

Eletrodinâmica Clássica

Aula 2 — Equações de Maxwell

Prof. Dr. Rafael C. R. de Lima

UDESC — CCT

Aula 2 — As Equações de Maxwell

"If you wake up a physicist in the middle of the night and say 'Maxwell', he is sure to say 'electromagnetic field'."

Rudolph Peierls (1962)

Ideia central

O eletromagnetismo é descrito por **campos** que permeiam o espaço-tempo e mediam a interação entre cargas e correntes.

Mensagem-chave

Não são as forças que são fundamentais, mas sim os **campos** elétrico e magnético.

Forças fundamentais e o papel do eletromagnetismo

Toda a física conhecida emerge de **quatro interações fundamentais**:

- Gravitação — estrutura em grande escala do Universo;
- Interação forte — liga hádrons e controla reações nucleares;
- Interação fraca — decaimentos de partículas e processos envolvendo neutrinos;
- **Eletromagnetismo** — governa a matéria carregada e a radiação.

Força de Lorentz

O efeito do campo eletromagnético sobre uma partícula carregada é dado por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são campos físicos reais.

Campos elétricos e magnéticos

Campos estáticos

Quando independentes do tempo:

- $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ surge da separação de cargas;
- $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ surge de correntes estacionárias;
- comportam-se como entidades quase independentes.

Campos dependentes do tempo

Quando $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ variam no tempo:

- tornam-se **inseparáveis**;
- propagam-se como **ondas eletromagnéticas**;
- explicam rádio, micro-ondas, luz visível, raios X.

Escalas de Campos Elétricos e Magnéticos

Campos Elétricos Estáticos

- Requerem **separação de carga**.
- Em meios quase neutros, sofrem **blindagem (screening)**.
- Escalas naturais limitadas:
 - Fenômenos atmosféricos (TLEs: sprites, jets)
 - Ordem de grandeza:

$$L_E \sim 10^4 - 10^5 \text{ m} \quad (1)$$

Campos Magnéticos Estacionários

- Gerados por **correntes estacionárias** (não requerem separação de carga).
- Podem persistir em **plasma quase neutro**.
- Escalas astrofísicas e cosmológicas:

$$L_B \sim 10^{22} - 10^{24} \text{ m} \quad (2)$$

2.1.1 Carga elétrica — origem do conceito

Etimologia e observação empírica

A palavra **elétrico** deriva do grego *elektron* (âmbar), material que atrai pequenos corpos quando friccionado.

- Fenômenos elétricos eram conhecidos desde a Antiguidade;
- Por séculos, foram vistos como curiosidades ou efeitos místicos;
- No século XVII, William Gilbert demonstrou que muitos materiais, quando preparados adequadamente, exibem efeitos elétricos.

Ponto conceitual

O comportamento elétrico não é exclusivo do âmbar: trata-se de uma **propriedade geral da matéria**.

2.1.1 Carga elétrica — definição moderna

Carga como grandeza física

No século XVIII, Benjamin Franklin introduziu a ideia de um “fluido elétrico”, levando à noção de **carga elétrica** como uma quantidade conservada.

Hoje entendemos que:

- A carga elétrica Q é uma **propriedade intrínseca** das partículas;
- Ela determina a intensidade das interações eletromagnéticas;
- A carga é quantizada em múltiplos da carga elementar.

Carga elementar

O menor valor observado de carga é o módulo da carga do elétron:

$$e = 1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{ C.} \quad (2.2)$$

2.1.1 Densidade de carga

Descrição contínua da carga

Embora a carga elétrica seja **quantizada**, o eletromagnetismo clássico é formulado de maneira natural em termos de uma **densidade de carga** contínua $\rho(\mathbf{r})$.

- $\rho(\mathbf{r})$ representa a carga por unidade de volume;
- É uma excelente aproximação para distribuições macroscópicas;
- Permite formular leis locais em termos de campos.

Carga total em um volume

A carga contida em um volume infinitesimal d^3r é

$$dQ = \rho(\mathbf{r}) d^3r, \quad (3)$$

e a carga total em um volume finito V é

$$Q = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

2.1.1 Densidade de carga e mecânica quântica

Descrição quântica da densidade de carga

A definição de densidade de carga também é natural na **mecânica quântica**, onde $\rho(\mathbf{r})$ é expressa em termos de **funções de onda contínuas**.

- Consideremos N partículas indistinguíveis, cada uma com carga q ;
- O sistema é descrito por uma função de onda $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$;
- A densidade de carga resulta da probabilidade marginal.

Expressão geral

A densidade de carga em $\mathbf{r}$ é dada por

$$\rho(\mathbf{r}) = q \int d^3r_2 \int d^3r_3 \cdots \int d^3r_N |\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)|^2. \quad (2.4)$$

Mensagem-chave

A formulação contínua de $\rho(\mathbf{r})$ é compatível tanto com a física clássica quanto com a quântica.

2.1.1 Densidade superficial de carga

Distribuições confinadas a superfícies

Em muitos problemas, a carga está efetivamente confinada a uma **camada superficial infinitesimal**.

- Introduzimos a densidade superficial de carga $\sigma(\mathbf{r}_s)$;
- $\mathbf{r}_s$ denota um ponto sobre a superfície S ;
- A carga em um elemento de área dS é proporcional a dS .

Definição

$$dQ = \sigma(\mathbf{r}_s) dS, \quad (4)$$

e a carga total associada a uma superfície finita S é

$$Q = \int_S dS \sigma(\mathbf{r}_s). \quad (2.5)$$

2.1.1 Densidade linear de carga

Distribuições unidimensionais

Para distribuições confinadas a um **filamento unidimensional**, introduzimos a densidade linear de carga $\lambda(\ell)$.

- ℓ é o comprimento medido ao longo do fio;
- $\lambda(\ell)$ representa a carga por unidade de comprimento;
- Aparece naturalmente em fios, anéis e condutores delgados.

Definição

A carga contida em um elemento de comprimento $d\ell$ é

$$dQ = \lambda(\ell) d\ell, \quad (5)$$

e a carga total em um fio finito é

$$Q = \int d\ell \lambda(\ell). \quad (2.6)$$

Densidade de Carga Linear e Corrente

- Para distribuições contínuas ao longo de uma linha:

$$dQ = \lambda(\ell) d\ell \quad (6)$$

- $\lambda(\ell)$: densidade linear de carga
- A corrente pode ser expressa como:
 - Fluxo da densidade de corrente volumétrica $\mathbf{j}$ através de uma superfície S :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (7)$$

- Ou como fluxo ao longo de uma linha:

$$I = \int_C (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot d\ell \quad (8)$$

- $\mathbf{K}$: densidade de corrente superficial

Carga Pontual e Função Delta

- Uma carga pontual clássica:
 - Objeto de tamanho desprezível
 - Carrega carga finita
- Representação usando função delta de Dirac:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad (9)$$

- Propriedade importante:

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) d^3r = \sum_{k=1}^N q_k \quad (10)$$

- **Atenção:**
 - A função delta introduz singularidades
 - Pode gerar divergências em outras grandezas físicas

Definição

Corrente elétrica é o movimento organizado de carga elétrica.

Contexto histórico

- **Luigi Galvani**: contração da perna do sapo.
- **Alessandro Volta**: corrente como fluxo contínuo de carga.
- Invenção da **bateria** (1800).

Galvani e a Eletricidade da Vida

Experimento (século XVIII)

- conecta um sapo morto a uma haste metálica durante uma tempestade
- Relâmpagos → corrente elétrica
- Perna do sapo **se contrai**

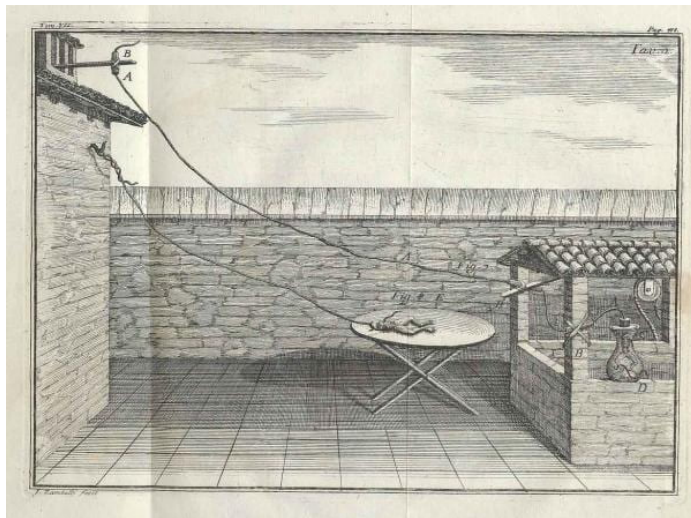
Insight

- Eletricidade $\leftrightarrow$ movimento
- Possível ligação com a **vida**

Ideia central

A eletricidade pode ser a chave para o movimento — e talvez para a própria vida. Isso rompeu com ideias antigas (como o pneuma) e trouxe a fisiologia para o campo da física.

