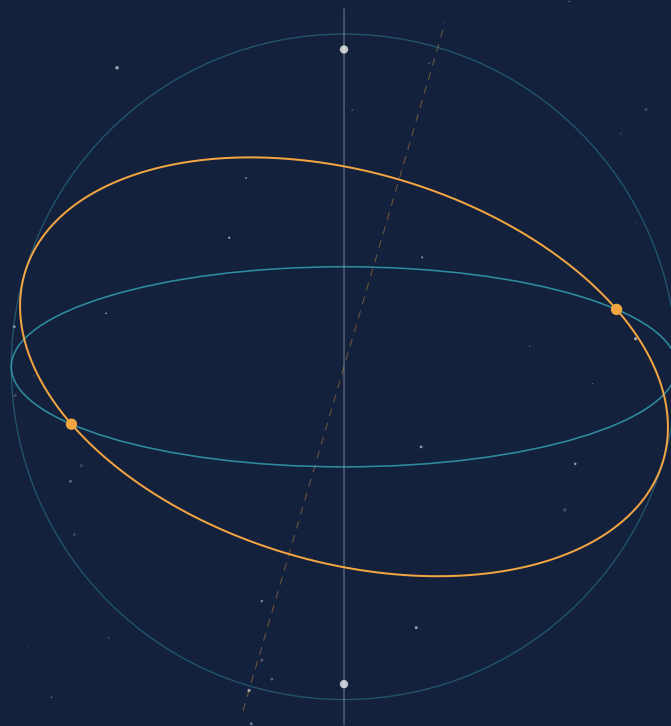




APOSTILA DE CAPÍTULOS DE ESTUDO

Astrofísica Moderna

Material para alunos de graduação em Física

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima

Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas

Esta apostila é um material original de apoio para aulas. Ela usa o livro de Carroll & Ostlie como referência de conteúdo, sequência e aprofundamento, mas não reproduz o texto do livro. Para demonstrações completas, exemplos resolvidos e problemas adicionais, consulte a bibliografia indicada no fim do texto.

Sumário

Como usar esta apostila	1
Ementa sintética	1
Constantes e relações úteis	2
Capítulos de apoio expandidos	3
Capítulo 1 – Ângulos, coordenadas e sistemas de referência	5
Laboratório – Capítulo 1	14
Capítulo 2 – Paralaxe, brilho e luminosidade	17
Antes de tudo: quanto vale uma unidade astronômica?	17
Laboratório – Capítulo 2	26
Capítulo 3 – Movimentos, unidades e fotometria	29
O viés de inverter a paralaxe	31
O projeto do capítulo – a vizinhança solar com o Gaia	35
Capítulo 4 – Órbitas elípticas e as leis de Kepler	38
A elipse, antes da física	38
A elipse em coordenadas polares	38
A elipse em coordenadas cartesianas	39
A área da elipse	40
As três leis de Kepler	41
Astronomia de posição para o laboratório	43
Laboratório – Capítulo 4	47
Capítulo 5 – Gravitação newtoniana e dinâmica orbital	50
As três leis de Newton	50
Aceleração em órbitas circulares	51

De Kepler a Newton: a lei do inverso do quadrado	51
A constante K , deduzida	52
Determinação de massas	53
O problema de dois corpos: a equação do movimento	55
Conservação da energia	56
Conservação do momento angular	57
A primeira lei de Kepler	57
A segunda lei de Kepler	59
A terceira lei de Kepler, sem supor círculo	60
Energia orbital e a equação vis-viva	60
Posição em função do tempo: a equação de Kepler	62
Binárias: como a órbita vira massa	62
O teorema do virial, deduzido	63
Forças de maré	63
O problema restrito de três corpos	64
Pontos de Lagrange	64
Capítulo 6 – Radiação, corpo negro e espectros	67
Laboratório – Capítulo 6	71
Capítulo 7 – Telescópios, detectores e observação multi-banda	81
Capítulo 8 – Estrutura estelar e diagrama HR	88
Capítulo 9 – Meio interestelar, formação e evolução estelar	105
Capítulo 10 – Remanescentes compactos e altas energias	115
Capítulo 11 – Ondas gravitacionais e astronomia multimessageira	126
Capítulo 12 – Formação planetária e Sistema Solar	135
Capítulo 13 – Exoplanetas, atmosferas e habitabilidade	146
Capítulo 14 – Via Láctea, dinâmica galáctica e matéria escura	156
Capítulo 15 – Galáxias, interações e núcleos ativos	165
Capítulo 16 – Cosmologia observacional e expansão do universo	175
Capítulo 17 – Universo primordial e modelo cosmológico padrão	186

