $V$ . The solid angle  $\Omega_S = 0$  if the observation point  $O$  is outside  $V$ .  $\Omega_S = 4\pi$  if  $O$  is inside  $V$ .

$$\Phi_E(S) = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_S \quad (3.56)$$

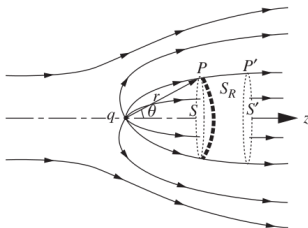
### Conclusão

A Lei de Gauss surge naturalmente do ângulo sólido.

# Linhas de campo: carga + campo uniforme

Situação Carga puntiforme em campo uniforme:

$$\mathbf{E} = E\hat{z}$$



**Figure 3.12:** Representative electric field lines redrawn from Figure 3.4. The polar coordinates  $(r, \theta)$  label a point  $P$ . One electric field line passes through both  $P$  and  $P'$ . The complete field line pattern is rotationally symmetric around the  $z$ -axis. The same is true of the Gaussian surface composed of the disks  $S$  and  $S'$  (dotted) and the surface of revolution  $S_R$ . The heavy dashed arc indicates a cap-shaped portion of a spherical surface centered at  $q$  that passes through  $P$ .

$$\Phi_E(S) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_S + E\pi r^2 \sin^2 \theta \quad (3.57)$$

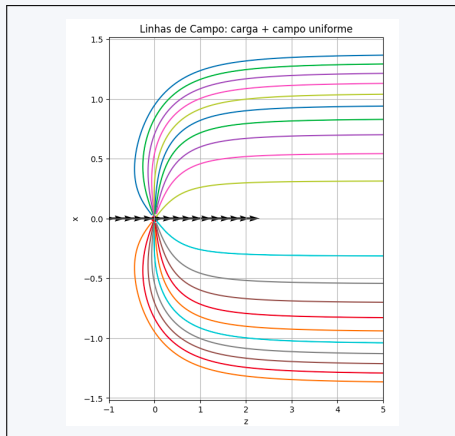
$$\Omega_S = 2\pi(1 - \cos \theta) \quad (3.58)$$

$$\Phi_E(S') + \Phi_E(S) = 0 \quad (3.59)$$



# Linhas de campo: carga + campo uniforme

## Visualização das linhas de campo



Código no projeto Google Colab  
**Acesse o código completo:**

[Abrir no Google Colab](#)

- Geração das linhas de campo
- Controle do parâmetro  $b$
- Conversão para coordenadas cartesianas
- Visualização gráfica completa

# Exercício: linha infinita + campo uniforme

Sistema Linha infinita ( $z$ ) com densidade  $\lambda$ , em

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

Plano  $xy$ , coord. polares  $(r, \phi)$ .

## Analítico

- 1 Campo da linha.
- 2  $\mathbf{E}_0$  em  $\hat{r}, \hat{\phi}$ .
- 3 Obter  $E_r, E_\phi$ .

## Linhas

- 5 Encontrar:

$$F(r, \phi) = C.$$

## Código

- plotar para vários  $C$ ;
- fazer 3 plots com diferentes  $\lambda/E_0$ . Que padrão você percebe?

## Discussão

- perto da linha;
- longe;
- efeito de  $\lambda/E_0$ .

## 3.5 Energia Potencial: ideia física

Ponto de partida Em mecânica, a energia potencial mede o trabalho que a força pode realizar. Se uma força desloca uma partícula por  $\delta \mathbf{s}$ , a variação da energia potencial é:

$$\delta V = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} \quad (3.61)$$

### Comentário físico

O sinal negativo significa que, se a força realiza trabalho positivo, a energia potencial diminui.

# Força como gradiente da energia

Da forma diferencial para a forma local Como

$$\delta V = \nabla V \cdot \delta \mathbf{s},$$

comparando com

$$\delta V = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s},$$

obtemos:

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (3.62)$$

## Interpretação

A força aponta para a direção em que a energia potencial diminui mais rapidamente.