Galvani e a Eletricidade da Vida



Galvanismo como Espetáculo

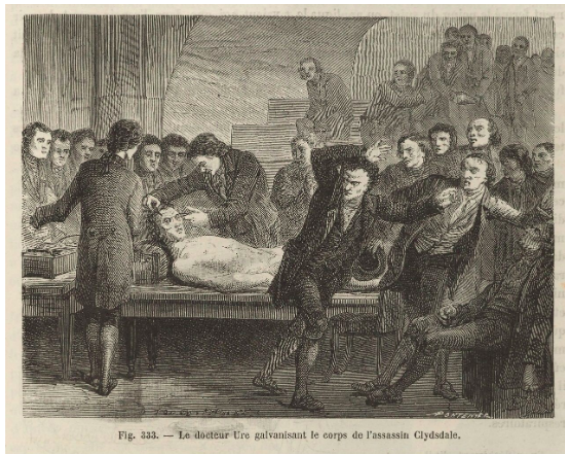
Fenômeno Social

- Demonstrações públicas de galvanismo viraram **espetáculo**
- Experimentos com cadáveres sugeriam “**reanimar**” os mortos

Impacto Cultural

Influenciou diretamente:

Frankenstein



In this 1867 illustration, a crowd of scientists watch in horror as Andrew Ure makes the lifeless body of Matthew Clydesdale tremble and twitch with electricity. HOUGHTON LIBRARY, HARVARD UNIVERSITY

Definição local

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Interpretação

- $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$: densidade de corrente
- Mede o fluxo de carga através de uma superfície

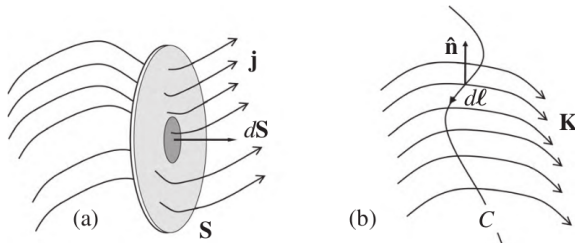


Figure 2.1: (a) The current I is the integral over S of the projection of the volume current density $\mathbf{j}$ onto the area element $d\mathbf{S}$; (b) the current I is the integral over C of the projection of $\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$ (the cross product of the surface current density $\mathbf{K}$ and the surface normal $\hat{\mathbf{n}}$) onto the line element $d\ell$.

Equação fundamental

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}. \quad (2.7)$$

Ideia física

- Corrente = fluxo total de carga através da superfície

Relação fundamental

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (2.8)$$

Interpretação

- ρ : densidade de carga
- $\mathbf{v}$: velocidade do fluxo

Se a carga estiver totalmente confinada a uma superfície bidimensional, é apropriado substituir (2.8) por uma densidade de corrente superficial.

Densidade superficial

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}. \quad (2.9)$$

Quando usar

- Cargas confinadas a uma superfície (ex: condutores finos)

Expressão geral

$$I = \int_C d\ell \cdot (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) = \int_C \mathbf{K} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times d\ell). \quad (11)$$

(2.10)

Insight

- Apenas a componente de $\mathbf{K}$ normal à curva contribui

Conservação de Carga

Princípio fundamental

A carga elétrica é **absolutamente conservada** em todos os processos físicos conhecidos.

Consequência direta

- A carga em um volume só muda se houver **fluxo de partículas carregadas**
- Entrando ou saindo do volume

Mesmo em processos complexos

- Reações químicas criam/destroem espécies
- Processos quânticos criam/destroem partículas

Mas a carga total permanece constante

Ideia do teste

Se a carga elétrica **não fosse conservada**, o elétron poderia decair em partículas neutras:

$$e^- \rightarrow \text{fótons, neutrinos, etc.}$$

Por que isso é importante?

- O elétron tem carga $-e$
- As partículas finais seriam **neutras**
- Isso violaria diretamente a **conservação da carga**

Resultado experimental

$$\tau_e > 10^{24} \text{ anos}$$

- Nenhum decaimento observado
- O elétron é **extremamente estável**

Mensagem física

A conservação da carga é uma das leis mais robustas da natureza.

Aplicando teorema da divergência

$$I = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (12)$$

(2.11)

Significado

- Fluxo pela superfície = divergência no volume

Expressão

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho = - \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (13)$$

(2.12)

Interpretação

- Variação da carga no volume

Equação da Continuidade

Forma local

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (14)$$

(2.13)

Mensagem central

- Conservação local da carga

Densidade de carga

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)). \quad (15)$$

(2.14)

Resultado final para corrente

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N q_k \mathbf{v}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k). \quad (16)$$

(2.17)

2.1.3 Conservação de Carga

Princípio fundamental

- A carga elétrica é **absolutamente conservada**
- Só pode variar em um volume por fluxo através da superfície

Importância

- Base de toda a eletrodinâmica
- Conecta fenômenos clássicos e quânticos

Corrente como divergência

$$I = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (2.11)$$

Interpretação

- Fluxo de corrente através da superfície
- Equivalente à divergência no volume

Variação da Carga no Volume

Expressão

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho = - \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Significado

- Variação da carga dentro do volume
- Relaciona densidade de carga e tempo

Forma local

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.13)$$

Mensagem-chave

- Conservação local da carga
- Sem fontes ou sumidouros de carga

Densidade de carga

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)). \quad (2.14)$$

Interpretação

- Soma de contribuições localizadas
- Cada carga descrita por uma delta de Dirac

Derivação da Corrente

Evolução temporal

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_k q_k \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) = - \sum_k q_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k). \quad (2.15)$$

Forma equivalente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \sum_k q_k \mathbf{v}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k). \quad (2.16)$$

Densidade de corrente

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N q_k \mathbf{v}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k). \quad (2.17)$$

2.2 Equações de Maxwell no Vácuo

Unificação

- Eletricidade, magnetismo e óptica apareciam como áreas separadas

2.2 Equações de Maxwell no Vácuo

Unificação

- Eletricidade, magnetismo e óptica apareciam como áreas separadas
- **Maxwell** mostrou que todas fazem parte de uma mesma teoria

2.2 Equações de Maxwell no Vácuo

Unificação

- Eletricidade, magnetismo e óptica apareciam como áreas separadas
- **Maxwell** mostrou que todas fazem parte de uma mesma teoria
- Essa unificação foi apresentada no *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873)

2.2 Equações de Maxwell no Vácuo

Unificação

- Eletricidade, magnetismo e óptica apareciam como áreas separadas
- **Maxwell** mostrou que todas fazem parte de uma mesma teoria
- Essa unificação foi apresentada no *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873)

Impacto conceitual

A interação eletromagnética não é um conjunto de leis isoladas, mas uma **estrutura matemática unificada baseada em campos**.

Da descrição experimental à teoria

Leitura histórica

- Maxwell partiu de muitos resultados experimentais dispersos

Da descrição experimental à teoria

Leitura histórica

- Maxwell partiu de muitos resultados experimentais dispersos
- Seu objetivo era **matematizar** os fenômenos elétricos e magnéticos

Da descrição experimental à teoria

Leitura histórica

- Maxwell partiu de muitos resultados experimentais dispersos
- Seu objetivo era **matematizar** os fenômenos elétricos e magnéticos
- Uma geração depois, Hertz resumiu isso dizendo:

Da descrição experimental à teoria

Leitura histórica

- Maxwell partiu de muitos resultados experimentais dispersos
- Seu objetivo era **matematizar** os fenômenos elétricos e magnéticos
- Uma geração depois, Hertz resumiu isso dizendo:

“Maxwell’s theory is Maxwell’s system of equations.”

Da descrição experimental à teoria

Leitura histórica

- Maxwell partiu de muitos resultados experimentais dispersos
- Seu objetivo era **matematizar** os fenômenos elétricos e magnéticos
- Uma geração depois, Hertz resumiu isso dizendo:

“Maxwell’s theory is Maxwell’s system of equations.”

Observação

A formulação moderna em **quatro equações** é uma versão condensada da formulação original.

2.2.1 Eletrostática

Lei de Coulomb

Trabalhos experimentais de Priestley, Cavendish e Coulomb, no final do século XVIII, estabeleceram a natureza da força entre objetos carregados em repouso. Extrapolando para o caso de cargas pontuais, a força sobre uma carga q no ponto $\mathbf{r}$ devido a N cargas pontuais q_k nos pontos $\mathbf{r}_k$ é dada pela lei do inverso do quadrado de Coulomb.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.18)$$

2.2.1 Eletrostática

Lei de Coulomb

Trabalhos experimentais de Priestley, Cavendish e Coulomb, no final do século XVIII, estabeleceram a natureza da força entre objetos carregados em repouso. Extrapolando para o caso de cargas pontuais, a força sobre uma carga q no ponto $\mathbf{r}$ devido a N cargas pontuais q_k nos pontos $\mathbf{r}_k$ é dada pela lei do inverso do quadrado de Coulomb.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.18)$$

- A força entre cargas pontuais segue uma lei de **inverso do quadrado**

2.2.1 Eletrostática

Lei de Coulomb

Trabalhos experimentais de Priestley, Cavendish e Coulomb, no final do século XVIII, estabeleceram a natureza da força entre objetos carregados em repouso. Extrapolando para o caso de cargas pontuais, a força sobre uma carga q no ponto $\mathbf{r}$ devido a N cargas pontuais q_k nos pontos $\mathbf{r}_k$ é dada pela lei do inverso do quadrado de Coulomb.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.18)$$

- A força entre cargas pontuais segue uma lei de **inverso do quadrado**
- A direção da força é dada pela reta que liga fonte e observador

2.2.1 Eletrostática

Lei de Coulomb

Trabalhos experimentais de Priestley, Cavendish e Coulomb, no final do século XVIII, estabeleceram a natureza da força entre objetos carregados em repouso. Extrapolando para o caso de cargas pontuais, a força sobre uma carga q no ponto $\mathbf{r}$ devido a N cargas pontuais q_k nos pontos $\mathbf{r}_k$ é dada pela lei do inverso do quadrado de Coulomb.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.18)$$

- A força entre cargas pontuais segue uma lei de **inverso do quadrado**
- A direção da força é dada pela reta que liga fonte e observador
- A superposição já aparece implicitamente na soma sobre k

2.2.1 Eletrostática

Lei de Coulomb

Trabalhos experimentais de Priestley, Cavendish e Coulomb, no final do século XVIII, estabeleceram a natureza da força entre objetos carregados em repouso. Extrapolando para o caso de cargas pontuais, a força sobre uma carga q no ponto $\mathbf{r}$ devido a N cargas pontuais q_k nos pontos $\mathbf{r}_k$ é dada pela lei do inverso do quadrado de Coulomb.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.18)$$

- A força entre cargas pontuais segue uma lei de **inverso do quadrado**
- A direção da força é dada pela reta que liga fonte e observador
- A superposição já aparece implicitamente na soma sobre k

Impacto conceitual

A eletrostática começa como uma teoria de **forças entre cargas**.