Capítulo 18 – Astronomia do domínio do tempo e grandes levantamentos	195
Capítulo 19 – Dados astronômicos, incerteza e inferência	201
Capítulo 20 – Projetos guiados com dados públicos	208
Capítulo 21 – Fronteiras abertas: o que ainda não sabemos	212
Capítulo 22 – Busca por vida e por inteligência fora da Terra	218
Apêndice – Ferramentas de dedução e escalas fundamentais	227
Bibliografia	230

Lista de Figuras

- 1 **A esfera celeste e o triângulo que resolve tudo.** (a) O céu visto de Joinville ($\varphi = -26,30^\circ$): o horizonte, o equador celeste, o polo sul celeste elevado de $|\varphi|$ sobre o ponto Sul e um astro X com seu azimute A_z (em dourado, contado do Norte para Leste) e sua altura h (em ciano, sobre o círculo vertical). (b) Os mesmos três pontos formam o triângulo esférico PZX : os lados são $90^\circ - \varphi$, $90^\circ - \delta$ e $90^\circ - h$, e o ângulo no polo é o ângulo horário H . Aplicar a lei dos cossenos a esse triângulo produz a equação da altura, e ela responde sozinha a quase toda pergunta prática de observação. 8
- 2 **Por que existem estações, em números, para Joinville.** (a) A declinação do Sol varia entre $\pm \varepsilon$ ao longo do ano, e com ela a altura máxima $h_{\max} = 90^\circ - |\varphi - \delta_\odot|$. Como $|\varphi| = 26,3^\circ$ excede a obliquidade, o Sol nunca alcança o zênite aqui: no solstício de dezembro ele para a $87,1^\circ$. (b) Os dois efeitos caminham juntos e no mesmo sentido: no verão o dia dura mais (13,6 h contra 10,4 h no inverno) e cada metro quadrado recebe mais fluxo ao meio-dia, porque $\sin h_{\max}$ é maior. É a soma dos dois, e não a distância ao Sol, que produz as estações. 10
- 3 **A equação do tempo e suas duas causas.** A curva dourada é a diferença entre o Sol verdadeiro e o Sol médio, calculada a partir das duas expressões deduzidas acima. A componente da excentricidade (tracejada longa) tem período anual e amplitude 7,7 minutos; a da obliquidade (tracejada curta) tem período semestral e amplitude 9,9 minutos. A soma, com as fases reais, vai de $-14,4$ minutos em meados de fevereiro a $+16,5$ minutos no início de novembro. Duas propriedades geométricas independentes deixam sua assinatura em um único gráfico observável — e é por isso que um relógio de sol precisa de tabela de correção. 12
- 4 **O polo celeste não fica parado.** Trajetória do polo celeste norte entre as estrelas, calculada com $50,3''$ por ano: um círculo de raio $\varepsilon = 23,44^\circ$ em torno do polo da eclíptica, percorrido em cerca de 25 800 anos. Polaris ocupa o posto hoje quase por acaso; Thuban o ocupava quando as pirâmides foram erguidas, e Vega o ocupará por volta do ano 13 700. As posições das estrelas foram convertidas de coordenadas equatoriais J2000 para eclípticas. É essa deriva que obriga todo catálogo a declarar sua época. 13
- 5 **O trânsito de Vênus e a escala do Sistema Solar.** Dois observatórios separados pela base b veem Vênus projetado sobre cordas diferentes do disco solar. Os raios se cruzam em Vênus, e por isso quem observa ao norte vê a corda mais ao sul. A separação Δ das duas cordas, medida em ângulo a partir da Terra, é o que se compara com a previsão geométrica. As proporções 0,277 e 0,723 vêm de Kepler; o que falta é o fator de conversão para quilômetros. 18
- 6 **A única distância medida por geometria pura.** (a) A base do triângulo é o raio da órbita terrestre; o ângulo p é metade do deslocamento aparente entre duas observações separadas por seis meses. O ângulo está muito exagerado: para a estrela mais próxima ele vale $0,77''$, dez mil vezes menor que o desenho sugere. (b) A relação $d = 1/p$ em escala logarítmica, com marcos reais. O Gaia mede paralaxes com incerteza de dezenas de microssegundos de arco, o que mantém a régua utilizável até alguns quiloparsecs; além disso, a geometria cede lugar a métodos indiretos. 21

