

Eletrodinâmica Clássica

Aula 1 — Preliminares Matemáticos (I.1–I.2)

Prof. Dr. Rafael C. R. de Lima

UDESC — CCT

1.1 Introdução

"The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious."

Eugene Wigner (1960)

Objetivo da disciplina

Construir as leis do eletromagnetismo de forma **matematicamente consistente**, dominando:

- notação vetorial e bases;
- operadores diferenciais em diferentes coordenadas;
- identidades (Kronecker/Levi-Civita) e convenções de soma;
- teoremas integrais (Gauss/Green/Stokes) e seu papel físico.

Parte A — Vetores e bases

- Vetor como objeto geométrico; componentes dependem da base;
- Base ortonormal, produto escalar, produto vetorial;
- Mudança de base e decomposição.

Parte B — Coordenadas e operadores

- Cartesiano, cilíndrico, esférico: transformações e elementos de volume;
- ∇ , $\nabla \cdot$, $\nabla \times$, ∇^2 (cartesiano) e forma em outros sistemas.

1.2 Vetores

O que é um vetor?

Definição operacional

Um **vetor** $\mathbf{V}$ é um objeto geométrico independente de coordenadas, que pode ser representado por componentes quando escolhemos uma base.

Mensagem-chave

O **vetor é o mesmo**, mas **seus componentes mudam** quando trocamos o sistema de coordenadas/base.

Exemplo: velocidade do ar em um ponto $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ é um vetor físico; (v_x, v_y, v_z) é apenas sua representação em uma base particular.

Exemplo de Bases

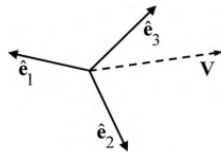
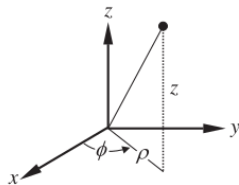
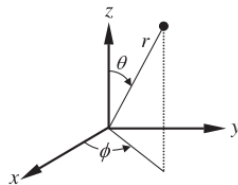


Figure 1.1: An orthonormal set of unit vectors $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$. $\mathbf{V}$ is an arbitrary vector.



(a) Cylindrical



(b) Spherical

Figure 1.2: Two curvilinear coordinate systems.

Base cartesiana ortonormal

Escolha uma base ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ (frequentemente $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$).

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 \quad (2)$$

Representação de $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = V_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + V_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + V_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (3)$$

Como obter as componentes: demonstração

Partimos de (??) e fazemos produto escalar com $\hat{\mathbf{e}}_k$:

$$\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{V} = \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \left(\sum_{i=1}^3 V_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) = \sum_{i=1}^3 V_i (\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) = \sum_{i=1}^3 V_i \delta_{ki} = V_k. \quad (4)$$

Logo,

$$V_k = \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{V}. \quad (5)$$

Interpretação

As componentes são **projeções** do vetor na base escolhida.

Mudança de base: ideia essencial

Considere duas bases ortonormais $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ e $\{\hat{\mathbf{e}}'_i\}$.

Escreva o mesmo vetor nas duas bases:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 V_i \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^3 V'_i \hat{\mathbf{e}}'_i. \quad (6)$$

Defina a matriz de mudança de base

$$R_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (7)$$

Então, projetando (??) em $\hat{\mathbf{e}}'_i$:

$$V'_i = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 V_j (\hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j) = \sum_{j=1}^3 R_{ij} V_j. \quad (8)$$

Resumo

Componentes transformam linearmente: $V'_i = R_{ij} V_j$.

Sistemas de coordenadas: por que aparecem?

Três sistemas centrais

- Cartesiano (x, y, z) : geometria “plana” local, operadores simples.
- Cilíndrico (ρ, ϕ, z) : simetria axial (fios, solenoides longos).
- Esférico (r, θ, ϕ) : simetria radial (carga puntiforme, ondas).

Cuidado

Operadores diferenciais mudam de forma porque os vetores unitários **dependem da posição** em coordenadas curvilíneas.

Cartesiano: posição e diferenciais

Vetor posição:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}. \quad (9)$$

Diferencial de deslocamento:

$$d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}. \quad (10)$$

Elemento de volume:

$$d^3r = dx\,dy\,dz. \quad (11)$$

Nota

Em cartesiano, os unitários são constantes: $\partial_x \hat{\mathbf{x}} = 0$ etc.

Gradiente em cartesiano (definição + interpretação)

Definição: para um escalar $\phi(\mathbf{r})$, o gradiente é o vetor que satisfaz

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}. \quad (12)$$

Em cartesiano, usando (??):

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz. \quad (13)$$

Comparando (??) e (??), obtemos:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \quad (14)$$

Interpretação

$\nabla\phi$ aponta na direção de maior crescimento de ϕ e tem módulo igual à taxa máxima de variação por comprimento.

Divergência e rotacional (cartesiano)

Para um campo vetorial $\mathbf{V} = V_x \hat{\mathbf{x}} + V_y \hat{\mathbf{y}} + V_z \hat{\mathbf{z}}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (15)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (16)$$

Laplaciano de escalar

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (17)$$

Transformações:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (18)$$

Unitários dependem de ϕ :

$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}, \quad \hat{z} = \hat{z}. \quad (19)$$

Consequência

Como $\hat{\rho}$ e $\hat{\phi}$ mudam com ϕ , derivadas exigem cuidado extra.

Notas: pág. 1

Observação

Veja que $\hat{\phi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$ e $\hat{\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}$.

Notas: pág. 2 e 3

Cilíndricas: elemento de linha e volume (demonstração curta)

Comece com (??) e diferencie:

$$dx = \cos \phi \, d\rho - \rho \sin \phi \, d\phi, \quad dy = \sin \phi \, d\rho + \rho \cos \phi \, d\phi, \quad dz = dz. \quad (20)$$

Então

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (21)$$

Logo,

$$d\mathbf{r} = \hat{\rho} \, d\rho + \hat{\phi} \, \rho d\phi + \hat{z} \, dz, \quad (22)$$

e o elemento de volume:

$$d^3r = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz. \quad (23)$$

Operadores em cilíndricas (forma final)

Para um escalar $\phi(\rho, \phi, z)$:

$$\nabla\phi = \hat{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}. \quad (24)$$

Para $\mathbf{V} = V_\rho\hat{\rho} + V_\phi\hat{\phi} + V_z\hat{z}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial\phi} \right] \hat{z}. \quad (26)$$

Notas: pág. 4

Coordenadas Esféricas: transformação e elemento de volume

Transformações:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (27)$$

Elemento de linha (resultado padrão):

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (28)$$

Elemento de volume:

$$d^3r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (29)$$

Uso típico

Simetria radial em problemas eletrostáticos e radiação.