Notas: pag 6

Da força ao campo elétrico

Definição de campo

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

Da força ao campo elétrico

Definição de campo

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

- Em vez de pensar diretamente em força entre duas cargas...

Da força ao campo elétrico

Definição de campo

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

- Em vez de pensar diretamente em força entre duas cargas...
- ...passamos a descrever um **campo** presente no espaço

Definição de campo

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

- Em vez de pensar diretamente em força entre duas cargas...
- ...passamos a descrever um **campo** presente no espaço
- A partícula de prova apenas responde ao valor local de $\mathbf{E}$

Da força ao campo elétrico

Definição de campo

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

- Em vez de pensar diretamente em força entre duas cargas...
- ...passamos a descrever um **campo** presente no espaço
- A partícula de prova apenas responde ao valor local de $\mathbf{E}$

Impacto conceitual

A pergunta deixa de ser “qual carga puxa qual?” e passa a ser:

qual é o campo neste ponto do espaço?

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.20)$$

- Cada elemento d^3r' contribui para o campo em $\mathbf{r}$

Campo elétrico de uma distribuição

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.20)$$

- Cada elemento d^3r' contribui para o campo em $\mathbf{r}$
- O campo total é a soma vetorial de todas essas contribuições

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.20)$$

- Cada elemento d^3r' contribui para o campo em $\mathbf{r}$
- O campo total é a soma vetorial de todas essas contribuições

Princípio de superposição

O campo produzido por uma distribuição arbitrária de carga é a soma dos campos produzidos por cada uma de suas partes constituintes.

Ferramentas

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (17)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.21)$$

Ferramentas

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (17)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.21)$$

- A primeira relaciona o potencial coulombiano ao campo

Ferramentas

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (17)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.21)$$

- A primeira relaciona o potencial coulombiano ao campo
- A segunda conecta o potencial a uma **fonte localizada**

Ferramentas

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (17)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.21)$$

- A primeira relaciona o potencial coulombiano ao campo
- A segunda conecta o potencial a uma **fonte localizada**

Ideia

Essas identidades permitem passar da forma integral para a forma local das equações.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.22)$$

- A divergência liga o campo elétrico à densidade de carga

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.22)$$

- A divergência liga o campo elétrico à densidade de carga
- O rotacional nulo mostra que, em eletrostática, $\mathbf{E}$ é irrotacional

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.22)$$

- A divergência liga o campo elétrico à densidade de carga
- O rotacional nulo mostra que, em eletrostática, $\mathbf{E}$ é irrotacional

Impacto conceitual

A primeira é a **Lei de Gauss** e já tem a cara da teoria de campos:

fontes locais $\longrightarrow$ estrutura local do campo

Objetivo

Mostrar como as identidades

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

permitem passar da forma **integral** para a forma **local**.

Definição

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (19)$$

- Cada elemento de carga contribui com um potencial coulombiano.
- A informação da fonte está distribuída na integral.

Relação fundamental

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (20)$$

Aplicando o gradiente em (19):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3r' \quad (21)$$

Identidade chave

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (22)$$

Substituindo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad (23)$$

Interpretação

Obtivemos o campo elétrico como superposição das contribuições de Coulomb.

Agora: da forma integral para a forma local

Queremos obter uma equação diferencial para ϕ .
Aplicamos o Laplaciano em (19):

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r' \quad (24)$$

Identidade fundamental

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (25)$$

Substituindo:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' \quad (26)$$

Propriedade da delta

$$\int f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d^3r' = f(\mathbf{r}) \quad (27)$$

Aplicando:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (28)$$

Resultado

Obtivemos a **equação de Poisson** (forma local).

Usando $\mathbf{E} = -\nabla\phi$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (29)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (30)$$

Conclusão

As identidades com $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ permitem:

- Ir da descrição global (integral)
- Para uma descrição local (equações diferenciais)

Cuidado! (Eletrostática)

Hipótese

Na eletrostática:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (31)$$

Demonstração

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-\nabla\phi) \quad (32)$$

$$= -\nabla \times (\nabla\phi) \quad (33)$$

$$= 0 \quad (34)$$

Conclusão

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (35)$$

Cuidado! (Não eletrostático)

Quando isso deixa de valer

Se o campo magnético varia no tempo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (36)$$

- O campo elétrico deixa de ser conservativo
- Linhas de campo podem formar circuitos fechados
- Não é possível escrever apenas $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

Forma geral

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (37)$$

2.2.2 O conceito de campo

Mudança de paradigma

- Antes: ação à distância entre cargas

2.2.2 O conceito de campo

Mudança de paradigma

- Antes: ação à distância entre cargas
- Depois: campos preenchendo todo o espaço

2.2.2 O conceito de campo

Mudança de paradigma

- Antes: ação à distância entre cargas
- Depois: campos preenchendo todo o espaço
- A força passa a ser mediada pelo valor local do campo

2.2.2 O conceito de campo

Mudança de paradigma

- Antes: ação à distância entre cargas
- Depois: campos preenchendo todo o espaço
- A força passa a ser mediada pelo valor local do campo

Mensagem física

Para problemas estáticos, as duas visões são equivalentes.

Mas a visão de campo se torna **muito superior** quando passamos a fenômenos dependentes do tempo.

- O campo não é apenas um artifício matemático

Campos como entidades físicas

- O campo não é apenas um artifício matemático
- Ele pode possuir:
 - energia
 - momento linear
 - momento angular

Campos como entidades físicas

- O campo não é apenas um artifício matemático
- Ele pode possuir:
 - energia
 - momento linear
 - momento angular
- Pode existir e evoluir dinamicamente

Campos como entidades físicas

- O campo não é apenas um artifício matemático
- Ele pode possuir:
 - energia
 - momento linear
 - momento angular
- Pode existir e evoluir dinamicamente

Impacto conceitual

Campos têm o mesmo status mecânico que partículas:

campos são objetos físicos reais

2.2.3 Magnetostática

Linha histórica

- Gilbert: a Terra se comporta como um ímã gigante

2.2.3 Magnetostática

Linha histórica

- Gilbert: a Terra se comporta como um ímã gigante
- Michell, Coulomb e Gauss: força entre polos magnéticos

2.2.3 Magnetostática

Linha histórica

- Gilbert: a Terra se comporta como um ímã gigante
- Michell, Coulomb e Gauss: força entre polos magnéticos
- Oersted (1820): corrente elétrica produz efeitos magnéticos

2.2.3 Magnetostática

Linha histórica

- Gilbert: a Terra se comporta como um ímã gigante
- Michell, Coulomb e Gauss: força entre polos magnéticos
- Oersted (1820): corrente elétrica produz efeitos magnéticos

Mensagem-chave

A magnetostática mostra que **correntes** desempenham para o campo magnético um papel análogo ao das **cargas** para o campo elétrico.

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\boldsymbol{\ell} \cdot \sum_k \oint I_k d\boldsymbol{\ell}_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.23)$$

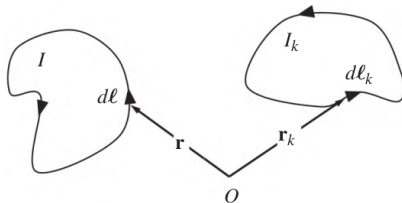


Figure 2.2: Two filamentary loops carry current I and I_k . The vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}_k$ point to the line elements $d\boldsymbol{\ell}$ and $d\boldsymbol{\ell}_k$, respectively.

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\boldsymbol{\ell} \cdot \sum_k \oint I_k d\boldsymbol{\ell}_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\boldsymbol{\ell} \cdot \sum_k \oint I_k d\boldsymbol{\ell}_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.23)$$

- Ampère descreve a força sobre um circuito devido a outros circuitos

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\boldsymbol{\ell} \cdot \sum_k \oint I_k d\boldsymbol{\ell}_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.23)$$

- Ampère descreve a força sobre um circuito devido a outros circuitos
- A estrutura lembra a de Coulomb, mas agora para elementos de corrente

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\boldsymbol{\ell} \cdot \sum_k \oint I_k d\boldsymbol{\ell}_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.23)$$

- Ampère descreve a força sobre um circuito devido a outros circuitos
- A estrutura lembra a de Coulomb, mas agora para elementos de corrente

Leitura conceitual

A magnetostática também pode começar como uma teoria de **forças**, mas naturalmente conduz ao conceito de campo magnético.