- 7 **A poeira empobrece e avermelha.** (a) A extinção relativa A_λ/A_V para a lei padrão do meio difuso ($R_V = 3,1$): cresce monotonicamente para o azul, e no infravermelho próximo cai a um décimo do valor no visível — razão pela qual regiões de formação estelar só se abrem em K ou no infravermelho médio. (b) O efeito no diagrama cor–magnitude construído com as 2000 estrelas do Gaia do projeto extra deste capítulo: a poeira desloca a estrela ao longo da seta, para baixo e para a direita. Sem corrigir, ela seria classificada como mais fria e mais distante do que é. 25
- 8 **O viés, simulado.** Populações sintéticas com densidade espacial uniforme, e a razão entre a distância obtida por $1/p_{\text{obs}}$ e a verdadeira. Com 5% de erro em paralaxe a distribuição é estreita e centrada em 1; com 40% ela se alarga e o pico desloca para baixo de 1 — a distância inferida sai sistematicamente curta, e a mediana não salva. 32
- 9 **Como se sabe até onde um catálogo é completo.** Se a densidade espacial for uniforme, $N(< d)$ cresce como d^3 e a razão $N(< d)/d^3$ é constante. Enquanto a curva está plana, a amostra contém tudo o que existe até ali; quando começa a cair, o catálogo já está perdendo objetos, e o raio em que isso acontece é o maior que se pode usar em um cálculo de densidade. 35
- 10 **A geometria da elipse.** (a) A definição focal: a soma $FP + F'P$ vale $2a$ para qualquer ponto P da curva. O semieixo maior a , o semieixo menor b e a semidistância focal $c = ae$ formam o triângulo retângulo que dá $b^2 = a^2(1 - e^2)$. (b) Com o Sol em um dos focos, o periélio fica no extremo mais próximo, a $a(1 - e)$, e o afélio no oposto, a $a(1 + e)$. O ângulo θ é medido a partir do foco ocupado e a partir da direção do periélio: é a anomalia verdadeira, e é ela que aparece na equação polar. 39
- 11 **As leis de Kepler.** (a) Órbita de excentricidade 0,55 obtida resolvendo a equação de Kepler $M = E - e \sin E$. O corpo central ocupa um foco, o outro fica vazio, e os dois setores sombreados — percorridos no mesmo intervalo de tempo — têm a mesma área: perto do periélio o planeta corre mais e cobre um ângulo grande com raio curto; perto do afélio faz o oposto. (b) A terceira lei com dados tabelados: os oito planetas em torno do Sol e os quatro satélites galileanos em torno de Júpiter. As duas famílias caem sobre retas de mesma inclinação $3/2$ mas coeficientes diferentes, e é o coeficiente que carrega a física: ele mede a massa do corpo central. Kepler não tinha como extraí-la; o Capítulo 5 mostra como, e o resultado é $1,00 M_\odot$ para os planetas e $1,90 \times 10^{27}$ kg — a massa de Júpiter — para as luas. 42
- 12 **O potencial efetivo e os cinco pontos de Lagrange.** (a) Curvas de nível de Φ_{ef} no referencial girante. As destacadas passam por L_1 , L_2 , L_3 e L_4 : são as fronteiras das regiões proibidas, e é por isso que a de L_1 tem a forma de um oito — é ela que define os lóbulos de Roche. Os três pontos colineares são instáveis; L_4 e L_5 , nos vértices dos triângulos equiláteros, são estáveis. **A razão de massas do desenho, $m_2/m_1 = 0,087$, é muito maior que a real**, senão L_1 e L_2 ficariam colados no corpo menor e invisíveis. (b) A escala verdadeira: a distância de L_1 e L_2 ao corpo menor é $R_H/a = (m_2/3m_1)^{1/3}$, e a raiz cúbica achata tudo — variar a razão de massas por seis ordens de grandeza move R_H/a por apenas duas. No sistema Sol–Terra, $R_H/a = 0,010$: os telescópios em L_2 estão a 1,5 milhão de quilômetros, um centésimo da distância ao Sol. 64