Notas: pags 5,6,7 → vetores unitários

Para escalar $\phi(r, \theta, \phi)$:

$$\nabla\phi = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}. \quad (30)$$

Para $\mathbf{V} = V_r\hat{\mathbf{r}} + V_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + V_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}. \quad (31)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2}. \quad (32)$$

Convenção de soma de Einstein

Regra

Um índice repetido exatamente duas vezes em um termo implica soma automática:

$$A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^3 A_i B_i.$$

Exemplos:

$$\mathbf{V} = V_k \hat{\mathbf{e}}_k \quad (33)$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{F} = V_k F_k. \quad (34)$$

Cuidado

O **intervalo** do índice deve estar claro pelo contexto (tipicamente 1, 2, 3 em 3D cartesiano).

Índices Mudos

$$\vec{V} = V_k \hat{e}_k \quad (35)$$

O índice k é chamado de **índice mudo**.

Em qualquer equação, índices mudos podem ser trocados sem alterar o resultado:

$$V_k \hat{e}_k = V_j \hat{e}_j \quad (36)$$

Índices Livres

$$A_i = \sum_j R_{ij} B_j = R_{ij} B_j \quad (37)$$

Aqui i é chamado de **índice livre**.

Em coordenadas cartesianas,

$$i = x, y, z$$

Logo, a equação acima representa na verdade 3 equações, para A_x , A_y e A_z .

Atenção

Em geral, **não se pode trocar índices livres**.

Símbolos fundamentais

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (38)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (ijk) \text{ par de } (123), \\ -1, & (ijk) \text{ ímpar de } (123), \\ 0, & \text{se algum índice repete.} \end{cases} \quad (39)$$

Leitura geométrica

δ_{ij} “seleciona” componentes; ε_{ijk} codifica orientação e produtos vetoriais.

Produto vetorial via Levi-Civita (demonstração)

Defina o produto vetorial componente a componente:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (40)$$

Verificação rápida para $i = 1$:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 = \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2, \quad (41)$$

Identidade-chave: contração de Levi-Civita

Identidade padrão:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \quad (42)$$

Uso imediato: simplificar expressões com duplo produto vetorial e provar identidades.

Por que isso aparece em EM?

Porque $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$, tensores e ondas eletromagnéticas ficam naturais nesse formalismo.

Notas: exemplo em pag 8.

Exemplo: prova de $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{g}) = 0$

Escreva o rotacional em componentes:

$$(\nabla \times \mathbf{g})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j g_k. \quad (43)$$

Então a divergência:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{g}) = \partial_i (\nabla \times \mathbf{g})_i = \partial_i (\varepsilon_{ijk} \partial_j g_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j g_k. \quad (44)$$

Como $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ (derivadas parciais comutam para campos suaves), o termo $\partial_i \partial_j g_k$ é simétrico em (i, j) , enquanto ε_{ijk} é antissimétrico em (i, j) . Logo, a contração é zero:

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j g_k = 0. \quad (45)$$

Definições

Tensor simétrico:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (46)$$

Tensor antissimétrico:

$$A_{ij} = -A_{ji} \quad (47)$$

Contração

$$S_{ij}A_{ij} \quad (48)$$

Trocando os índices mudos $i \leftrightarrow j$:

$$S_{ij}A_{ij} = S_{ji}A_{ji} \quad (49)$$

Usando as propriedades de simetria:

$$S_{ji}A_{ji} = S_{ij}(-A_{ij}) = -S_{ij}A_{ij} \quad (50)$$

Logo,

$$S_{ij}A_{ij} = -S_{ij}A_{ij} \quad (51)$$

Resultado

$$S_{ij}A_{ij} = 0 \quad (52)$$

Sempre que a contração ocorre nos índices onde os tensores são simétrico e antissimétrico.

Prove as identidades vetoriais abaixo

Mostre, usando notação indicial (Kronecker/Levi-Civita) ou regras do operador ∇ , que as identidades a seguir são válidas (assuma campos suficientemente suaves):

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi \nabla\psi, \quad (5)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}), \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{F}), \quad (7)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{F} + \varphi (\nabla \times \mathbf{F}), \quad (9)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}. \quad (10)$$

Identidade vetorial: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

Queremos provar:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (53)$$

Em componentes:

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \varepsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{kmn} b_m c_n. \quad (54)$$

Use (??):

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}. \quad (55)$$

Substituindo em (??):

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) a_j b_m c_n = b_i (a_j c_j) - c_i (a_j b_j), \quad (56)$$

ou seja,

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = b_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (57)$$

Isso implica (??).

1.3 Derivadas

1.3 Derivadas — Funções de r e $|r|$

Definições

O vetor posição é

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Se $f(r)$ é uma função escalar, definimos $f'(r) = df/dr$.

Identidades básicas

$$\nabla r = \hat{\mathbf{r}}, \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0, \quad (1.58)$$

$$\nabla f = f'(r) \hat{\mathbf{r}}, \quad \nabla^2 f = \frac{(r^2 f')'}{r^2}. \quad (1.59)$$

Notas: pag 13, 14

1.3 Derivadas — Divergência e rotacional

Campo do tipo $f(r)\mathbf{r}$

$$\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) = \frac{(r^3 f)'}{r^2}, \quad \nabla \times (f(r)\mathbf{r}) = 0. \quad (1.60)$$

Campo vetorial $\mathbf{g}(r)$

Se $\mathbf{g}(r)$ é um campo vetorial e $\mathbf{c}$ um vetor constante:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \mathbf{g}' \cdot \hat{\mathbf{r}}, \quad \nabla \times \mathbf{g} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{g}'. \quad (1.61)$$

$$(\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{g}, \quad (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{g} = r \mathbf{g}'. \quad (1.62)$$

1.3 Derivadas — Produtos vetoriais

Produto escalar e vetorial

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{g} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}')\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{g} \times \mathbf{r}) = 0. \quad (1.63)$$

Identidades finais

$$\nabla \times (\mathbf{g} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{g} + r\mathbf{g}' - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}')\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c}. \quad (1.64)$$

Observação

Essas identidades são especialmente úteis em problemas com **simetria esférica**, comuns em eletrostática e gravitação.

1.3.2 Funções de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

Definição

Defina o vetor deslocamento

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}, \quad R = |\mathbf{R}|.$$

Se $f(R)$ é uma função escalar e $\mathbf{g}(R)$ um campo vetorial, com derivada $f'(R) = df/dR$.