# Energia potencial elétrica de uma carga

Força elétrica sobre uma carga: Para uma carga  $q$  em um campo elétrico:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Na eletrostática, o campo pode ser escrito em termos do potencial:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\varphi = -\nabla(q\varphi) \quad (83)$$

# Energia potencial elétrica

Comparando com  $\mathbf{F} = -\nabla V$  Como

$$\mathbf{F} = -\nabla(q\varphi),$$

identificamos a energia potencial elétrica:

$$V_E = q\varphi(\mathbf{r}) \quad (3.63)$$

## Comentário

O potencial elétrico  $\varphi$  é energia potencial por unidade de carga.

$$\varphi = \frac{V_E}{q}.$$

## De uma carga para uma distribuição

Ideia de superposição: Uma distribuição contínua de carga pode ser pensada como muitos elementos infinitesimais:

$$dq = \rho_2(\mathbf{r}) d^3r.$$

Cada elemento possui energia:

$$dV_E = dq \varphi_1(\mathbf{r}).$$

$$dV_E = \rho_2(\mathbf{r}) \varphi_1(\mathbf{r}) d^3r \quad (84)$$

## Energia de uma distribuição em um campo externo

Somando todos os elementos: Integrando sobre toda a distribuição  $\rho_2$ , obtemos:

$$V_E = \int d^3r \rho_2(\mathbf{r}) \varphi_1(\mathbf{r}) \quad (3.64)$$

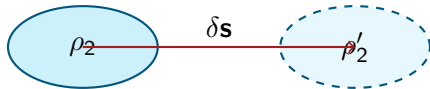
### Cuidado conceitual

Aqui  $\varphi_1$  é o potencial produzido por outra distribuição,  $\rho_1$ . Portanto, esta é a energia de  $\rho_2$  colocada no campo de  $\rho_1$ .



### 3.5.1 Como extrair a força da energia?

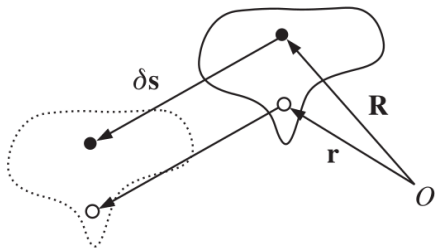
Estratégia: Vamos deslocar rigidamente a distribuição  $\rho_2$  por um pequeno vetor  $\delta\mathbf{s}$ .



#### Ideia física

Se a energia muda quando deslocamos a distribuição, essa variação revela a força resultante sobre ela.

## Como a densidade muda sob deslocamento



Distribuição deslocada Após deslocar a distribuição por  $\delta \mathbf{s}$ , a nova densidade no ponto  $\mathbf{r}$  é:

$$\rho_2(\mathbf{r} - \delta \mathbf{s}).$$

$$\delta \rho_2(\mathbf{r}) = \rho_2(\mathbf{r} - \delta \mathbf{s}) - \rho_2(\mathbf{r}) \quad (3.65)$$

### Interpretação

A carga que agora está em  $\mathbf{R} + \delta \mathbf{s}$  veio de uma posição ligeiramente anterior, deslocada de  $\delta \mathbf{R}$ .

# Expansão de Taylor da densidade

Para deslocamentos pequenos: Expandimos em primeira ordem:

$$\rho_2(\mathbf{r} - \delta\mathbf{s}) \simeq \rho_2(\mathbf{r}) - \delta\mathbf{s} \cdot \nabla \rho_2(\mathbf{r}).$$

$$\delta\rho_2(\mathbf{r}) \simeq -\delta\mathbf{s} \cdot \nabla \rho_2(\mathbf{r}) \quad (85)$$

## Comentário

A densidade muda apenas onde há variação espacial de  $\rho_2$ . Se  $\rho_2$  fosse perfeitamente uniforme em todo o espaço, esse termo seria nulo.

## Variação da energia

Energia antes e depois do deslocamento Como

$$V_E = \int d^3r \rho_2(\mathbf{r}) \varphi_1(\mathbf{r}),$$

a variação da energia é:

$$\delta V_E = \int d^3r \varphi_1(\mathbf{r}) \delta \rho_2(\mathbf{r}) \quad (3.66)$$

**Ponto importante:**

O potencial  $\varphi_1$  fica fixo; quem está sendo deslocada é a distribuição  $\rho_2$ .