Definição operacional de campo magnético

$$\mathbf{F} = \oint I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

Definição operacional de campo magnético

$$\mathbf{F} = \oint I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

- Assim como $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ definiu o campo elétrico...

Definição operacional de campo magnético

$$\mathbf{F} = \oint I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

- Assim como $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ definiu o campo elétrico...
- ...essa expressão define o campo magnético pela força sobre um circuito

Definição operacional de campo magnético

$$\mathbf{F} = \oint I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

- Assim como $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ definiu o campo elétrico...
- ...essa expressão define o campo magnético pela força sobre um circuito

Impacto conceitual

$\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ surgem de maneira paralela: um pela força sobre cargas, outro pela força sobre correntes.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \oint l_k d\ell_k \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \oint l_k d\ell_k \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.25)$$

- Cada elemento de corrente contribui para $\mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \oint l_k d\ell_k \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.25)$$

- Cada elemento de corrente contribui para $\mathbf{B}(\mathbf{r})$
- O campo total é novamente obtido por **superposição**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \oint I_k d\ell_k \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.25)$$

- Cada elemento de corrente contribui para $\mathbf{B}(\mathbf{r})$
- O campo total é novamente obtido por **superposição**

Comparação

Biot–Savart para $\mathbf{B}$ ocupa, na magnetostática, o papel que a integral coulombiana ocupa na eletrostática.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.26)$$

- Passamos de circuitos filiformes para distribuições contínuas de corrente

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.26)$$

- Passamos de circuitos filiformes para distribuições contínuas de corrente
- A fonte do campo magnético é a densidade de corrente $\mathbf{j}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.26)$$

- Passamos de circuitos filiformes para distribuições contínuas de corrente
- A fonte do campo magnético é a densidade de corrente $\mathbf{j}$

Impacto conceitual

Na linguagem de campos:

cargas $\rho \longrightarrow \mathbf{E}$, correntes $\mathbf{j} \longrightarrow \mathbf{B}$

Lei de Biot–Savart (forma discreta)

Expressão para correntes em fios

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \oint I_k d\boldsymbol{\ell}_k \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.25)$$

Lei de Biot–Savart (forma discreta)

Expressão para correntes em fios

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \oint I_k d\boldsymbol{\ell}_k \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.25)$$

- Soma sobre circuitos k

Lei de Biot–Savart (forma discreta)

Expressão para correntes em fios

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \oint I_k d\boldsymbol{\ell}_k \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.25)$$

- Soma sobre circuitos k
- Integrais de linha ao longo dos fios

Lei de Biot–Savart (forma discreta)

Expressão para correntes em fios

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \oint I_k d\boldsymbol{\ell}_k \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (2.25)$$

- Soma sobre circuitos k
- Integrais de linha ao longo dos fios
- Cada elemento $I_k d\boldsymbol{\ell}_k$ contribui para o campo

Problema

- A expressão assume correntes confinadas a fios

Problema

- A expressão assume correntes confinadas a fios
- Mas em geral temos correntes distribuídas no volume

Problema

- A expressão assume correntes confinadas a fios
- Mas em geral temos correntes distribuídas no volume
- Precisamos de uma descrição contínua da corrente

Introduzindo a densidade de corrente

Nova variável

$\mathbf{j}(\mathbf{r})$

Introduzindo a densidade de corrente

Nova variável

$\mathbf{j}(\mathbf{r})$

- Corrente por unidade de área

Nova variável

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})$$

- Corrente por unidade de área
- Descreve distribuição contínua de carga em movimento

Introduzindo a densidade de corrente

Nova variável

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})$$

- Corrente por unidade de área
- Descreve distribuição contínua de carga em movimento

Substituímos a corrente discreta por uma densidade contínua

Substituição fundamental

Elemento de corrente

$$I d\ell$$

Substituição fundamental

Elemento de corrente

$$I d\ell$$

Equivalente contínuo

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

Substituição fundamental

Elemento de corrente

$$I d\ell$$

Equivalente contínuo

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

- Volume dividido em tubos de corrente

Substituição fundamental

Elemento de corrente

$$I d\ell$$

Equivalente contínuo

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

- Volume dividido em tubos de corrente
- Em cada tubo:

$$\mathbf{j} dA = I$$

Substituição fundamental

Elemento de corrente

$$I d\ell$$

Equivalente contínuo

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r'$$

- Volume dividido em tubos de corrente
- Em cada tubo:

$$\mathbf{j} dA = I$$

- Logo:

$$\mathbf{j} d^3r = I d\ell$$

Substituição global

- Soma sobre fios:

$$\sum_k \oint I_k d\ell_k$$

Substituição global

- Soma sobre fios:

$$\sum_k \oint I_k d\ell_k$$

- Torna-se:

$$\int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

Da soma à integral

Substituição global

- Soma sobre fios:

$$\sum_k \oint I_k d\ell_k$$

- Torna-se:

$$\int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

Fonte discreta $\rightarrow$ variável contínua

$$\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.26)$$

Resultado final

- Correntes discretas $\rightarrow$ distribuição contínua
- Soma de fios $\rightarrow$ integral de volume

Lei de Biot–Savart (forma contínua)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.26)$$

Resultado final

- Correntes discretas $\rightarrow$ distribuição contínua
- Soma de fios $\rightarrow$ integral de volume

Mensagem conceitual

A fonte do campo magnético é a densidade de corrente

Resultado fundamental

Em 1851, William Thomson (Lord Kelvin) mostrou que o campo magnético gerado por correntes e ímãs permanentes satisfaz:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.27)$$

Consistência

A expressão geral do campo magnético é consistente com essas equações desde que a corrente satisfaça:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.28)$$

Interpretação

- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ → não existem monopolos magnéticos
- $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ → correntes geram campo magnético

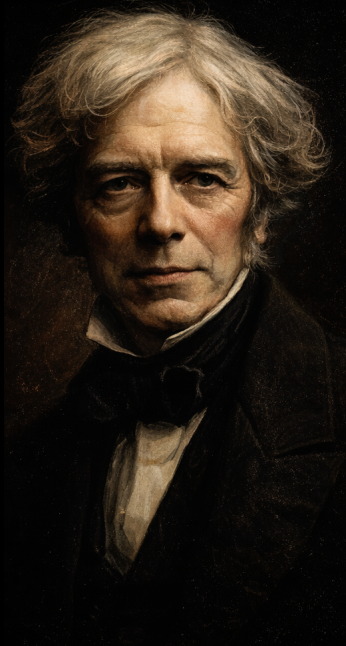
A segunda equação é válida apenas para correntes estacionárias e é conhecida como **Lei de Ampère**.

Fechamento conceitual

Em estática, Maxwell já aparece em embrião:

ρ gera **E**, **j** gera **B**.

O próximo passo será mostrar como, no regime dinâmico, **E** e **B** passam a gerar um ao outro.



Michael Faraday foi o maior cientista experimental do século XIX.

De particular importância foi a descoberta de Faraday de que uma corrente elétrica transitória circula pelo circuito sempre que o fluxo magnético através deste circuito varia (Figura 2.3).

A partir de pontos de vista surpreendentemente diferentes, a expressão matemática deste fato foi alcançada por Neumann, Helmholtz, Thomson, Weber e Maxwell.

Experimento de Faraday

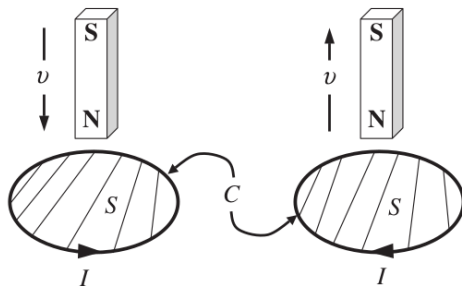


Figure 2.3: A typical experiment which reveals Faraday's law. Current flows in opposite directions in the filamentary wire C when the permanent magnet moves upward or downward. The area S is bounded by the wire C .

Observação

- Movimento do ímã $\Rightarrow$ corrente no circuito
- Sentido da corrente depende do movimento

Descoberta experimental

- Michael Faraday mostrou que uma corrente elétrica é induzida

Descoberta experimental

- Michael Faraday mostrou que uma corrente elétrica é induzida
- Sempre que o **fluxo magnético varia**

Descoberta experimental

- Michael Faraday mostrou que uma corrente elétrica é induzida
- Sempre que o **fluxo magnético varia**

Variação de fluxo magnético $\Rightarrow$ corrente elétrica

Lei de Faraday

$$-\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = IR \quad (2.29)$$

Lei de Faraday

$$-\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = IR \quad (2.29)$$

- Lado esquerdo: variação do fluxo magnético

Lei de Faraday

$$-\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = IR \quad (2.29)$$

- Lado esquerdo: variação do fluxo magnético
- Lado direito: corrente no circuito

Lei de Faraday

$$-\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = IR \quad (2.29)$$

- Lado esquerdo: variação do fluxo magnético
- Lado direito: corrente no circuito

O campo magnético variável gera corrente elétrica

Geometria

- S : superfície limitada pelo circuito C

Geometria

- S : superfície limitada pelo circuito C
- $d\mathbf{S}$: orientação dada pela regra da mão direita

Geometria

- S : superfície limitada pelo circuito C
- $d\mathbf{S}$: orientação dada pela regra da mão direita

Lei de Lenz

O sinal negativo expressa que a corrente induzida se opõe à variação do fluxo magnético.