- 13 **Corpo negro: o ideal e o real.** (a) Curvas calculadas diretamente da lei de Planck para quatro temperaturas. Em escala log-log o efeito é duplo: o pico se desloca para comprimentos de onda menores (lei de Wien, tracejado ligando os máximos) e toda a curva sobe, porque o fluxo integrado cresce com T^4 (lei de Stefan-Boltzmann). Note que nenhuma curva cruza outra: uma estrela mais quente emite mais em *toda* comprimento de onda, e não apenas no azul. (b) O espectro solar realmente medido acima da atmosfera terrestre, comparado ao corpo negro de 5772 K com o mesmo raio e distância. O envelope é bem reproduzido, mas os desvios são grandes e informativos: entre 200 e 400 nm o Sol emite apenas 65% do previsto, porque a opacidade cresce no ultravioleta e a radiação escapa de camadas mais altas e frias; no visível o espectro é recortado pelas linhas de absorção de Fraunhofer; entre 1400 e 2400 nm a emissão real supera a ideal em cerca de 19%. Corpo negro é um ponto de partida, não uma descrição completa. Dados do painel (b): *Whole Heliosphere Interval reference spectrum* (SORCE/TIMED), LASP/LISIRD, Universidade do Colorado. 68
- 14 **Diagrama Hertzsprung-Russell.** Luminosidade (em unidades solares) contra temperatura efetiva, com o eixo de temperatura crescendo para a esquerda. A faixa diagonal é a sequência principal (*main sequence*); acima e à direita estão gigantes (*giants*) e supergigantes (*supergiants*), frias mas luminosas por terem raios enormes; abaixo e à esquerda estão as anãs brancas (*white dwarfs*), quentes mas pouco luminosas por terem raios pequenos. O tamanho dos círculos indica o raio relativo das estrelas. A posição de uma estrela combina temperatura, luminosidade, raio e estágio evolutivo. Crédito: ESO, licença CC BY 4.0 (eso0728c). 89
- 15 **Relação massa-luminosidade da sequência principal.** Cada ponto é uma componente de binária eclipsante destacada com massa e raio medidos diretamente; a luminosidade vem de $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$. Em escala log-log a relação é quase uma reta, o que significa uma lei de potência $L \propto M^\alpha$: pequenas mudanças de massa produzem grandes mudanças de luminosidade e, portanto, de tempo de vida. O expoente único $\alpha = 3,5$ (tracejado) é uma boa aproximação de trabalho, mas o ajuste por faixas mostra que α varia de $\sim 1,7$ nas anãs vermelhas a $\sim 4,5$ perto da massa solar e volta a cair nas estrelas mais massivas, onde a pressão de radiação domina. Dados: Eker et al. (2018), MNRAS 479, 5491 (via VizieR). 90
- 16 **Região de formação estelar.** Nuvens de gás e poeira na Nebulosa de Carina mostram o ambiente onde novas estrelas nascem e interagem com radiação intensa. Crédito: NASA, ESA, N. Smith e Hubble Heritage Team, via Wikimedia Commons. 105
- 17 **O regime compacto em ação: fusão de duas estrelas de nêutrons.** Concepção artística do evento GW170817, detectado em 17 de agosto de 2017 simultaneamente em ondas gravitacionais (LIGO–Virgo) e em raios gama (Fermi/INTEGRAL), e depois acompanhado em todo o espectro eletromagnético. Cada uma das duas estrelas concentra mais de uma massa solar em um raio de cerca de 10 km: a mesma massa do Sol comprimida do tamanho de uma cidade. É essa compactação extrema — de $R \sim R_\oplus$ nas anãs brancas, a $R \sim 10$ km nas estrelas de nêutrons, até $R_s = 2GM/c^2 \simeq 3$ km por massa solar no horizonte de um buraco negro — que torna acessíveis densidades nucleares, campos gravitacionais relativísticos e a nucleossíntese de elementos pesados observada na quilonova. Crédito: University of Warwick/Mark Garlick, via ESO, licença CC BY 4.0 (eso1733s). 116
- 18 **Júpiter como laboratório planetário.** Bandas atmosféricas e a Grande Mancha Vermelha ilustram dinâmica de fluidos, rotação rápida e meteorologia em gigantes gasosos. Crédito: NASA, ESA e equipe Hubble, via Wikimedia Commons. 136