Identidades fundamentais

$$\nabla f(R) = f'(R) \hat{\mathbf{R}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{g}(R) = \mathbf{g}'(R) \cdot \hat{\mathbf{R}}, \quad \nabla \times \mathbf{g}(R) = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{g}'(R). \quad (1.65)$$

Notas: pag 16

1.3.2 Derivadas em $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$

Operadores diferenciais

Os operadores gradiente com respeito a $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ são

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla' = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z'}. \quad (1.66)$$

Relação chave

Como $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, segue diretamente que

$$\nabla' f(R) = -\nabla f(R). \quad (1.67)$$

Importância física

Essas relações são essenciais na formulação de **potenciais**, funções de Green e campos gerados por distribuições contínuas de carga.

1.3.3 A Derivada Convectiva

Ideia física

Se $\phi(\mathbf{r}, t)$ é uma função escalar do espaço e do tempo:

- um observador fixo em $\mathbf{r}$ mede a taxa de variação $\partial\phi/\partial t$;
- um observador que se move ao longo de uma trajetória $\mathbf{r}(t)$, com velocidade $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$, mede uma taxa de variação diferente.

Definição

A taxa de variação de ϕ ao longo da trajetória é a **derivada convectiva**:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi. \quad (1.68)$$

Campo vetorial

Para um campo vetorial $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$, a derivada convectiva é

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{g}. \quad (1.69)$$

Contexto

Essa derivada é central em hidrodinâmica, MHD e na descrição do movimento de cargas em campos eletromagnéticos.

1.3.4 Teorema de Taylor — uma dimensão

Forma padrão

O teorema de Taylor em uma dimensão é

$$f(x) = f(a) + (x - a) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} + \frac{1}{2!} (x - a)^2 \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=a} + \cdots . \quad (1.70)$$

Forma deslocada

Fazendo $x \rightarrow x + \epsilon$ e $a \rightarrow x$, obtemos

$$f(x + \epsilon) = f(x) + \epsilon \frac{df}{dx} + \frac{1}{2!} \epsilon^2 \frac{d^2f}{dx^2} + \cdots . \quad (1.71)$$

Notas: pag 20-21

1.3.4 Teorema de Taylor — operador exponencial

Forma operacional

A expansão de Taylor pode ser escrita de forma compacta como

$$f(x + \epsilon) = \left[1 + \epsilon \frac{d}{dx} + \frac{1}{2!} \left(\epsilon \frac{d}{dx} \right)^2 + \cdots \right] f(x) = \exp \left(\epsilon \frac{d}{dx} \right) f(x). \quad (1.72)$$

Interpretação

O operador $\exp(\epsilon \frac{d}{dx})$ atua como um **operador de translação** ao longo do eixo x .

1.3.4 Teorema de Taylor — várias variáveis

Generalização para três variáveis

Para $f(x, y, z)$:

$$f(x + \epsilon_x, y + \epsilon_y, z + \epsilon_z) = \exp\left(\epsilon_x \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(\epsilon_y \frac{\partial}{\partial y}\right) \exp\left(\epsilon_z \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z). \quad (1.73)$$

Forma vetorial

Definindo $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$:

$$f(\mathbf{r} + \epsilon) = \exp(\epsilon \cdot \nabla) f(\mathbf{r}) = \left[1 + \epsilon \cdot \nabla + \frac{1}{2!} (\epsilon \cdot \nabla)^2 + \dots \right] f(\mathbf{r}). \quad (1.74)$$

Importância em EM

Essa forma é essencial na derivação de expansões multipolares, potenciais e funções de Green.

1.4 Integrais

1.4 Integrais — 1.4.1 Determinante Jacobiano

Ideia central

O determinante da matriz Jacobiana relaciona **elementos de volume** quando realizamos uma mudança de variáveis em uma integral.

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores em $\mathbb{R}^N$, associados a dois sistemas de coordenadas diferentes, os elementos de volume satisfazem

$$d^N x = |\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| d^N y, \quad (1.75)$$

onde $\mathbf{J}$ é a matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1} & \frac{\partial x_N}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{vmatrix}.$$

Notas: Exemplo polar pag 24

1.4.1 Exemplo — cartesiano $\rightarrow$ esférico

Transformação

Considere a mudança de variáveis

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

O determinante Jacobiano é

$$|\mathbf{J}| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = r^2 \sin \theta. \quad (58)$$

Elemento de volume

Portanto, o elemento de volume transforma-se como

$$d^3x = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi. \quad (59)$$

Importância em EM

Jacobianos aparecem sistematicamente em integrais de carga, fluxos e na aplicação dos teoremas de Gauss e Stokes.

1.4.2 O Teorema da Divergência

Enunciado

Seja $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ um campo vetorial definido em um volume V , limitado por uma superfície fechada S com normal externa $\hat{\mathbf{n}}$. Se $d\mathbf{S} = dS \hat{\mathbf{n}}$, então:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_S dS \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.76)$$

Leitura física

O fluxo total de $\mathbf{F}$ que sai de V é igual à soma das fontes (contidas no volume).

Consequência I — identidade escalar

Escolha especial do campo

Seja $\mathbf{c}$ um vetor constante arbitrário e escolha

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{c} \psi(\mathbf{r}).$$

Substituindo em (??) e usando $\nabla \cdot (\mathbf{c} \psi) = \mathbf{c} \cdot \nabla \psi$, obtemos:

$$\int_V d^3r \nabla \psi = \int_S dS \psi \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.77)$$

Interpretação

O gradiente integrado no volume é determinado apenas pelos valores de ψ na fronteira.

Notas: pag 26

Consequência II — identidade vetorial

Nova escolha do campo

Escolha agora

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{c},$$

onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante.

Usando $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ e aplicando (??), resulta:

$$\int_V d^3r \nabla \times \mathbf{A} = \int_S dS \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}. \quad (1.78)$$

Importância

Esta identidade é fundamental para:

- condições de contorno em eletromagnetismo;
- formulações integrais das equações de Maxwell.

Notas: pag 27

1.4.3 Identidades de Green — motivação

Ideia central

As identidades de Green são consequências diretas do [Teorema da Divergência](#) e conectam:

- operadores diferenciais no volume;
- valores dos campos na superfície.

Por que são importantes?

Elas são a base matemática de:

- problemas de valor de contorno;
- funções de Green;
- unicidade de soluções em eletrostática.

Primeira identidade de Green

Escolha do campo

Escolha no Teorema da Divergência:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}).$$

Aplicando (??), obtemos a **Primeira Identidade de Green**:

$$\int_V d^3r [\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi] = \int_S dS \phi \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.79)$$

Leitura

Derivadas de ψ no volume $\leftrightarrow$ fluxo ponderado por ϕ na fronteira.