## Substituindo a expansão de Taylor

Usando

$$\delta\rho_2 \simeq -\delta\mathbf{s} \cdot \nabla\rho_2,$$

temos:

$$\delta V_E = - \int d^3r \varphi_1(\mathbf{r}) \delta\mathbf{s} \cdot \nabla\rho_2(\mathbf{r}) \quad (3.67)$$

### Leitura física

A mudança de energia depende de como a distribuição de carga “atravessa” regiões de potencial diferente.

# Preparando a integração por partes

Como  $\delta \mathbf{s}$  é constante Podemos escrever:

$$\delta \mathbf{s} \cdot \nabla \rho_2 = \nabla \rho_2 \cdot \delta \mathbf{s}.$$

Assim,

$$\delta V_E = -\delta \mathbf{s} \cdot \int d^3r \varphi_1 \nabla \rho_2.$$

## Objetivo

Queremos trocar a derivada de  $\rho_2$  para  $\varphi_1$ , pois  $\nabla \varphi_1$  está ligado ao campo elétrico.

Identidade usada - Para funções que desaparecem suficientemente longe:

$$\int d^3r \varphi_1 \nabla \rho_2 = - \int d^3r \rho_2 \nabla \varphi_1.$$

$$\delta V_E = \int d^3r \rho_2(\mathbf{r}) \nabla \varphi_1(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{s} \quad (3.68)$$

## Funções de Suporte Compacto

O termo de superfície é descartado porque a distribuição é localizada ou porque os campos decaem no infinito.

## Aparece o campo elétrico

Usando

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\varphi_1,$$

a variação da energia fica:

$$\delta V_E = - \int d^3r \rho_2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{s}.$$

$$\delta V_E = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} \tag{86}$$

### Comparação

Comparando as duas expressões, identificamos a força total sobre  $\rho_2$ .



## Resultado: força sobre uma distribuição

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V_E}{\partial \mathbf{s}} = \int d^3r \rho_2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \quad (3.69)$$

Interpretação Cada elemento de carga  $dq = \rho_2 d^3r$  sofre uma força:

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{E}_1.$$

Somando todos os elementos:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}.$$

### Conclusão

A derivação por energia reproduz exatamente a soma das forças de Coulomb.

## 3.5.2 Relação de reciprocidade de Green

Duas distribuições: Considere duas distribuições:

$$\rho_1 \longrightarrow \varphi_1, \quad \rho_2 \longrightarrow \varphi_2.$$

A energia de  $\rho_2$  no potencial de  $\rho_1$  é:

$$V_E = \int d^3r \rho_2 \varphi_1.$$

### Pergunta

Essa energia muda se trocarmos os papéis de fonte e carga-teste?

$$\int d^3r \rho_1(\mathbf{r})\varphi_2(\mathbf{r}) = \int d^3r \rho_2(\mathbf{r})\varphi_1(\mathbf{r}) \quad (3.70)$$

### Significado físico

A energia de interação entre duas distribuições é simétrica: não importa se dizemos que  $\rho_1$  está no potencial de  $\rho_2$  ou que  $\rho_2$  está no potencial de  $\rho_1$ .

## Por que a reciprocidade é útil?

Liberdade de escolha: A mesma energia pode ser escrita como:

$$V_E = \int d^3r \rho_2 \varphi_1 = \int d^3r \rho_1 \varphi_2.$$

$$V_E = \int d^3r \rho_1(\mathbf{r}) \varphi_2(\mathbf{r}) \quad (3.71)$$

### Comentário

Escolhemos a forma mais simples para o problema. Às vezes é mais fácil integrar sobre  $\rho_1$ ; em outros casos, sobre  $\rho_2$ .