- 19 **Curvas de luz de trânsito reais, medidas pelo Kepler.** Fotometria de cadência curta (um ponto por minuto), dobrada no período orbital; os pontos cinza são cadências individuais e os círculos azuis são médias em intervalos de tempo. A linha tracejada não é ajuste algum: é a profundidade prevista por $(R_p/R_\star)^2$ com o raio do planeta e o raio da estrela medidos independentemente. **(a)** HAT-P-7 b, um Júpiter quente diante de uma estrela de $2 R_\odot$: a queda é de 0,57% e o fundo achatado mostra o planeta inteiramente projetado sobre o disco estelar. **(b)** Kepler-10 b, um planeta rochoso de $1,5 R_\oplus$: a queda é de apenas 161 partes por milhão, ou seja, 35 vezes menor, exatamente como a razão dos raios ao quadrado prevê. É a mesma física nas duas escalas, e é por isso que a estatística de exoplanetas nasceu dominada por planetas grandes. Dados: arquivo público do Kepler (MAST); efemérides do NASA Exoplanet Archive. 146
- 20 **Diagrama massa-raio: o que a densidade média entrega e o que ela esconde.** Todos os exoplanetas com massa verdadeira (não $M \sin i$) e raio medidos com precisão melhor que 25% e 10%, respectivamente, junto com os planetas do Sistema Solar. As linhas pontilhadas são apenas geometria, $R = (3M/4\pi\rho)^{1/3}$, sem nenhum modelo de interior. Duas leituras importam. Primeira: massa e raio dão a densidade média, e a densidade já separa mundos rochosos (próximos da linha de $5,5 \text{ g/cm}^3$, a da Terra) de mundos com envelope volumoso. Segunda: a dispersão vertical em cada massa mostra que a densidade *não* determina composição — planetas de mesma massa ocupam raios muito diferentes conforme tenham ou não envelope de hidrogênio, e acima de $\sim 100 M_\oplus$ o raio praticamente satura, porque a matéria degenerada resiste à compressão. Dados: NASA Exoplanet Archive, tabela **pscomppars**, consultada em julho de 2026. 148
- 21 **Curvas de rotação e a massa que não se vê.** Os pontos são velocidades circulares medidas; as linhas tracejadas mostram quanto cada componente de massa contribuiria sozinha, e a linha cheia é a soma. **(a)** Na Via Láctea, bojo e disco explicam bem a curva perto do centro, mas caem rápido depois; para manter a velocidade praticamente constante até $R \simeq 25 \text{ kpc}$ é preciso uma componente adicional que *cresce* com o raio — o halo. O Sol está a cerca de 8 kpc , ou seja, já na região onde o halo importa. **(b)** Em M 33 a decomposição é ainda mais clara: a contribuição das estrelas atinge um máximo em torno de 3 kpc e decresce, a do gás é pequena, e a curva observada continua subindo. O ponto não é que a curva seja “plana”, e sim que ela não cai como cairia se a massa terminasse onde termina a luz. Figuras de Vallastro, via Wikimedia Commons, licença CC BY-SA 4.0; rótulos traduzidos para o português. . 156
- 22 **Galáxia espiral M51.** A estrutura espiral e a interação com a companheira tornam M51 um bom exemplo visual de morfologia, formação estelar e efeitos gravitacionais. Crédito: NASA, ESA, Hubble Heritage Team e colaboradores, via Wikimedia Commons. 165

- 23 **A linha do tempo cósmica, em escala logarítmica.** Fator de escala $a = 1/(1+z)$ em função do tempo, obtido integrando a equação de Friedmann $H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda}$ com os parâmetros do Planck 2018 ($H_0 = 67,4$ km/s/Mpc, $\Omega_m = 0,315$). O eixo do tempo cobre dezessete ordens de grandeza porque não há alternativa: a nucleossíntese primordial dura minutos e a formação do Sistema Solar leva bilhões de anos. As faixas ao fundo marcam qual componente domina a densidade de energia — radiação até 50 mil anos, matéria até 10 bilhões de anos, energia escura depois disso — e a inclinação da curva muda em cada transição, de $a \propto t^{1/2}$ para $a \propto t^{2/3}$ e finalmente para crescimento exponencial. A posição de cada evento numerado não foi escolhida: entra o desvio para o vermelho e o tempo sai da integração. A idade do Universo também é resultado, não hipótese: 13,79 bilhões de anos, contra os 13,80 do Planck. Note ainda o que *não* cabe na figura: a inflação acontece por volta de 10^{-36} s, cerca de trinta e sete ordens de grandeza à esquerda da borda do gráfico. 176
- 24 **Campo ultraprofundo do Hubble.** Uma pequena região do céu contém milhares de galáxias em diferentes distâncias e épocas cósmicas, tornando a imagem uma janela para evolução galáctica. Crédito: NASA, ESA e Hubble, via ESA/Hubble. . . 177
- 25 **Da detecção à física.** O dado bruto passa por calibração e modelo antes de virar massa, temperatura, distância ou composição. 201

Como usar esta apostila

Esta apostila reúne os capítulos de estudo do curso de Astrofísica Moderna. Ela foi escrita para acompanhar a leitura, organizar os conceitos em português e ajudar você a conectar observações, modelos físicos, estimativas e interpretação de dados.