Notas: pag 29

Segunda identidade de Green

Construção

Troque $\phi \leftrightarrow \psi$ em (??) e subtraia as duas expressões. Obtemos a **Segunda Identidade Green**

$$\int_V d^3r [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] = \int_S dS [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi] \cdot \hat{n}. \quad (1.80)$$

Mensagem-chave

Esta identidade elimina os termos de gradiente cruzados $\nabla \phi \cdot \nabla \psi$, restando apenas os Laplacianos $\nabla^2 \psi$ e $\nabla^2 \phi$.

Por que o Laplaciano é tão importante?

Ideia central

Na física de campos, o **Laplaciano de um potencial** está diretamente ligado à **densidade de fontes**. Em eletrostática, por exemplo:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (60)$$

Por que isso é tão poderoso?

A segunda identidade de Green

$$\int_V d^3r (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \int_S dS (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \hat{n} \quad (61)$$

permite **trocar informação de volume** (*fontes*) por **informação de superfície** (*contorno*).

Mensagem física

- Os termos com $\nabla^2\phi$ e $\nabla^2\psi$ têm **significado físico direto**: eles representam as **fontes do campo**.
- Já os termos de gradiente cruzado, como $\nabla\phi \cdot \nabla\psi$, são matematicamente úteis, mas menos transparentes fisicamente.
- A identidade de Green reorganiza a expressão de modo a destacar justamente **o papel das fontes e das condições de contorno**.

Identidade de Green — versão vetorial (I)

Escolha vetorial

Escolha agora

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{Q})$$

e use a identidade $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.

Notas: pag 31

$$\int d^3r \left[\nabla \times \mathbf{P} \cdot \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} \right] = \int_S dS \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}). \quad (1.81)$$

Identidade de Green — versão vetorial (II)

Segunda identidade vetorial

Troque $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ em (??) e subtraia as duas expressões.

$$\int_V d^3r \left[\mathbf{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} \right] = \int_S dS \hat{n} \cdot [\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}]. \quad (1.82)$$

Interpretação

Versão vetorial da segunda identidade de Green.

Tipo de problema (não vamos resolver ainda)

O potencial eletrostático ϕ satisfaz:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}.$$

Queremos determinar ϕ dentro de um volume V a partir da carga e das condições de contorno.

Escolha na segunda identidade de Green:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \nabla^2 \psi = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Resulta a representação integral:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + (\text{termos de contorno}). \quad (62)$$

Conclusão

As identidades de Green conectam equações diferenciais locais a soluções integrais globais — exatamente o que precisamos em eletrodinâmica.

1.4.4 O Teorema de Stokes — enunciado

Situação geométrica

Seja $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ um campo vetorial definido sobre uma superfície aberta S , limitada por uma curva fechada C .

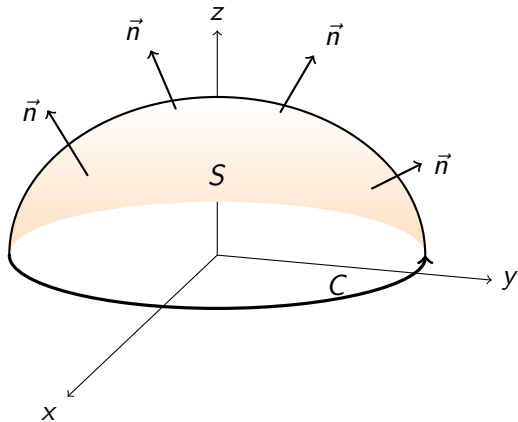
Se $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$ é o elemento de área orientado e $d\boldsymbol{\ell}$ é o elemento de linha ao longo de C , então o Teorema de Stokes afirma:

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \oint_C d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{F}. \quad (1.83)$$

Leitura física

A circulação de $\mathbf{F}$ ao longo da borda é determinada pelo rotacional de $\mathbf{F}$ no interior da superfície.

Notas: pag 33



Orientação e regra da mão direita

Orientação consistente

A curva C deve ser percorrida no sentido determinado pela **regra da mão direita**:

- o polegar aponta na direção de $d\mathbf{S}$;
- os dedos indicam o sentido positivo de integração em C .

Cuidado conceitual

Trocar a orientação de S inverte o sinal da integral de linha.

Analogia

Stokes é a versão bidimensional do Teorema da Divergência.

Consequência I — campo do tipo gradiente

Escolha especial do campo

Escolha

$$\mathbf{F} = \nabla\psi.$$

Como $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$, o Teorema de Stokes implica:

$$\oint_C d\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla\psi = 0. \quad (1.84)$$

Interpretação

Campos gradientes são **irrotacionais**: a circulação ao longo de qualquer curva fechada é nula.

Interpretação física

- O trabalho ao longo de qualquer curva fechada é zero
- O trabalho entre dois pontos **não depende do caminho**

Definição de campo conservativo

- Um campo é conservativo se:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (63)$$

- Ou seja, podemos escrevê-lo como o gradiente de um potencial escalar:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (64)$$

Conexão com conservação

- Existe uma energia potencial U tal que:

$$W_{A \rightarrow B} = U(A) - U(B) \quad (65)$$

- A energia mecânica se conserva
- Não há “perda” ao dar uma volta completa

Resumo conceitual

$$\mathbf{F} = \nabla\psi \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \text{campo conservativo} \quad (66)$$

Intuição

- Campo com rotação (redemoinho): **não conservativo**
- Campo gradiente (descida de montanha): **conservativo**

Consequência II — escolha vetorial

Nova escolha

Escolha

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \times \mathbf{c},$$

onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante.

Usando identidades vetoriais e aplicando (??), obtemos:

$$\oint_C d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{A} = \int_S dS_k \nabla A_k - \int_S d\mathbf{S} (\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (1.85)$$

Uso

Esta forma aparece em manipulações integrais de campos vetoriais em eletrodinâmica.

Notas: pag 36

Contexto físico

Na eletrodinâmica clássica, a Lei de Faraday na forma diferencial é:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Aplicando o Teorema de Stokes (??):

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (67)$$

Conclusão

O Teorema de Stokes conecta:

- o **rotacional local** do campo elétrico
- à **força eletromotriz** induzida ao longo de um circuito.

Sem Stokes, a passagem entre as formas integral e diferencial das equações de Maxwell não seria possível.