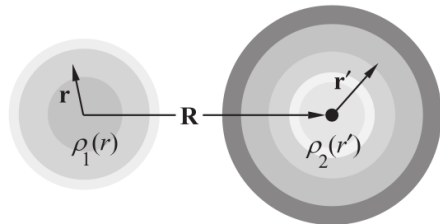
# Duas distribuições esféricas não sobrepostas

Ideia Para uma distribuição esférica, o potencial externo é igual ao de uma carga puntiforme no centro:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

## Condição

As distribuições não podem se sobrepor.



## Energia entre duas distribuições esféricas

Usando reciprocidade Podemos tratar cada distribuição esférica, externamente, como se toda a carga estivesse concentrada no centro.

$$V_E = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (3.72)$$

### Resultado

A energia de interação entre duas distribuições esféricas não sobrepostas é a mesma de duas cargas puntiformes separadas por  $R$ .

## Exemplo 3.5

Use a relação de reciprocidade de Green e uma esfera oca com carga distribuída uniformemente sobre sua superfície para provar o seguinte “teorema do valor médio”: a média de  $\varphi(\mathbf{r})$  sobre uma superfície esférica  $S$  que envolve uma região livre de cargas é igual ao potencial no centro da esfera:

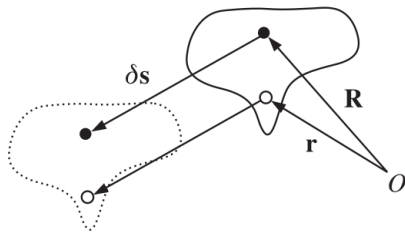
$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_S dS \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(0). \quad (3.5)$$

Notas: pag 21-23

# Estratégia da prova

Truque: Usamos a reciprocidade de Green com um sistema auxiliar simples: uma casca esférica uniformemente carregada.

- A casca gera potencial constante em seu interior.
- A distribuição externa gera o potencial  $\varphi$ .
- A reciprocidade liga os dois pontos de vista.





## Sistema auxiliar: casca esférica

Escolha auxiliar Considere uma casca esférica de raio  $R$ , carga total  $Q$ , e densidade superficial uniforme:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

$$\rho_{\text{casca}}(\mathbf{r}) = \sigma \delta(r - R) \quad (87)$$

Por que essa escolha é útil?

Porque o potencial produzido pela casca é constante em qualquer ponto dentro dela.

## Potencial da casca no interior

Resultado conhecido Para qualquer ponto dentro da casca:

$$\varphi_{\text{casca}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

### Comentário

Esse potencial é o mesmo no centro e em qualquer outro ponto interno. Isso é o que torna a casca um sistema auxiliar poderoso.

# Aplicando reciprocidade

Reciprocidade Tomamos:

$$\rho_1 = \rho_{\text{externa}}, \quad \rho_2 = \rho_{\text{casca}}.$$

Então:

$$\int d^3r \rho_{\text{externa}} \varphi_{\text{casca}} = \int d^3r \rho_{\text{casca}} \varphi.$$

## Ideia

O lado esquerdo usa o potencial simples da casca. O lado direito vira uma média do potencial  $\varphi$  sobre a superfície.

## Lado esquerdo da reciprocidade

Como  $\varphi_{\text{casca}}$  é constante na região interna

$$\varphi_{\text{casca}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Logo:

$$\int d^3r \rho_{\text{externa}} \varphi_{\text{casca}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \int d^3r \rho_{\text{externa}}.$$

### Interpretação

Esse lado representa a energia da distribuição externa no potencial constante da casca.

## Lado direito da reciprocidade

A carga está apenas na superfície Como a casca possui densidade superficial uniforme:

$$dq = \sigma dS.$$

Então:

$$\int d^3r \rho_{\text{casca}} \varphi = \int_S \sigma \varphi dS.$$

$$\int d^3r \rho_{\text{casca}} \varphi = \frac{Q}{4\pi R^2} \int_S \varphi dS \quad (88)$$

## Obtendo o valor médio

Usando reciprocidade A igualdade entre os dois lados leva a:

$$\frac{Q}{4\pi R^2} \int_S \varphi dS = Q \varphi(0).$$

Cancelando  $Q$ :

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_S dS \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(0) \quad (89)$$

### Conclusão

O potencial no centro é a média do potencial sobre a superfície.