Cada capítulo pode ser lido de forma independente, mas a sequência foi pensada para ser cumulativa: o que se deduz em um capítulo é usado como ferramenta nos seguintes. Antes de cada assunto novo, leia o capítulo correspondente, marque suas dúvidas e tente refazer as estimativas apresentadas — refazer uma conta é a maneira mais rápida de descobrir se você entendeu a hipótese que está por trás dela.

Os laboratórios de dados

Doze capítulos desta apostila trazem um **laboratório de dados**: um exercício com medidas reais, baixadas de arquivos públicos e já preparadas em arquivos CSV. Nenhum dado foi simulado ou retocado. Em cada laboratório você encontra o arquivo, as colunas, a equação a aplicar, um roteiro passo a passo com a fórmula pronta para Excel e para Python, o que deve ser entregue e um valor de referência para conferir o próprio resultado.

Os arquivos estão em:

<https://rafaelcrdelima.github.io/Astronomia/apostila-astrofisica-moderna/dados/>

Todos usam vírgula como separador de campo e ponto como separador decimal, e abrem diretamente no Excel, no LibreOffice, no Python (`pandas.read_csv`) ou no Mathematica (`Import`). O maior deles tem menos de 1 MB. As equações usadas são todas de uma linha — lei de Wien, terceira lei de Kepler, Stefan-Boltzmann, módulo de distância, $M = v^2 r / G$ — e o trabalho pedido é o de aplicar teoria a números que alguém realmente mediu.

As figuras, tabelas e gráficos não são enfeites. Em astrofísica, muitas conclusões nascem de uma cadeia: observável → calibração → modelo → interpretação física. Sempre que encontrar uma imagem ou gráfico, pergunte: o que foi medido diretamente? O que foi inferido? Que hipótese poderia estar errada?

Ementa sintética

Esfera celeste e coordenadas; mecânica celeste; radiação, espectros e telescópios; parâmetros estelares; classificação espectral; atmosferas e interiores estelares; Sol; meio interestelar e formação estelar; evolução estelar; remanescentes compactos; relatividade geral e buracos negros; sistemas binários; Sistema Solar; exoplanetas; Via Láctea; galáxias; expansão cósmica; núcleos ativos; cosmologia e universo primordial; ondas gravitacionais e astronomia multimessageira; astronomia do domínio do tempo e grandes levantamentos; inferência estatística aplicada a dados astronômicos; habitabilidade planetária e busca por vida e por tecnossinaturas.

Constantes e relações úteis

- Velocidade da luz: $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
- Constante gravitacional: $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
- Constante de Planck: $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$.
- Constante de Boltzmann: $k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.
- Massa solar: $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$; luminosidade solar: $L_{\odot} = 3,83 \times 10^{26} \text{ W}$.
- Parsec: $1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m} = 3,26 \text{ anos-luz}$.
- Lei de Stefan-Boltzmann: $F = \sigma T^4$; luminosidade: $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$.
- Módulo de distância: $m - M = 5 \log_{10}(d/10 \text{ pc})$.
- Lei de Hubble-Lemaître: $v = H_0 d$.

Capítulos de apoio expandidos

Os 22 capítulos a seguir funcionam como leitura de sustentação para os blocos conceituais do curso. Eles foram escritos para que cada parte do curso tenha um núcleo de conteúdo contínuo, com explicações, exemplos de ordem de grandeza, perguntas de interpretação e conexões entre observação e teoria. O objetivo é ajudar você a estudar com autonomia: aqui a prioridade é organizar as ideias físicas em português, em uma sequência adequada para acompanhar o semestre.

Ao estudar um capítulo, marque os trechos em que aparecem relações entre observação e inferência física. São eles que sustentam quase todos os cálculos e gráficos do restante do texto, e voltar a essas marcações é a forma mais eficiente de revisar.

Mapa das 49 aulas nesta apostila

A tabela abaixo indica em que ordem os capítulos acompanham o curso, e serve para você saber o que ler antes de cada assunto. Os capítulos 16 a 18 são transversais: eles não pertencem a um tema específico, mas sustentam as atividades práticas e os projetos do início ao fim.