1.4.5 Derivada temporal de integrais de Superfície — Regra de Leibniz

Integral unidimensional com limites móveis

Se $b(x, t)$ é uma função suave e os limites dependem do tempo, a regra de Leibniz afirma:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} dx \, b(x, t) = b(x_2, t) \frac{dx_2}{dt} - b(x_1, t) \frac{dx_1}{dt} + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} dx \, \frac{\partial b}{\partial t}. \quad (1.86)$$

Ideia-chave

A variação temporal vem de:

- mudanças do integrando;
- movimento das fronteiras.

Notas: pag 38-40

Generalização para superfícies móveis

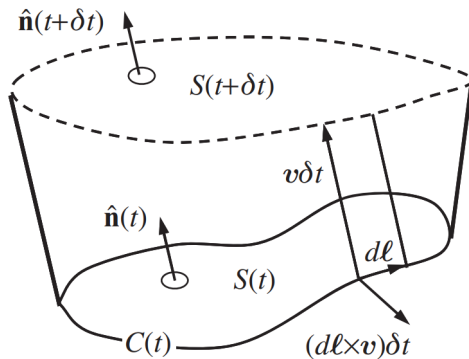


Figure: Figure 1.3: A surface $S(t)$ [bounded by the solid curve labeled $C(t)$] changes to the surface $S(t + \delta t)$ (dashed curve) because each element of surface moves by an amount $\mathbf{v} \delta t$.

Generalização para superfícies móveis

Contexto físico

Em eletrodinâmica, integramos campos sobre **superfícies que se movem no espaço**.

Considere uma superfície $S(t)$ cujos elementos de área movem-se com velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. O resultado geral para o fluxo magnético é:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \int_{S(t)} d\mathbf{S} \cdot \left[\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (1.87)$$

Importância

Esta expressão é essencial para a formulação correta da Lei de Faraday.

Variação infinitesimal do fluxo

Começamos avaliando a variação:

$$\delta \left[\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right] = \int \delta \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int \mathbf{B} \cdot \delta(\hat{\mathbf{n}} dS). \quad (1.88)$$

- primeiro termo: variação temporal do campo $\mathbf{B}$;
- segundo termo: deformação e movimento da superfície.

Dividindo (??) por δt , obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\delta t} \int \mathbf{B} \cdot \delta(\hat{\mathbf{n}} dS). \quad (1.89)$$

Observação

O primeiro termo já aparece explicitamente em (??); o foco passa a ser o segundo.

Volume infinitesimal

Considere o volume V limitado por:

- a superfície $S(t)$;
- a superfície $S(t + \delta t)$;
- a superfície lateral em forma de fita.

Aplicando o Teorema da Divergência:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{B} = \int_{S(t+\delta t)} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_{C(t)} \mathbf{B} \cdot (d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{v} \delta t). \quad (1.90)$$

Sinal

O sinal negativo decorre da normal externa ao volume V .

Redução do termo geométrico

Usando:

$$d^3r = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, \delta t \, dS, \quad \mathbf{B} \cdot (d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{v}) = d\boldsymbol{\ell} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

a Eq. (??) leva a:

$$\delta t \int_{S(t)} d\mathbf{S} \, \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot \delta(\hat{\mathbf{n}} dS) + \delta t \oint_{C(t)} d\boldsymbol{\ell} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.91)$$

Notas: pag 43

Uso do Teorema de Stokes e resultado final

Aplicando o Teorema de Stokes à integral de linha em (??):

$$\int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot \delta(\hat{\mathbf{n}} dS) = \delta t \int_{S(t)} dS \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \delta t \int_{S(t)} dS \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.92)$$

Substituindo (??) em (??), recuperamos exatamente a Eq. (??).

Mensagem final

A derivada temporal do fluxo combina:

- variação explícita do campo;
- movimento e deformação da superfície;
- topologia da borda (via Stokes).

1.5 Funções Generalizadas

1.5.1 The Delta Function in One Dimension

Definição (ação de filtragem)

A função delta unidimensional $\delta(x)$ é definida pela sua ação sobre uma função teste suave $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x') = f(x'). \quad (1.93)$$

Definição informal equivalente

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1. \quad (1.94)$$

Observação dimensional

Se x tem dimensão de comprimento, então $\delta(x)$ tem dimensão de inverso de comprimento.

Delta como limite de seqüências

A função delta pode ser entendida como o limite de funções cada vez mais concentradas em $x = 0$:

$$\delta(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin(mx)}{\pi x}, \quad (1.95)$$

$$\delta(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2 x^2}, \quad (1.96)$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon/\pi}{x^2 + \epsilon^2}. \quad (1.97)$$

Ideia-chave

Todas essas seqüências satisfazem a propriedade de filtragem (1.93).

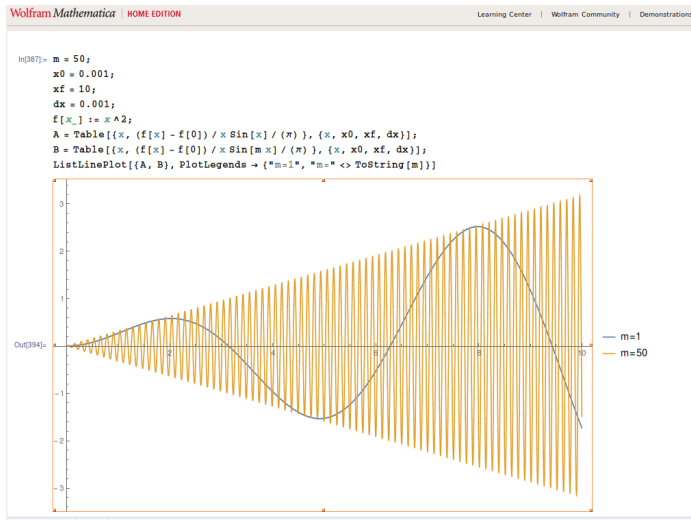
Pode-se provar o exemplo (1.95) pelo uso da propriedade de filtragem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) = f(0). \quad (68)$$

Substituindo (1.95) na equação acima, temos que provar que é verdade que:

$$\delta(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{\sin(mx)}{\pi x} = f(0) \quad (69)$$

O Plot mostra o que acontece com o integrando de (67) nos limites $m \rightarrow 0$ e $m \rightarrow \infty$



1.5.2 O Valor Principal

O valor principal de Cauchy é uma função generalizada definida por sua ação sob uma integral com uma função arbitrária $f(x)$:

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \right] \quad (1.104)$$

Interpretação

Remove-se um intervalo **simétrico** ao redor da singularidade.