Geometria

- S : superfície limitada pelo circuito C
- $d\mathbf{S}$: orientação dada pela regra da mão direita

Lei de Lenz

O sinal negativo expressa que a corrente induzida se opõe à variação do fluxo magnético.

- A corrente induzida cria um campo magnético que resiste à mudança do fluxo original.

Da forma integral à diferencial

Lei de Ohm

$$IR = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (2.30)$$

Lei de Ohm

$$IR = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (2.30)$$

- Substituímos em (2.29)

Lei de Ohm

$$IR = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (2.30)$$

- Substituímos em (2.29)
- Aplicamos o teorema de Stokes

Da forma integral à diferencial

Lei de Ohm

$$IR = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (2.30)$$

- Substituímos em (2.29)
- Aplicamos o teorema de Stokes

Resultado final

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.31)$$

Da forma integral à diferencial

Lei de Ohm

$$IR = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (2.30)$$

- Substituímos em (2.29)
- Aplicamos o teorema de Stokes

Resultado final

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.31)$$

- Terceira equação de Maxwell

2.2.5 Corrente de Deslocamento

Ideia central

A **corrente de deslocamento** foi a contribuição conceitual decisiva de Maxwell para fechar a estrutura do eletromagnetismo. Ao perceber que a lei de Ampère, na forma original, falhava em situações com **campos elétricos variando no tempo**, Maxwell introduziu um novo termo efetivo associado a

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

- A densidade de corrente de condução $\mathbf{j}$ não é suficiente em todos os casos.
- É necessário acrescentar uma contribuição proporcional à variação temporal do campo elétrico.
- Isso conduz à forma final da lei de Ampère-Maxwell.

2.2.5 Corrente de Deslocamento

Corrente de deslocamento

Define-se a corrente de deslocamento por

$$\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Substituindo esse termo na lei de Ampère, obtém-se a quarta e última equação de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.32)$$

Leitura física

Mesmo na ausência de corrente material atravessando uma região, uma variação temporal de $\mathbf{E}$ também atua como **fonte de campo magnético**.

2.2.5 Corrente de Deslocamento

Consistência teórica

Hoje é comum dizer que a corrente de deslocamento é **necessária** para compatibilizar:

- a lei de Ampère-Maxwell;
 - a lei de Gauss;
 - a equação da continuidade.
-
- Sem esse termo, a conservação de carga não se encaixa de forma consistente no conjunto das equações.
 - Historicamente, Maxwell chegou a esse termo antes da formulação moderna baseada em conservação de carga.

Nota histórica

Em seus trabalhos iniciais, Maxwell utilizou um **modelo mecânico** de vórtices e esferas intermediárias para inferir a existência dessa nova corrente.

2.2.5 Corrente de Deslocamento: modelo mecânico de Maxwell

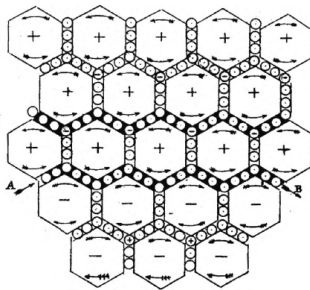


Figure 2.4: Maxwell's sketch of a mechanical model of rotating hexagonal vortices with interposed ball bearings. He inferred the existence of the displacement current from a study of the kinematics of this device. Figure from Maxwell (1861).

Mensagem física

A intuição de Maxwell era que a estrutura interna do meio eletromagnético deveria permitir uma transmissão contínua do efeito mesmo onde não houvesse corrente de condução.

Problema

Queremos verificar se a lei de Ampère é consistente com:

- a lei de Gauss;
- a equação da continuidade.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.13)$$

Inconsistência da lei de Ampère original

Tomando a divergência da lei de Ampère:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (38)$$

Mas sabemos que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad (39)$$

Logo,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (40)$$

Problema

Isso implica $\partial \rho / \partial t = 0$, o que contradiz a equação da continuidade em geral.

Maxwell propôs adicionar um novo termo:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.32)$$

Corrente de deslocamento

$$\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Tomando a divergência:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (41)$$

Como o lado esquerdo é zero:

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (42)$$

Usando:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (43)$$

Substituindo:

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \quad (44)$$

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (45)$$

Recuperação da equação da continuidade

Dividindo por μ_0 :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (46)$$

Conclusão

A inclusão da corrente de deslocamento torna a lei de Ampère **compatível com a lei de Gauss e com a conservação de carga**.

Mensagem física

Sem esse termo, o eletromagnetismo só funcionaria em regime estacionário.

2.2.6 Juntando tudo

Síntese

O eletromagnetismo clássico resume um vasto conjunto de resultados experimentais em termos de quatro grandezas fundamentais:

$$\rho(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).$$

3

As equações diferenciais que conectam campos e fontes podem agora ser reunidas em uma forma única e compacta.

2.2.6 Juntando tudo: equações de Maxwell

Lei de Gauss (elétrica)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Lei de Gauss (magnética)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.33)$$

Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.34)$$

2.2.6 Juntando tudo: força eletromagnética

A conexão direta com a experiência surge quando especificamos a força que $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ exercem sobre uma densidade de carga $\rho^*(\mathbf{r}, t)$ e uma densidade de corrente $\mathbf{j}^*(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{F}(t) = \int d^3r \left[\rho^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}^*(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (2.35)$$

Interpretação

- O primeiro termo generaliza a força elétrica de Coulomb.
- O segundo termo representa a contribuição magnética associada ao movimento de cargas.
- Juntos, eles formam a lei de força eletromagnética em linguagem de densidades contínuas.

2.2.6 Juntando tudo: interpretação física

Leitura conceitual

- cargas $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}$;
- não há monopolos magnéticos;
- $\partial \mathbf{B} / \partial t \rightarrow \nabla \times \mathbf{E}$;
- $\mathbf{j}$ e $\partial \mathbf{E} / \partial t \rightarrow \nabla \times \mathbf{B}$.

Resultado

Corrente de deslocamento $\Rightarrow$ **ondas EM** no vácuo com velocidade c .

Visão unificada

- $\partial \mathbf{E} / \partial t \leftrightarrow \mathbf{B}$;
- $\partial \mathbf{B} / \partial t \leftrightarrow \mathbf{E}$;
- acoplamento $\Rightarrow$ propagação de ondas.

2.2.6 Juntando tudo: exemplo moderno

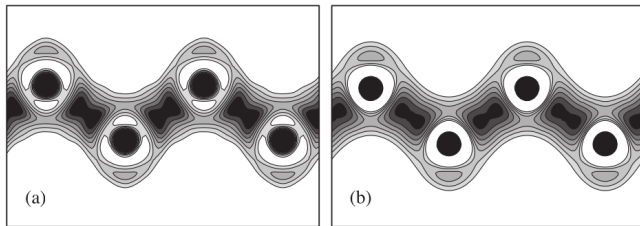


Figure 2.5: Contour plot of the valence charge density of crystalline silicon: (a) $\rho(\mathbf{r})$ extracted from X-ray diffraction data; (b) $\rho(\mathbf{r})$ computed from quantum mechanical calculations and the Maxwell equations. Periodic repetition of either plot in the vertical and horizontal directions generates one plane of the crystal. The rectangular contours reflect “bond” charge between the atoms (black circles). The white regions of very low valence charge density reflect nodes in the sp^3 wave functions. Figure from Tanaka, Takata, and Sakata (2002).

Mensagem final

O eletromagnetismo clássico vai desde a física de ondas até a estrutura eletrônica da matéria.

2.3 Microscópico vs Macroscópico

Ideia de Lorentz

Hendrik Lorentz percebeu que as equações de Maxwell, formuladas para fenômenos macroscópicos, também são válidas em escala microscópica se $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ forem microscópicos.

- Campos microscópicos variam rapidamente no espaço;
- Medidas macroscópicas capturam apenas médias espaciais;
- A teoria macroscópica surge de uma média da teoria microscópica.

Evidência

A validade microscópica das equações de Maxwell é confirmada por:

- espectro do hidrogênio;
- concordância teoria-experimento;
- base da eletrodinâmica quântica (QED).

$$E(n, j) = mc^2 \left[1 + \frac{\alpha^2}{(n - \delta)^2} \right]^{-1/2} \quad (2.36)$$

$$\delta = j + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2}$$

Mensagem

As equações de Maxwell são válidas até escalas da ordem do comprimento de Compton:

$$\lambda_c = \frac{h}{mc}$$

- Não há necessidade de média temporal;
- Frequências eletrônicas são essenciais (UV, raios X);
- A média relevante é espacial.

2.3.1 Média de Lorentz

Ideia

A média espacial transforma grandezas microscópicas em macroscópicas.