Aulas	Tema do bloco	Capítulos desta apostila
1	Ângulos, coordenadas e sistemas de referência	1
2	Paralaxe, brilho e luminosidade	2
3	Movimentos, unidades e fotometria	3
4	Órbitas elípticas e as leis de Kepler	4
5	Gravitação newtoniana e teorema do virial	5
6–7	Luz, corpo negro, espectros e instrumentação	6 e 7
8–9	Binárias, massas estelares e diagrama HR	5 e 8
10–14	Atmosferas, opacidade, interiores e modelos estelares	6 e 8
15	O Sol como estrela padrão: sismologia e neutrinos	8
16–17	Meio interestelar e formação estelar	9
18–21	Evolução estelar, pulsação e supernovas	8 e 9
22–23	Anãs brancas, estrelas de nêutrons e pulsares	10
24–25	Relatividade geral, buracos negros e acreção	10
26	Síntese estelar e o canal gravitacional	10 e 11
27–31	Sistema Solar, corpos menores e formação planetária	12
32–34	Exoplanetas: detecção, atmosferas e habitabilidade	13
35	Revisão aplicada: do céu local aos sistemas planetários	1–13
36–38	Via Láctea: estrutura, cinemática e centro galáctico	14

Aulas	Tema do bloco	Capítulos desta apostila
39–41	Galáxias, interações e núcleos ativos	15
42–44	Escada de distâncias, expansão e quasares	15 e 16
45–47	Parâmetros cósmicos, CMB e energia escura	16 e 17
48	Universo primordial e inflação	17
49	Síntese final, problemas em aberto e busca por vida	21 e 22
transversal	Transientes, levantamentos e fluxo de alertas	18
transversal	Estatística, incerteza, viés e aprendizado de máquina	19
transversal	Projetos guiados com dados públicos	20

Sobre o material moderno. Quatro temas atravessam a apostila e não existiam, em forma reconhecível, na astrofísica de trinta anos atrás: a detecção direta de ondas gravitacionais e a astronomia multimensageira (Capítulo 11), a espectroscopia de atmosferas de exoplanetas com o JWST (Capítulo 13), a astrometria em escala industrial do Gaia (Capítulo 14) e a astronomia do domínio do tempo, prestes a mudar de patamar com o Observatório Vera C. Rubin (Capítulo 18). O Capítulo 21 reúne as controvérsias ainda em aberto em 2026 e o Capítulo 22 fecha o curso com a busca por vida e por inteligência fora da Terra. Onde o texto descreve resultados recentes, ele indica o grau de consolidação: há diferença entre “medido”, “inferido com hipóteses” e “anunciado e ainda em disputa”.

Capítulo 1 – Ângulos, coordenadas e sistemas de referência

A astrofísica moderna começa com uma limitação que é também sua força: quase tudo que sabemos sobre o universo vem de observações à distância. Não podemos colocar uma estrela em uma bancada, mudar sua massa e medir a resposta; não podemos repetir a formação de uma galáxia em laboratório; não podemos acelerar a história cósmica para ver o resultado final. Em vez disso, observamos luz, posição, tempo, movimento e, em casos especiais, partículas e ondas gravitacionais. A tarefa central do astrofísico é transformar sinais recebidos em propriedades físicas: distância, massa, temperatura, composição química, densidade, idade e história evolutiva.

Os três primeiros capítulos formam um bloco. Eles respondem, nesta ordem, a três perguntas que a astronomia precisa resolver antes de qualquer outra: *onde* está o objeto, *a que distância* e *quão luminoso* ele é, e *como ele se move*.

Este capítulo responde a primeira. Ângulos e ângulo sólido; a esfera celeste e os quatro sistemas de coordenadas; trigonometria esférica e a equação da altura; a cadeia da data civil ao tempo sideral e à altura no céu; eclíptica, obliquidade e estações; a equação do tempo; precessão, nutação e o conceito de época; os sistemas de referência ICRS e Gaia-CRF; e a cadeia de reduções que leva de uma posição de catálogo à posição aparente no telescópio.

O Capítulo 2 mede distâncias e brilhos, e é ele que o primeiro artigo do semestre cobra. O Capítulo 3 aprofunda o que o Capítulo 2 usou por necessidade imediata: movimentos, as unidades modernas e a fotometria. As seções de instrumentação — redução de imagens, astrometria de placa e refração — e as escalas de tempo estão no Capítulo 3 como leitura complementar.

Medir uma direção: ângulos, ângulo sólido e resolução

Toda medida astronômica de posição é uma medida de *direção*, e direções vivem em duas dimensões. Vale fixar o vocabulário quantitativamente antes de usá-lo.

A unidade prática é o segundo de arco:

$$1^\circ = 60' = 3600'', \quad 1'' = \frac{\pi}{180 \times 3600} \text{ rad} = 4,8481 \times 10^{-6} \text{ rad}.$$

O inverso desse número, 206265, é provavelmente a constante mais usada em astronomia prática: ela converte radianos em segundos de arco. Sua origem é apenas $180 \times 3600/\pi$.