Exemplo

A integral comum diverge:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

Mas o valor principal é:

$$\mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \right)$$

Resultado

As divergências se cancelam e o valor é zero.

Notas: pag 48

Convergência como Distribuição

Existem funções que não convergem ponto a ponto, mas convergem dentro de uma integral.

Exemplo:

$$\delta_m(x) = \frac{\sin(mx)}{\pi x}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \delta_m(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

Conclusão

Não convergem como função, mas convergem como distribuição.

Notas: pag 49

Quando $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon}$$

- Não converge como função
- Converte como distribuição

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) \quad (1.105)$$

Demonstração: Identidade Algébrica

Partimos da identidade:

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \quad (1.106)$$

Separando:

- Parte real

- Parte imaginária

Notas: pag 51

Usamos:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2}$$

Logo:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f(x) \frac{\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} dx = \pi f(x_0)$$

Resultado

Parte imaginária $\rightarrow \mp i\pi f(x_0)$

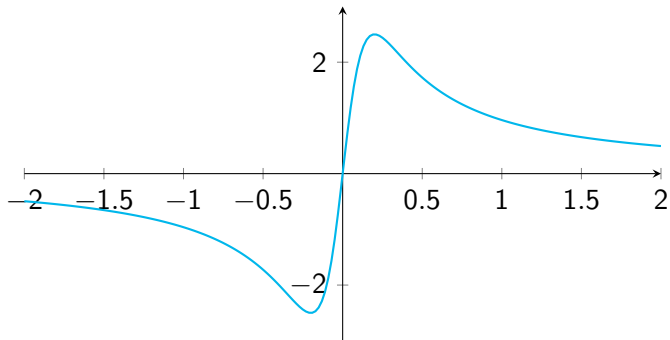
Observe:

$$\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} = \frac{1}{x - x_0} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2}$$

Quando $|x - x_0| \gg \epsilon$, o fator tende a 1.

Perto de $x = x_0$, a função é ímpar e sua integral se cancela.

Gráfico da Parte Real



Função ímpar $\Rightarrow$ cancelamento simétrico.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} dx = \mathcal{P} \int \frac{f(x)}{x - x_0} dx \mp i\pi f(x_0)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi \delta(x - x_0) \quad (1.105)$$

Identidade Fundamental

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0). \quad (1.105)$$

Interpretação

A igualdade é simbólica: ganha significado quando multiplicamos por uma função teste $f(x)$ e integramos sobre x .

A identidade algébrica é:

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2}. \quad (1.106)$$

Interpretação Física

- A parte real gera o valor principal (corte simétrico da singularidade).
- A parte imaginária gera a função delta, via limite da forma Lorentziana (Eq. 1.97).

A Fórmula

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0).$$

Filosofia

- Singularidades reais são regularizadas deslocando o polo para o plano complexo.
- O deslocamento $\pm i\epsilon$ codifica informação causal.
- No limite, a parte real produz o **valor principal** (simetria).
- A parte imaginária produz a **delta** (contribuição localizada).
- A identidade é válida no sentido de distribuições.

Principais Aplicações

- Transformadas de Fourier com polos reais.
- Relações de dispersão (Kramers–Kronig).
- Funções de Green e propagadores (prescrição causal).
- Teoria quântica de campos (prescrição de Feynman).
- Óptica e resposta linear (parte real vs parte imaginária).

Ideia Central

A fórmula separa uma singularidade em duas contribuições: uma distribuída (valor principal) e outra localizada (delta).

1.5.3 A Função Degrau

A função degrau de Heaviside $\Theta(x)$ é definida por

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (1.107)$$

A função delta é a derivada da função theta:

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x). \quad (1.108)$$

$\delta(x)$ mede a descontinuidade de $\Theta(x)$.

Uma representação útil é

$$\Theta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k + i\epsilon} e^{-ikx}. \quad (1.109)$$

- A prescrição $+i\epsilon$ impõe causalidade.
- A descontinuidade em $x = 0$ surge da estrutura de polos.

Notas: pag. 58

636

A Função Sinal

A função sinal $\text{sgn}(x)$ é definida por

$$\text{sgn}(x) = \frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (1.110)$$

Uma representação conveniente é

$$\text{sgn}(x) = -1 + 2 \int_{-\infty}^x \delta(y) dy. \quad (1.111)$$

$\text{sgn}(x)$ é a integral da função delta.

1.5.4 A Função Delta em Três Dimensões

Definição via função teste:

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} f(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in V, \\ 0, & \mathbf{r}' \notin V. \end{cases} \quad (1.112)$$

Definição menos formal:

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \neq 0), \quad \int_V d^3r \delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} = 0 \in V, \\ 0, & \mathbf{r} = 0 \notin V. \end{cases} \quad (1.113)$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (1.114)$$

Em coordenadas cilíndricas e esféricas:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(\rho - \rho')\delta(\phi - \phi')\delta(z - z')}{\rho} = \frac{\delta(r - r')\delta(\theta - \theta')\delta(\phi - \phi')}{r^2 \sin \theta}. \quad (1.115)$$

Para $\mathbf{r}' = 0$, definimos a delta radial:

$$\int_0^\infty dr \delta(r) = 1. \quad (1.116)$$

A delta tridimensional tem dimensão de inverso de volume.

Se x_0 e y_0 representam o mesmo ponto:

$$\int d^N x \delta(x - x_0) = \int d^N y \delta(y - y_0) \quad (1.117)$$

Usando o Jacobiano:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{|J(x, y)|} \delta(y - y_0). \quad (1.118)$$

1.5.5 Identidades Úteis

Representação de Fourier:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}.$$
(1.119)

Integração sobre superfície:

$$\int d^3r f(r) \delta[g(r)] = \int_S dS \frac{f(r_S)}{|\nabla g(r_S)|}.$$
(1.120)

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.121)$$

Segunda derivada:

$$\frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_m} \frac{1}{r} = \frac{3r_k r_m - r^2 \delta_{km}}{r^5} - \frac{4\pi}{3} \delta_{km} \delta(\mathbf{r}). \quad (1.122)$$

Exemplo 1.5: Prova via Teorema da Divergência

Para $r \neq 0$:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0.$$

Integrando sobre uma pequena esfera:

$$\int_V d^3r \nabla^2 \frac{1}{r} = \int_S dS \left(-\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = -4\pi.$$

Logo,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

1.6 Análise de Fourier

1.6 Análise de Fourier — Série de Fourier

Toda função periódica $f(x + L) = f(x)$ possui representação em série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m e^{i2\pi m x/L}. \quad (1.123)$$

Os coeficientes são dados por

$$\hat{f}_m = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) e^{-i2\pi m x/L}. \quad (1.124)$$

Para funções não periódicas, a soma torna-se uma integral:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx}. \quad (1.125)$$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (1.126)$$

Se $f(x)$ é real, então:

$$f(x) = f^*(x) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(k) = \hat{f}^*(-k). \quad (1.127)$$

A transformada de uma função real possui simetria hermitiana.