Procedimento:

- escolher volume Ω ;
- calcular média espacial;
- obter campos suaves.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d^3s \mathbf{E}_{\text{micro}}(\mathbf{s} + \mathbf{r}, t) \quad (2.37)$$

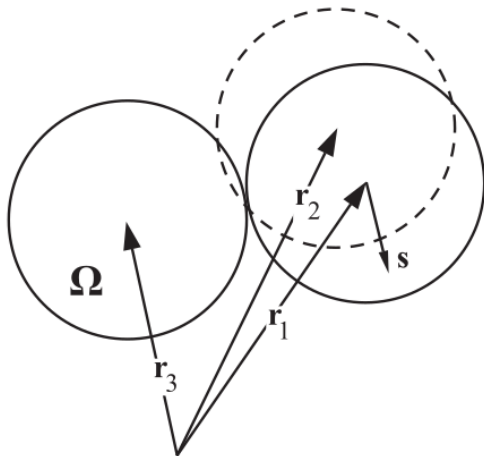


Figure 2.6: Spherical volumes centered at arbitrary points in space $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, and $\mathbf{r}_3$.

A média de Lorentz é linear e comuta com derivadas:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \nabla \times \mathbf{E}_{\text{micro}} \rangle \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{micro}}}{\partial t} \right\rangle \quad (2.39)$$

Conclusão

As equações de Maxwell têm a mesma forma nas descrições micro e macroscópica.

$$\mathbf{F} = \int_V d^3r [\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}] \quad (2.40)$$

Observação

A forma da força é mantida ao passar do regime microscópico para o macroscópico.

2.3.2 Superfície macroscópica

Problema

A média espacial gera descontinuidades em superfícies.

$$\bar{\rho}_0(z) = \frac{1}{A} \int_A dx dy \rho_0(\mathbf{r}) \quad (2.41)$$

$$\bar{\rho}(z) = \bar{\rho}_0(z) + \sigma \lambda(z) \quad (2.42)$$

Figura de superfície

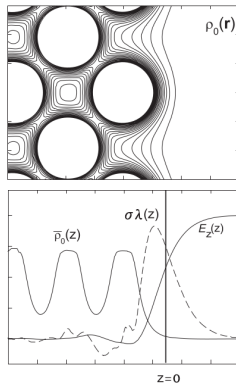


Figure 2.7: Side view of the free surface of crystalline Ag metal. The vacuum lies to the right. Top panel: contour plot of the valence electron charge density $\rho_0(\mathbf{r})$ in one crystalline plane perpendicular to the surface. The white circles are regions of very high electron density centered on the atomic nuclei. Bottom panel: the solid curve labeled $\bar{\rho}_0(z)$ is $\rho_0(\mathbf{r})$ averaged over planes parallel to the surface. The local maxima of this curve are rounded off and do not accurately reflect the electron density near the nuclei; the dashed curve labeled $\sigma\lambda(z)$ is the planar average of the *change* in electron density induced by an electric field directed to the left; the solid curve labeled $E_z(z)$ is the planar average of the electric field perpendicular to the macroscopic surface. The vertical scale is different for each curve. The solid vertical line is the location $z = 0$ of the macroscopic surface. Tick marks on the horizontal scale are separated by $2a_{\text{Bohr}} \approx 1 \text{ \AA}$. Figure adapted from Ishida and Liebsch (2002). Copyright 2002 by the American Physical Society.

Após média:

$$\sigma\lambda(z) \rightarrow \sigma\delta(z) \quad (2.43)$$

Interpretação

A carga microscópica distribuída torna-se uma carga superficial efetiva.

Situação física

Considere uma interface plana em $z = 0$, separando dois meios:

- região L (esquerda): $z < 0$
- região R (direita): $z > 0$

- Campos podem ser diferentes em cada lado:

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_R(\mathbf{r})$$

- Pode existir uma **carga superficial** σ na interface

Pergunta central

Como os campos elétricos e magnéticos se conectam ao atravessar a interface?

Ferramenta matemática: função degrau

Definimos a função degrau:

$$\Theta(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Com isso, escrevemos o campo elétrico como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_R(\mathbf{r}) \Theta(z) + \mathbf{E}_L(\mathbf{r}) \Theta(-z) \quad (2.45)$$

Densidade de carga: similar mas abrimos a possibilidade de haver carga em $z=0$

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_R(\mathbf{r}) \Theta(z) + \rho_L(\mathbf{r}) \Theta(-z) + \sigma \delta(z) \quad (2.46)$$

Passo chave: divergência

Aplicamos a lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Tomando a divergência de $\mathbf{E}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = [\nabla \cdot \mathbf{E}_R]\Theta(z) + [\nabla \cdot \mathbf{E}_L]\Theta(-z) + \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{E}_R - \mathbf{E}_L) \delta(z) \quad (2.47)$$

Ideia importante

A derivada da função degrau gera uma **delta de Dirac**, responsável pelo termo de descontinuidade.

Resultado principal

Comparando com a expressão da densidade de carga:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_R \Theta(z) + \rho_L \Theta(-z) + \sigma \delta(z)$$

obtemos:

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{E}_R - \mathbf{E}_L) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.48)$$

Esta é uma condição de compatibilidade que relaciona a descontinuidade na componente normal do campo elétrico macroscópico à magnitude da densidade de carga singular na interface.

Interpretação física

- O campo elétrico sofre um **salto na direção normal**
- Esse salto é proporcional à **carga superficial**

Condição de contorno do campo elétrico

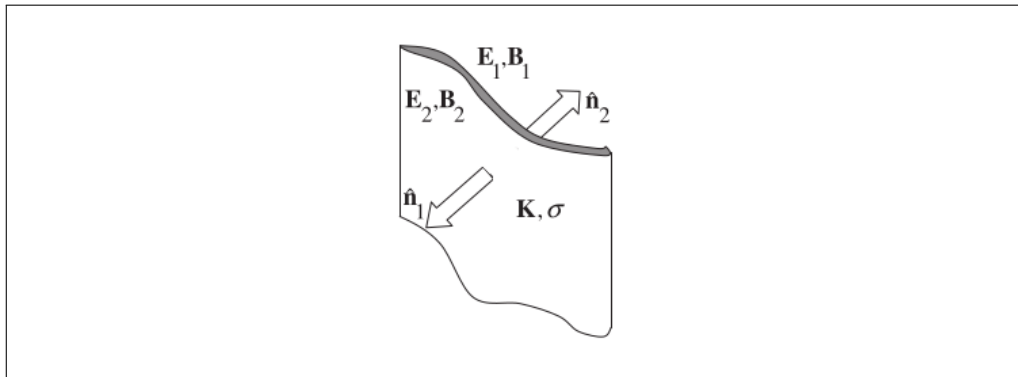
Interpretação física

Se existir carga acumulada na interface (em $z = 0$), então o campo elétrico não pode ser contínuo ali — ele sofre um “salto” na componente perpendicular à superfície.

- A componente **normal** do campo elétrico (perpendicular à superfície) muda ao atravessar a interface.
- O tamanho dessa mudança é proporcional à densidade de carga superficial σ .

Condição de contorno

$$E_{\perp}^{\text{acima}} - E_{\perp}^{\text{abaixo}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (47)$$



Interface com densidade de carga σ e corrente superficial $\mathbf{K}$

Condições gerais de contorno

Para uma interface com σ e corrente superficial $\mathbf{K}$:

Componentes normais

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

Componentes tangenciais

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_0 \mathbf{K} \quad (2.49)$$

- $\mathbf{E}_\perp$ é descontínuo $\rightarrow$ devido a σ
- $\mathbf{B}_\perp$ é contínuo $\rightarrow$ não há monopolos magnéticos
- $\mathbf{E}_\parallel$ é contínuo $\rightarrow$ lei de Faraday
- $\mathbf{B}_\parallel$ é descontínuo $\rightarrow$ devido a corrente $\mathbf{K}$

Mensagem central

As condições de contorno são uma consequência direta das equações de Maxwell aplicadas a interfaces.

Se a interface se move com velocidade $\mathbf{v}$:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (2.50)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c^2}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mu_0 \mathbf{K} \quad (48)$$

Observação

Essas correções aparecem por efeitos relativísticos.

Enunciado

Sejam $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ vetores que apontam para elementos de linha $d\mathbf{s}_1$ e $d\mathbf{s}_2$ de duas espiras fechadas C_1 e C_2 , percorridas por correntes I_1 e I_2 , respectivamente. Experimentalmente, a força exercida sobre I_1 por I_2 é

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} I_1 d\mathbf{s}_1 \cdot \oint_{C_2} I_2 d\mathbf{s}_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (49)$$

Mostre que:

(a)

$$\oint_{C_1} d\mathbf{s}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = 0. \quad (50)$$

(b) Usando (a), mostre que

$$\mathbf{F}_1 = \oint_{C_1} I_1 d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1), \quad (51)$$

Enunciado

Uma densidade de corrente superficial $\mathbf{K}(\mathbf{r}_s, t)$ flui no plano $z = 0$, separando a região 1 ($z > 0$) da região 2 ($z < 0$). Cada região contém distribuições arbitrárias e dependentes do tempo de carga e corrente.

(a) Para os campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, use o método da função degrau para derivar uma condição de contorno a partir da lei de Ampère–Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (52)$$

(b) Explique como adaptar o resultado para uma interface não plana.