# Mensagem física do exemplo

## Conclusão principal

Em regiões sem carga, o potencial eletrostático é uma função harmônica:

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Funções harmônicas obedecem ao teorema do valor médio.

Consequência importante O potencial não pode ter máximos ou mínimos locais em uma região vazia de cargas. Isso está por trás de muitos resultados de estabilidade em eletrostática.

## 3.6 Energia Eletrostática Total

Definição: A energia eletrostática total  $U_E$  é definida como o trabalho total necessário para montar uma distribuição de cargas a partir de um estado inicial em que toda a carga está dispersa no infinito.

- O processo é realizado quase-estaticamente
- Não há dissipação de energia
- O processo é reversível (termodinamicamente)



- $U_E$  atinge valor mínimo no estado fundamental
- Pode depender de parâmetros variacionais
- Minimizar  $U_E \Rightarrow$  aproximação do estado fundamental

# Sistema de Cargas Puntiformes

Configuração: Considere  $N$  cargas puntiformes  $q_k$  nas posições  $\mathbf{r}_k$ .

- Primeira carga: não exige trabalho ( $E = 0$ )
- Segunda carga: trabalho contra a força de Coulomb

$$W_{12} = q_2 \varphi_1(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (3.73)$$

## Generalização para $N$ Cargas

Energia Total Somando todas as interações:

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{i>j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (3.74)$$

### Correção de Supercontagem

Cada par é contado duas vezes na soma dupla.

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}_i) \quad (3.75)$$

Limite Contínuo Substituímos somas por integrais:

$$U_E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.76)$$

$$U_E = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \quad (3.76)$$

## Exemplo: Esfera Uniforme

Construção: Montamos a esfera adicionando camadas esféricas de espessura  $dr$ .

- Densidade:  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$
- Incremento de carga:  $dq = 4\pi r^2 \rho dr$

## Energia da Esfera: ideia da construção

Montagem por camadas: Construimos uma esfera uniformemente carregada adicionando cascas esféricas infinitesimais de raio  $r$  e espessura  $dr$ .

$$dq = 4\pi r^2 \rho dr. \quad (90)$$

Carga já montada até o raio  $r$

$$q(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho. \quad (91)$$

## Energia da Esfera: trabalho infinitesimal

Potencial na superfície da esfera parcial: No instante em que a esfera tem raio  $r$ , o potencial em sua superfície é

$$\varphi_s(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 \rho}{r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}. \quad (92)$$

Trabalho para trazer a próxima camada

$$dU_E = \varphi_s(r) dq. \quad (93)$$



## Energia da Esfera: integração

Substituindo (??) e (??) em (??):

$$\begin{aligned} dU_E &= \left( \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} \right) (4\pi r^2 \rho dr) \\ &= \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr. \end{aligned} \tag{94}$$

Logo,

$$U_E = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 \int_0^R r^4 dr. \tag{95}$$

## Energia da Esfera: resultado final

A integral radial é

$$\int_0^R r^4 dr = \frac{R^5}{5}. \quad (96)$$

Portanto,

$$U_E = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5. \quad (97)$$

Como

$$Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}, \quad (98)$$

obtemos

$$U_E = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (3.77)$$

## Construção Contínua: ideia

Método alternativo Em vez de montar uma esfera camada por camada, podemos montar uma distribuição qualquer aumentando sua densidade gradualmente:

$$\rho_{\lambda}(\mathbf{r}) = \lambda \rho(\mathbf{r}), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (99)$$

Por linearidade da equação de Poisson,

$$\varphi_{\lambda}(\mathbf{r}) = \lambda \varphi(\mathbf{r}). \quad (100)$$

## Construção Contínua: trabalho infinitesimal

Ao aumentar o parâmetro de  $\lambda$  para  $\lambda + d\lambda$ , a densidade adicionada é

$$d\rho(\mathbf{r}) = d\lambda \rho(\mathbf{r}). \quad (101)$$

O trabalho infinitesimal para adicionar essa carga ao potencial já existente é

$$\begin{aligned} dU_E &= \int d^3r d\rho(\mathbf{r}) \varphi_\lambda(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r [d\lambda \rho(\mathbf{r})] [\lambda \varphi(\mathbf{r})] \\ &= \lambda d\lambda \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (102)$$