No domínio temporal, convencionou-se escrever:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{g}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (70)$$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) e^{i\omega t}. \quad (1.128)$$

Para uma função $f(\mathbf{r}, t)$:

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\mathbf{k}|\omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \quad (1.129)$$

$$\hat{f}(\mathbf{k}|\omega) = \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.130)$$

Convenção simétrica: todos os fatores (2π) aparecem na transformada inversa.

1.6.1 Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt g_1^*(t) g_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{g}_1^*(\omega) \hat{g}_2(\omega). \quad (1.131)$$

O teorema de Parseval afirma que o produto interno de duas funções é preservado na transformada de Fourier.

A prova segue substituindo a transformada inversa

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{g}(\omega) e^{-i\omega t}$$

na equação de Parseval e utilizando a representação integral da função delta.

A ortogonalidade das exponenciais complexas gera a função delta.

1.6.2 Teorema da Convolução

Define-se a convolução de $f(t)$ e $g(t)$ como

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t - t')g(t'). \quad (1.132)$$

A convolução mede como uma função “filtra” ou “suaviza” outra.

Teorema da Convolução

O teorema afirma que

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \quad (1.133)$$

Convolução no domínio do tempo corresponde a multiplicação no domínio de frequências.

Substituimos as transformadas inversas:

$$h(t) = \int dt' \left[\frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{f}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int d\omega' \hat{g}(\omega') e^{-i\omega' t'} \right]. \quad (1.134)$$

Reorganizando as integrais:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \hat{f}(\omega) \int d\omega' \hat{g}(\omega') \left[\frac{1}{2\pi} \int dt' e^{-i(\omega' - \omega)t'} \right]. \quad (1.135)$$

A integral em colchetes produz a delta de Dirac:

$$\delta(\omega - \omega').$$

Portanto

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \quad (1.136)$$

Comparando com a transformada inversa, obtemos

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).$$

Para que serve a convolução?

A convolução aparece quando um sistema responde a estímulos ao longo do tempo ou do espaço.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t')g(t') dt' \quad (71)$$

A convolução soma todas as contribuições do passado para determinar o valor atual.

Cada valor de $g(t')$ produz uma resposta $f(t - t')$.
O resultado final é a soma de todas essas respostas.

Ideia central

resultado = soma das respostas a todos os estímulos

Se um sistema é

- linear
- invariante no tempo

então sua saída é

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t')x(t')dt'$$

onde

- $x(t)$ é a entrada
- $h(t)$ é a resposta ao impulso
- $y(t)$ é a saída

Exemplo Físico: Ondas na Água

Imagine jogar pedras em um lago.

Cada pedra produz uma onda $f(t)$.

Se várias pedras são jogadas em tempos diferentes $g(t)$:

$$\text{altura da água} = f * g$$

As ondas simplesmente se somam.

Por que Fourier gosta de convolução?

No domínio do tempo:

$$h(t) = f(t) * g(t)$$

No domínio de frequências:

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

A convolução vira multiplicação após a transformada de Fourier.

Eletrostática

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

Equações diferenciais

$$\text{solução} = G * \text{fonte}$$

onde G é a função de Green.

Sempre que aparecer uma integral do tipo

$$\int f(x - x')g(x')dx'$$

pense:

efeito acumulado de contribuições deslocadas

A convolução descreve como um sistema **propaga ou espalha informação**.

1.6.3 Teorema da Média Temporal

Considere

$$A(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

$$B(\mathbf{r}, t) = b(\mathbf{r})e^{-i\omega t}.$$

Então

$$\langle \text{Re}[A]\text{Re}[B] \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \text{Re}[A]\text{Re}[B] = \frac{1}{2} \text{Re}[ab^*]. \quad (1.137)$$

Escrevendo

$$\operatorname{Re}[A] = \frac{1}{2}(A + A^*)$$

$$\operatorname{Re}[B] = \frac{1}{2}(B + B^*)$$

obtemos

$$\langle \operatorname{Re}[A] \operatorname{Re}[B] \rangle = \frac{1}{4T} \int_0^T dt \{ a b e^{-2i\omega t} + a^* b^* e^{2i\omega t} + a b^* + b a^* \}. \quad (1.138)$$

Os termos oscilatórios se anulam na média.

Restam apenas os termos constantes:

$$\langle \text{Re}[A]\text{Re}[B] \rangle = \frac{1}{4}(ab^* + a^*b) = \frac{1}{2}\text{Re}[ab^*]. \quad (1.139)$$

Exemplo 1.6

Considere

$$f(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi p).$$

Esta função é periódica em $[-\pi, \pi]$.

Coefficientes de Fourier:

$$\hat{f}_m = \frac{1}{2\pi}.$$

Logo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(mx).$$

1.7 Transformações Ortogonais

Considere dois conjuntos de vetores unitários ortogonais

$$(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3), \quad (\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$$

Cada conjunto forma uma base completa no espaço tridimensional.

Podemos escrever

$$\hat{e}'_i = A_{ij} \hat{e}_j \quad (72)$$

- A_{ij} são chamados de **cossenos diretores**
- Eles descrevem como uma base é obtida da outra

Propriedade Fundamental

Usando o fato de que os vetores são ortonormais:

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}$$

Substituindo $\hat{e}'_i = A_{ik} \hat{e}_k$:

$$\delta_{ij} = A_{ik} A_{jk} \quad (73)$$

Isso implica

$$AA^T = I \quad (74)$$

A transposta de uma matriz ortogonal é igual à sua inversa.

Determinante

Tomando o determinante da relação

$$AA^T = I$$

obtemos

$$\det(A) \det(A^T) = 1$$

como

$$\det(A^T) = \det(A)$$

então

$$(\det A)^2 = 1 \tag{75}$$

$$\det A = \pm 1$$

Dois Tipos de Transformações

Existem duas classes:

Rotação

$$\det A = 1$$

Reflexão

$$\det A = -1$$

Transformações ortogonais preservam ângulos e comprimentos.