- Apenas a componente **tangencial** de $\mathbf{B}$ é descontínua
- A descontinuidade é proporcional à corrente superficial
- Campo magnético “gira” ao redor da corrente (regra da mão direita)

Forma equivalente

$$\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (53)$$

Generalização

Para uma superfície arbitrária:

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_s) \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_0 \mathbf{K}(\mathbf{r}_s) \quad (54)$$

- $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal local
- A condição é válida ponto a ponto
- A curvatura da superfície não altera a estrutura da equação

2.4

Equações de Maxwell na Matéria

Eletrodinâmica Clássica

O problema físico: por que complicar Maxwell?

Situação inicial

Até agora, tratamos:

$$\rho, \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B}$$

como se tudo fosse **vácuo**.

O problema físico: por que complicar Maxwell?

Situação inicial

Até agora, tratamos:

$$\rho, \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B}$$

como se tudo fosse **vácuo**.

Mas na prática...

- Quase tudo ocorre em **materiais**
- A matéria responde aos campos:
 - desloca cargas
 - cria correntes internas

Problema

Como separar:

- o que é **fonte externa**
- do que é **resposta da matéria?**

A solução de Maxwell

Ideia genial

Separar as fontes em:

- **livres** (controladas externamente)
- **ligadas** (resposta da matéria)

A solução de Maxwell

Ideia genial

Separar as fontes em:

- **livres** (controladas externamente)
- **ligadas** (resposta da matéria)

Consequência

Precisamos de novos campos:

D, H

A solução de Maxwell

Ideia genial

Separar as fontes em:

- **livres** (controladas externamente)
- **ligadas** (resposta da matéria)

Consequência

Precisamos de novos campos:

$\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$

Mensagem física

$\mathbf{E}$, $\mathbf{B} \Rightarrow$ campos físicos

$\mathbf{D}$, $\mathbf{H} \Rightarrow$ organizam a matéria

O que a matéria faz?

Resposta microscópica

Quando aplicamos um campo:

- elétrons se deslocam
- dipolos se alinham
- correntes microscópicas aparecem

O que a matéria faz?

Resposta microscópica

Quando aplicamos um campo:

- elétrons se deslocam
- dipolos se alinham
- correntes microscópicas aparecem

Modelagem macroscópica

Introduzimos:

$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ (polarização)

$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ (magnetização)

Como isso vira carga e corrente?

Carga total

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (55)$$

Como isso vira carga e corrente?

Carga total

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (55)$$

Corrente total

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (56)$$

Como isso vira carga e corrente?

Carga total

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (55)$$

Corrente total

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (56)$$

Interpretação

- $-\nabla \cdot \mathbf{P}$: cargas ligadas
- $\nabla \times \mathbf{M}$: correntes internas
- $\partial_t \mathbf{P}$: deslocamento de cargas

Definição de **D** e **H**

Campos auxiliares

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (57)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (58)$$

Definição de **D** e **H**

Campos auxiliares

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (57)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (58)$$

Por quê?

Essas definições:

- absorvem a resposta da matéria
- deixam apenas fontes livres nas equações

Forma elegante

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (59)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (60)$$

Forma elegante

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (59)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (60)$$

O que mudou?

- Só aparecem fontes **livres**
- Toda a complexidade da matéria foi escondida em:

D, H

O que acontece na interface?

Situação física

Dois materiais diferentes em contato

O que acontece na interface?

Situação física

Dois materiais diferentes em contato

Pergunta

Como os campos mudam ao atravessar a interface?

Campos elétricos

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_f \quad (61)$$

Campos elétricos

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_f \quad (61)$$

Campos magnéticos

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}_f \quad (62)$$

Campos elétricos

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_f \quad (61)$$

Campos magnéticos

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}_f \quad (62)$$

Leitura física

- cargas livres quebram a componente normal de $\mathbf{D}$
- correntes livres quebram a componente tangencial de $\mathbf{H}$

Exemplo: capacitor com dielétrico

Situação

- placas com carga livre
- material polarizável no meio

Exemplo: capacitor com dielétrico

Situação

- placas com carga livre
- material polarizável no meio

O que acontece?

- **E** diminui dentro do material
- **P** aparece
- **D** continua ligado à carga livre

Exemplo: capacitor com dielétrico

Situação

- placas com carga livre
- material polarizável no meio

O que acontece?

- E diminui dentro do material
- P aparece
- D continua ligado à carga livre

Mensagem

D "vê" apenas as cargas livres

Como fechar o sistema?

Problema

Maxwell não diz como a matéria responde.

Como fechar o sistema?

Problema

Maxwell não diz como a matéria responde.

Solução

Relações constitutivas:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (63)$$

Como fechar o sistema?

Problema

Maxwell não diz como a matéria responde.

Solução

Relações constitutivas:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (63)$$

Importante

- válidas para materiais simples
- aproximação linear

O que você deve guardar

Ideia central do capítulo

- A matéria não cria novas leis
- Ela modifica como as fontes aparecem

O que você deve guardar

Ideia central do capítulo

- A matéria não cria novas leis
- Ela modifica como as fontes aparecem

Resumo mental

- **E, B**: campos físicos reais
- **D, H**: reorganizam o problema
- **P, M**: resposta da matéria

Exemplo aplicado: capacitor com dielétrico linear

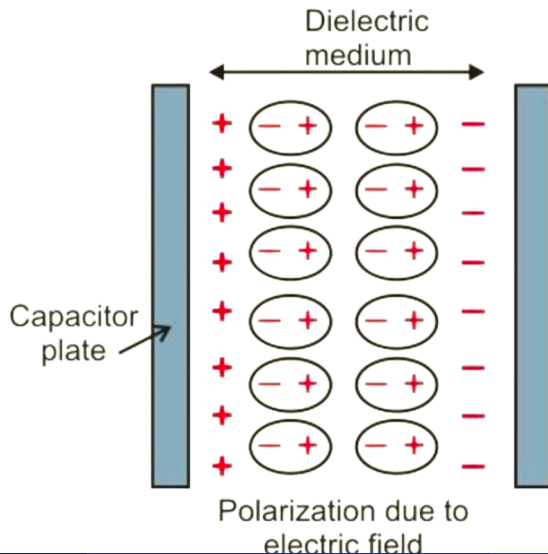
Situação física

Considere um capacitor de placas paralelas, totalmente preenchido por um dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, de permissividade

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) = \epsilon_r \epsilon_0.$$

As placas têm densidades superficiais de carga livre $+\sigma_f$ e $-\sigma_f$.

Capacitor com dielétrico



Susceptibilidade elétrica χ_e

O que ela representa

É uma medida de quanto o material se polariza quando submetido a um campo elétrico:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (64)$$

Interpretação física

- $\chi_e = 0$ → vácuo (não há resposta)
- $\chi_e > 0$ → material se polariza na direção do campo
- $\chi_e \gg 1$ → material muito polarizável

Relação importante

Ela está ligada à permissividade:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (65)$$

Passo 1: campo $\mathbf{D}$

Pela lei de Gauss na matéria,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \quad (66)$$

Para essa geometria,

$$\mathbf{D} = \sigma_f \hat{\mathbf{n}}, \quad (67)$$

apontando da placa positiva para a negativa.

Exemplo aplicado: obtendo **E**, **P** e cargas ligadas

Passo 2: campo elétrico

Como o meio é linear,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (68)$$

Logo,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\sigma_f}{\epsilon} \hat{\mathbf{n}}. \quad (69)$$

Exemplo aplicado: obtendo **E**, **P** e cargas ligadas

Passo 2: campo elétrico

Como o meio é linear,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (68)$$

Logo,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\sigma_f}{\epsilon} \hat{\mathbf{n}}. \quad (69)$$

Passo 3: polarização

Usando

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (70)$$

obtemos

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \frac{\sigma_f}{\epsilon} \hat{\mathbf{n}} = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \sigma_f \hat{\mathbf{n}}. \quad (71)$$

Cargas ligadas

No volume,

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (72)$$

(pois $\mathbf{P}$ é uniforme), enquanto nas superfícies do dielétrico:

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (73)$$

Resultado final

$$\mathbf{D} = \sigma_f \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma_f}{\epsilon} \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}. \quad (74)$$

Resultado final

$$\mathbf{D} = \sigma_f \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma_f}{\epsilon} \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}. \quad (74)$$

- $\mathbf{D}$ é determinado apenas pela **carga livre**.
- $\mathbf{E}$ fica **reduzido** pelo dielétrico.
- A matéria responde criando **cargas ligadas** nas superfícies.

Resultado final

$$\mathbf{D} = \sigma_f \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma_f}{\epsilon} \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}. \quad (74)$$

- $\mathbf{D}$ é determinado apenas pela **carga livre**.
- $\mathbf{E}$ fica **reduzido** pelo dielétrico.
- A matéria responde criando **cargas ligadas** nas superfícies.

Mensagem física

O formalismo de $\mathbf{D}$ e $\mathbf{P}$ separa claramente:

fonte externa vs resposta da matéria.

2.5.2 Polarização do Vácuo

Ideia surpreendente

Mesmo o **vácuo** pode se comportar como um meio material.

2.5.2 Polarização do Vácuo

Ideia surpreendente

Mesmo o **vácuo** pode se comportar como um meio material.

Por quê?