## Construção Contínua: resultado geral

Integrando de  $\lambda = 0$  até  $\lambda = 1$ :

$$\begin{aligned}U_E &= \int_0^1 \lambda d\lambda \int d^3r \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \\&= \left( \int_0^1 \lambda d\lambda \right) \int d^3r \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \\&= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{3.78}$$

### Origem do fator 1/2

Ele aparece porque o potencial não está pronto desde o início, ele cresce junto com a carga durante a montagem da distribuição. Logo vem de uma média.

## Observação Importante: divergência

### Carga puntiforme

Para uma carga puntiforme, a energia eletrostática própria diverge.

Pela energia da esfera uniformemente carregada,

$$U_E = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (103)$$

No limite de carga puntiforme,

$$R \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad U_E \rightarrow \infty. \quad (104)$$

Interpretação Essa divergência reflete uma limitação fundamental da eletrodinâmica clássica quando cargas puntiformes são tratadas literalmente.

## Exercício 3.15

Considere que o espaço entre duas esferas concêntricas de raios  $a$  e  $R \geq a$  esteja preenchido uniformemente com carga.

- (a) Calcule a energia total  $U_E$  em termos da carga total  $Q$  e da variável  $x = a/R$ . Verifique os limites  $a = 0$  e  $a = R$ .
- (b) Minimize  $U_E$  em relação a  $x$  (mantendo a carga total  $Q$  constante). Identifique o sistema físico que realiza o mínimo encontrado.

Notas: pag: 24-30



# Força sobre uma distribuição de carga

Campo elétrico gerado por  $\rho(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{F} = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (105)$$

- Força total = soma da força local  $\rho\mathbf{E}$

- ~~Objetivo~~: eliminar  $\rho$

Notas: pag 31-38

## Usando a Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (106)$$

Substituindo em (??):

$$F_i = \epsilon_0 \int_V d^3r (\nabla \cdot \mathbf{E}) E_i \quad (107)$$

Usando notação de índices:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_j E_j$$

## Manipulação vetorial (passo chave)

$$F_i = \epsilon_0 \int_V d^3r (\partial_j E_j) E_i \quad (108)$$

Somamos e subtraímos um termo:

$$F_i = \epsilon_0 \int_V d^3r [\partial_j (E_j E_i) - E_j \partial_j E_i] \quad (109)$$

Identidade usada:

$$\partial_j (E_j E_i) = (\partial_j E_j) E_i + E_j (\partial_j E_i)$$

Campo eletrostático:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \partial_j E_i = \partial_i E_j$$

Então:

$$E_j \partial_j E_i = E_j \partial_i E_j \quad (110)$$

$$F_i = \epsilon_0 \int_V d^3 r [\partial_j (E_j E_i) - E_j \partial_i E_j] \quad (111)$$

## Reescrevendo o segundo termo

Observe:

$$E_j \partial_i E_j = \frac{1}{2} \partial_i (E_j E_j)$$

$$F_i = \epsilon_0 \int_V d^3r \left[ \partial_j (E_j E_i) - \frac{1}{2} \partial_i (E^2) \right] \quad (112)$$

## Definição do Tensor de Tensões

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) \quad (113)$$

Interpretação:

- $E_i E_j \rightarrow$  tensão direcional
- $-\frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \rightarrow$  pressão isotrópica

## Forma divergente

$$F_i = \int_V d^3r \partial_j T_{ij} \quad (114)$$

Aplicando o teorema da divergência:

$$F_i = \int_S dS n_j T_{ij} \quad (115)$$

Força = fluxo de tensão através da superfície

$$\mathbf{F} = \int_S dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \quad (116)$$

Substituindo:

$$\mathbf{F} = \epsilon_0 \int_S dS \left[ (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \hat{\mathbf{n}} \right] \quad (117)$$



# Decomposição geométrica do campo

Decomposição:

$$\mathbf{E} = E(\hat{n} \cos \theta + \hat{t} \sin \theta)$$

- $\hat{n} \rightarrow$  normal
- $\hat{t} \rightarrow$  tangente
- $\theta \rightarrow$  ângulo com a normal

# Substituição explícita

Substituindo na força:

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_S dS E^2 (\hat{n} \cos 2\theta + \hat{t} \sin 2\theta) \quad (118)$$

Resultado importante:

- Campo transmite força através do espaço
- Interpretação mecânica do campo elétrico

O campo elétrico atua como um meio que:

- exerce tensões
- transmite forças
- armazena energia

## Insight

A força não precisa de contato direto entre cargas: é mediada pelo campo!