Exemplo: Rotação

Uma rotação no plano xy pode ser escrita como

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- gira o sistema por um ângulo θ
- preserva distâncias

Exemplo: Reflexão

Uma reflexão em relação ao plano $x = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- inverte o eixo x
- muda orientação do espaço

O vetor físico permanece o mesmo, mas o sistema de coordenadas muda.

$$\mathbf{r} = r_i \hat{e}_i = r'_i \hat{e}'_i$$

Substituindo

$$\hat{e}'_i = A_{ij} \hat{e}_j$$

obtemos

$$r'_i = A_{ij} r_j \quad (76)$$

A matriz conecta componentes do mesmo vetor em bases diferentes.

Aqui o sistema de coordenadas permanece fixo.
O vetor é que é transformado:

$$\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$$

- o vetor muda
- o sistema de coordenadas permanece

Transformação ativa: mudamos o vetor.

Transformação passiva: mudamos a base.

1.8 Tensores Cartesianos

Tensores são objetos matemáticos definidos pelo seu **comportamento sob transformações de coordenadas**.

Em particular, estudamos como grandezas físicas transformam sob **rotações**.

Nesta seção usamos o **ponto de vista passivo**:

- o vetor físico permanece fixo
- o sistema de coordenadas muda

Tensor de Rank 0

Um tensor de rank 0 possui apenas um componente.

Ele é um **escalar**.

Sob transformação de coordenadas:

$$f'(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$$

Ou seja, o valor não muda.

Exemplos:

- temperatura
- densidade
- potencial elétrico

Tensor de Rank 1

Um tensor de rank 1 possui três componentes.
Sob rotação:

$$V'_i = A_{ij} V_j$$

Esse é exatamente o comportamento de um **vetor**.

Um vetor geométrico pode ser escrito como

$$\mathbf{V} = V_i \hat{e}_i$$

Após transformação da base:

$$\mathbf{V} = V'_i \hat{e}'_i$$

Logo

$$V'_i = A_{ij} V_j$$

Comprimento de um Vetor

Uma propriedade essencial:

$$V'_i V'_i = A_{ij} V_j A_{ik} V_k$$

Usando

$$A_{ij} A_{ik} = \delta_{jk}$$

obtemos

$$V'_i V'_i = V_j V_j$$

Portanto o comprimento é preservado.

Um tensor de rank 2 possui nove componentes.
Sua transformação é

$$T'_{ij} = A_{ik} A_{jm} T_{km}$$

Cada índice transforma como um vetor.

Um tensor de rank 2 pode ser escrito como

$$\mathbf{T} = \hat{e}_i T_{ij} \hat{e}_j$$

Chamamos isso de **dyadic**.

Ele representa uma combinação linear de pares de vetores.

O tensor identidade possui componentes

$$I_{ij} = \delta_{ij}$$

e pode ser escrito como

$$\mathbf{I} = \hat{e}_i \hat{e}_i$$

Propriedade da Identidade

Para qualquer vetor

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{v}$$

ou

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

Ou seja, o tensor identidade não altera o vetor.

Considere o operador gradiente

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_k} \right)' = A_{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial r_j}$$

Logo o gradiente transforma como um vetor.

Agora consideramos transformações ortogonais gerais com

$$\det A = \pm 1$$

Casos:

- rotação $\rightarrow \det A = 1$
- reflexão ou inversão $\rightarrow \det A = -1$

Considere

$$\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{w}$$

Em componentes:

$$m_i = \epsilon_{ijk} p_j w_k$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.

Após transformação ortogonal:

$$m'_i = (\det A) A_{iq} m_q$$

Logo aparece um fator extra

$$\det A$$

Quando

$$\det A = 1$$

o vetor transforma normalmente.

Quando

$$\det A = -1$$

surge um sinal extra.

Chamamos isso de

pseudovetor ou vetor axial.

Vetores polares

- posição
- velocidade
- campo elétrico

Vetores axiais

- momento angular
- torque
- campo magnético

$$\text{axial} \times \text{polar} = \text{polar}$$

$$\text{polar} \times \text{polar} = \text{axial}$$

$$\text{axial} \times \text{axial} = \text{axial}$$

Para inversão:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$$

Todo vetor polar obedece

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{P}$$

Vetores axiais respondem diferente:

$$Q' = Q$$

Eles não mudam sinal na inversão.

Exemplo: Campo Magnético

A equação de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

- $\mathbf{j}$ é vetor polar
- ∇ é vetor polar

Logo

$\mathbf{B}$

deve ser um **vetor axial**.

1.9 O Teorema de Helmholtz

Enunciado:

Um campo vetorial arbitrário $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ pode ser decomposto como

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\perp} + \mathbf{C}_{\parallel} \quad (77)$$

onde

$$\nabla \cdot \mathbf{C}_{\perp} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{C}_{\parallel} = 0 \quad (78)$$

Uma representação útil é:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \nabla \Omega(\mathbf{r}) \quad (79)$$

- Parte solenoidal: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- Parte irrotacional: $\nabla \times (\nabla \Omega) = 0$

Os potenciais são dados por:

$$\Omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (80)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \times \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (81)$$

Importante

O resultado é válido para campos:

- Estáticos
- Dependentes do tempo

Desde que as integrais **converjam**.

Usamos a identidade da delta:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \mathbf{C}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (82)$$

e

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (83)$$

Substituindo:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{C}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (84)$$

Usando a identidade vetorial:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (85)$$

obtemos:

$$\mathbf{C} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int d^3 r' \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int d^3 r' \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (86)$$

Aplicando:

$$\nabla f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla' f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (87)$$

obtemos:

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{C} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (88)$$

Após reorganização:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (89)$$

e de forma análoga:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (90)$$

Substituindo tudo:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int d^3 r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int d^3 r' \frac{\nabla' \times \mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (91)$$

$$+ \text{termos de superfície} \quad (92)$$

Os termos extras viram:

$$\int d\mathbf{S}' \cdot \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{e} \quad \int d\mathbf{S}' \times \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (93)$$

Condição

Eles desaparecem se

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \quad \text{mais rápido que} \quad \frac{1}{r} \quad (94)$$

Obtemos exatamente:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \nabla \Omega(\mathbf{r}) \quad (95)$$

com Ω e $\mathbf{F}$ dados anteriormente.

Suponha duas decomposições:

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 \quad (96)$$

Então:

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{W} = 0 \quad (97)$$

Conclusão da Unicidade

Segue que:

$$\nabla^2 \mathbf{W} = 0 \quad (98)$$

e usando identidade de Green:

$$\int_V |\nabla \mathbf{W}|^2 d^3r = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{W} \nabla \mathbf{W} \quad (99)$$

Resultado

Se $\mathbf{W} \rightarrow 0$ no infinito:

$$\mathbf{W} = 0 \Rightarrow \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 \quad (100)$$