Na eletrodinâmica quântica (QED):

- o vácuo não é "vazio"
- existem flutuações quânticas
- pares elétron–pósitron aparecem virtualmente

Consequência

O vácuo pode:

- se polarizar
- modificar campos elétricos
- introduzir não linearidades em Maxwell

Em materiais

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

Analogia com dielétricos

Em materiais

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

No vácuo quântico

- o campo elétrico cria pares virtuais
- esses pares se alinham $\rightarrow$ polarização do vácuo

Analogia com dielétricos

Em materiais

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

No vácuo quântico

- o campo elétrico cria pares virtuais
- esses pares se alinham $\rightarrow$ polarização do vácuo

Interpretação

O vácuo funciona como um dielétrico extremamente fraco

Resultado da QED

O potencial de uma carga não é exatamente:

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Correção ao potencial de Coulomb

Resultado da QED

O potencial de uma carga não é exatamente:

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Correção (curtas distâncias)

$$\phi(r) \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{r}{\lambda_c} \right) \right] \quad (75)$$

Onde q é a carga elétrica, ϵ_0 é a permissividade do vácuo, α é a constante de estrutura fina, r é a distância ao ponto de carga, e λ_c é o comprimento de Compton da partícula.

Interpretação

- a carga "efetiva" depende da escala
- fenômeno de **renormalização**

Ideia profunda: carga depende da escala

O que está acontecendo?

- perto da carga $\rightarrow$ vácuo altamente polarizado
- longe $\rightarrow$ efeito diminui

Ideia profunda: carga depende da escala

O que está acontecendo?

- perto da carga $\rightarrow$ vácuo altamente polarizado
- longe $\rightarrow$ efeito diminui

Conclusão

$$q_{\text{efetiva}} = q(r)$$

Ideia profunda: carga depende da escala

O que está acontecendo?

- perto da carga $\rightarrow$ vácuo altamente polarizado
- longe $\rightarrow$ efeito diminui

Conclusão

$$q_{\text{efetiva}} = q(r)$$

Conexão moderna

Isso é a base de:

- teoria de renormalização
- grupo de renormalização
- física de partículas moderna

Quando o efeito fica importante?

Campo crítico de Schwinger

$$E_c \sim \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} \sim 10^{18} \text{ V/m} \quad (76)$$

Quando o efeito fica importante?

Campo crítico de Schwinger

$$E_c \sim \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} \sim 10^{18} \text{ V/m} \quad (76)$$

Campo magnético crítico

$$B_c \sim 10^9 \text{ T} \approx 10^{13} \text{ G} \quad (77)$$

Quando o efeito fica importante?

Campo crítico de Schwinger

$$E_c \sim \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} \sim 10^{18} \text{ V/m} \quad (76)$$

Campo magnético crítico

$$B_c \sim 10^9 \text{ T} \approx 10^{13} \text{ G} \quad (77)$$

Comparação

- Laboratório: até 10^6 V/m
- Estrelas de nêutrons: $10^9 - 10^{11} \text{ T} \approx 10^{13} - 10^{15} \text{ G}$

Exemplo astrofísico: magnetars

Magnetars

- estrelas de nêutrons altamente magnetizadas
- campos até:

$$B \sim 10^{11} \text{ T} = 10^{15} \text{ G}$$

Exemplo astrofísico: magnetars

Magnetars

- estrelas de nêutrons altamente magnetizadas
- campos até:

$$B \sim 10^{11} \text{ T} = 10^{15} \text{ G}$$

Consequência

- vácuo se torna **birrefringente**
- luz se propaga como em um cristal

Exemplo astrofísico: magnetars

Magnetars

- estrelas de nêutrons altamente magnetizadas
- campos até:

$$B \sim 10^{11} \text{ T} = 10^{15} \text{ G}$$

Consequência

- vácuo se torna **birrefringente**
- luz se propaga como em um cristal

Observação real

Polarização da luz observada em:

- RX J1856.5–3754 (ESO, 2017)

Resultado de QED

Campos fortes geram:

$$\mathbf{P} \sim (E^2 - c^2 B^2) \mathbf{E} \quad (78)$$

Resultado de QED

Campos fortes geram:

$$\mathbf{P} \sim (E^2 - c^2 B^2) \mathbf{E} \quad (78)$$

Consequência

- princípio da superposição quebra
- Maxwell deixa de ser linear

Resultado de QED

Campos fortes geram:

$$\mathbf{P} \sim (E^2 - c^2 B^2) \mathbf{E} \quad (78)$$

Consequência

- princípio da superposição quebra
- Maxwell deixa de ser linear

Nome

Eletrodinâmica de Euler–Heisenberg

Laboratórios modernos

- lasers ultra intensos (ELI, XFEL)
- colisões de fótons

Laboratórios modernos

- lasers ultra intensos (ELI, XFEL)
- colisões de fótons

O que se busca

- produção de pares
- espalhamento fóton–fóton
- birefringência do vácuo

Experimentos atuais

Laboratórios modernos

- lasers ultra intensos (ELI, XFEL)
- colisões de fótons

O que se busca

- produção de pares
- espalhamento fóton–fóton
- birefringência do vácuo

Paper recente

- ATLAS Collaboration (2017): evidência de light-by-light scattering

Mensagem principal

- o vácuo não é vazio
- ele responde a campos $\rightarrow$ polarização
- isso modifica a física clássica

Mensagem principal

- o vácuo não é vazio
- ele responde a campos $\rightarrow$ polarização
- isso modifica a física clássica

Conexões

- QED
- astrofísica relativística
- lasers ultra intensos

Exercício aplicado: capacitor com dielétrico

Situação física

Um capacitor de placas paralelas, com área

$$A = 2,0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

e separação

$$d = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m},$$

é totalmente preenchido por um dielétrico linear, homogêneo e isotrópico com susceptibilidade elétrica

$$\chi_e = 4.$$

As placas possuem cargas livres $\pm Q_f$, com

$$Q_f = 1,0 \times 10^{-8} \text{ C}.$$

Exercício aplicado: capacitor com dielétrico

Dados

Adote:

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m.}$$

Pede-se

Determinar:

- 1 a densidade de carga livre σ_f ;
- 2 o campo deslocamento $\mathbf{D}$;
- 3 o campo elétrico $\mathbf{E}$;
- 4 a polarização $\mathbf{P}$;
- 5 a densidade de carga ligada superficial σ_b ;
- 6 a diferença de potencial entre as placas.

Resolução: passo 1 — densidade de carga livre

A densidade de carga livre nas placas é

$$\sigma_f = \frac{Q_f}{A}. \quad (79)$$

Substituindo os valores:

$$\sigma_f = \frac{1,0 \times 10^{-8}}{2,0 \times 10^{-2}} = 5,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2. \quad (80)$$

Resultado

$$\sigma_f = 5,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \quad (81)$$

Resolução: passo 2 — campo **D**

Para um capacitor plano totalmente preenchido por dielétrico, vale

$$\mathbf{D} = \sigma_f \hat{\mathbf{n}}, \quad (82)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ aponta da placa positiva para a negativa.

Portanto,

$$\mathbf{D} = 5,0 \times 10^{-7} \hat{\mathbf{n}} \text{ C/m}^2. \quad (83)$$

Resultado

$$|\mathbf{D}| = 5,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \quad (84)$$

Interpretação

O campo **D** depende apenas da carga **livre**.

Resolução: passo 3 — campo elétrico **E**

Como o meio é linear,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (85)$$

com

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e). \quad (86)$$

Como $\chi_e = 4$,

$$\epsilon = 5\epsilon_0. \quad (87)$$

Logo,

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{5,0 \times 10^{-7}}{5 \times 8,85 \times 10^{-12}}. \quad (88)$$

$$E \approx 1,13 \times 10^4 \text{ V/m}. \quad (89)$$

Resolução: passo 4 — polarização **P**

A polarização vale

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}. \quad (91)$$

Substituindo:

$$P = (8,85 \times 10^{-12})(4)(1,13 \times 10^4). \quad (92)$$

$$P \approx 4,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2. \quad (93)$$

Resultado

$$\mathbf{P} \approx 4,0 \times 10^{-7} \hat{\mathbf{n}} \text{ C/m}^2 \quad (94)$$

Leitura física

O dielétrico se polariza na direção do campo, reduzindo o campo elétrico interno.

Resolução: passo 5 — carga ligada superficial

Como $\mathbf{P}$ é uniforme no interior, temos

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (95)$$

Mas surgem cargas ligadas nas superfícies do dielétrico, com densidade

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (96)$$

Assim, em módulo,

$$\sigma_b = P \approx 4,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2. \quad (97)$$

Resultado

$$|\sigma_b| \approx 4,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \quad (98)$$

Observação

As cargas ligadas têm sinais opostos nas duas faces do dielétrico.

Resolução: passo 6 — diferença de potencial

Para campo uniforme,

$$V = Ed. \quad (99)$$

Logo,

$$V = (1,13 \times 10^4)(1,0 \times 10^{-3}) \approx 11,3 \text{ V}. \quad (100)$$

Resultado

$$V \approx 11,3 \text{ V} \quad (101)$$

Resultados

$$\sigma_f = 5,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \quad (102)$$

$$D = 5,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \quad (103)$$

$$E \approx 1,13 \times 10^4 \text{ V/m} \quad (104)$$

$$P \approx 4,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \quad (105)$$

$$|\sigma_b| \approx 4,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \quad (106)$$

$$V \approx 11,3 \text{ V} \quad (107)$$

Mensagem física

- $\mathbf{D}$ é controlado pela carga livre
- o dielétrico cria polarização $\mathbf{P}$
- essa polarização reduz o campo $\mathbf{E}$
- surgem cargas ligadas nas superfícies do material