## Aplicação: duas cargas

- Linhas de campo definem direção da força
- Tensor permite calcular força sem usar  $\rho$

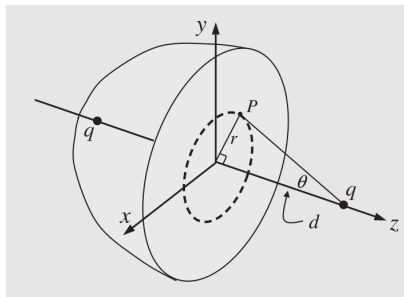
Casos:

- cargas iguais  $\rightarrow$  repulsão
- cargas opostas  $\rightarrow$  atração

## Exemplo 3.6 — Força entre duas cargas

Objetivo:

- Mostrar que o tensor de tensões reproduz a lei de Coulomb
- Duas cargas  $q$  em  $z = \pm d$
- Distância entre elas:  $2d$
- Queremos a força sobre a carga em  $z = -d$



# Escolha da superfície

Escolhemos uma superfície  $S$  em forma de “tigela”

- Ela envolve apenas a carga em  $z = -d$
- No limite:

$$R \rightarrow \infty$$

- A parte hemisférica não contribui

## Resultado chave

A integral se reduz ao plano bissetor:

$$z = 0$$

## Campo no plano bissetor

Por simetria:

$$\hat{n} \cdot \mathbf{E} = 0$$

- O campo está no plano
- Apenas o termo  $-\frac{1}{2}E^2\hat{n}$  contribui

$$\mathbf{F} = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_S dS E^2 \hat{n} \quad (119)$$

Definições:

- $\theta$ : ângulo com o eixo  $z$
- distância até cada carga:

$$r = \frac{d}{\cos \theta}$$

- Usamos coordenadas cilíndricas no plano  $z = 0$



# Campo elétrico no plano

Campo de uma carga:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (120)$$

Com duas cargas:

$$E_{\parallel} = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \sin \theta \quad (121)$$

Substituindo  $r$ :

$$E_{\parallel} = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos^2 \theta \sin \theta \quad (122)$$

## Elemento de área

No plano:

$$dS = r \, dr \, d\phi \quad (123)$$

Como:

$$r = d \tan \theta$$

$$dr = d \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Logo:

$$dS = d^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta d\phi \quad (124)$$

## Montando a integral

$$\mathbf{F} = -\frac{\epsilon_0}{2} \int dS E^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (125)$$

Substituindo  $E$ :

$$E^2 = \left[ 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos^2 \theta \sin \theta \right]^2 \quad (126)$$

$$F_z = -\frac{\epsilon_0}{2} \left( 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin^2 \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \quad (127)$$

Simplificando:

$$\cos^4 \theta / \cos^3 \theta = \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta \cdot \sin \theta = \sin^3 \theta$$

$$F_z = -\frac{\epsilon_0}{2} \left( 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin^3\theta d\theta \quad (128)$$

Separando:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

## Integral angular

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta \quad (129)$$

Substituição:

$$u = \sin \theta \Rightarrow du = \cos \theta d\theta$$

$$I = \int_0^1 u^3 du = \frac{1}{4} \quad (130)$$

$$F = -\hat{z} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} \quad (131)$$

Resultado:

- Lei de Coulomb recuperada
- Direção correta (repulsão)

O que aprendemos:

- A força surge do campo no espaço vazio
- O campo exerce uma pressão
- A interação é mediada pelo tensor de tensões

Mensagem central

Campos carregam momento e transmitem forças