A **aproximação de pequenos ângulos** é o que torna tudo tratável. Um objeto de tamanho físico ℓ a distância d subtende

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{\ell}{2d} \right) \simeq \frac{\ell}{d},$$

com erro menor que 1% para $\theta < 10^\circ$ e menor que uma parte em 10^6 para $\theta < 0,1^\circ$. Em astronomia estelar, onde os ângulos são de segundos de arco, a aproximação é exata para qualquer propósito prático — e é ela que permite escrever paralaxe, movimento próprio e tamanho angular como simples razões.

Direções ocupam **ângulo sólido**, medido em esferorradianos:

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad \oint d\Omega = 4\pi \text{ sr}.$$

Um cone de meia-abertura α subtende $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$, que para α pequeno vale $\pi\alpha^2$ — a área do disco de raio angular α . É essa integral que aparecerá no Capítulo 6 ao converter intensidade

específica em fluxo, e é ela que define o significado de “brilho superficial”. Um grau quadrado, unidade comum em levantamentos, vale

$$1 \text{ deg}^2 = \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 \text{ sr} = 3,046 \times 10^{-4} \text{ sr},$$

e o céu inteiro tem $41\,253 \text{ deg}^2$. Guarde esse número: ele converte imediatamente a área de um levantamento em fração do céu, e portanto qualquer contagem de objetos em densidade por unidade de área.

Duas escalas de referência ajudam a calibrar a intuição. O olho humano resolve cerca de $1'$; a Lua e o Sol subtendem ambos aproximadamente $0,5^\circ$ — coincidência que torna possíveis os eclipses totais. Um telescópio de 8 m tem limite de difração de $0,015''$ no visível, e a interferometria de base muito longa chega a $20 \mu\text{as}$. Do olho nu ao VLBI vão seis ordens e meia de grandeza: $60''/20 \mu\text{as} = 3 \times 10^6$.

Os quatro sistemas de coordenadas e quando usar cada um

A esfera celeste admite vários sistemas, todos definidos por um plano fundamental e uma origem sobre ele.

Sistemas de coordenadas celestes

Sistema	Plano fundamental	Coordenadas	Depende de
Horizontal	horizonte do observador	azimute A_z , altura h	local e instante
Equatorial	equador celeste	ascensão reta α , declinação δ	época (precessão)
Eclíptico	eclíptica	longitude λ , latitude β	época
Galáctico	plano da Via Láctea	ℓ, b	nada (convencionado)

Antes de usar qualquer fórmula, é preciso fixar a convenção do azimute, que varia entre livros e programas. **Neste texto, e em todo o curso, o azimute é contado a partir do ponto cardinal Norte, no sentido Norte $\rightarrow$ Leste $\rightarrow$ Sul $\rightarrow$ Oeste, de 0° a 360° ;** a altura é medida sobre o círculo vertical que passa pelo astro, positiva acima do horizonte. É a convenção do IAU SOFA, do Stellarium e do *astropy*. Alguns textos clássicos de astronomia de posição contam o azimute a partir do Sul — trocar de convenção sem perceber inverte o sinal do azimute calculado e é um erro que não deixa sintoma.

A escolha do sistema não é estética. O sistema **horizontal** responde à pergunta operacional — “dá para observar agora?” — mas suas coordenadas mudam a cada minuto. O **equatorial** é o de catálogo, porque acompanha a rotação do céu; é nele que telescópios são apontados. O **eclíptico** é natural para o Sistema Solar, já que os planetas orbitam perto de um único plano. O **galáctico** é o de escolha em estudos da Via Láctea, porque separa imediatamente disco de halo.

A ascensão reta é medida em horas, minutos e segundos, e não em graus, por uma razão prática: como a Terra gira 360° em 24 horas siderais, 1^{h} de ascensão reta corresponde a 15° , e o intervalo entre a culminação de dois objetos é lido diretamente da diferença de suas ascensões retas. A unidade codifica um relógio.

A conversão entre horizontal e equatorial será deduzida em detalhe duas subseções adiante, a partir da lei dos cossenos esférica. Vale adiantar aqui o resultado central, porque ele responde sozinho a

quase toda pergunta prática:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

Três leituras imediatas. Se $\delta = \varphi$, o objeto passa pelo zênite. Se $\delta > 90^\circ - |\varphi|$ com o mesmo sinal da latitude, o objeto é circumpolar. E a altura máxima, em $H = 0$, vale $h_{\max} = 90^\circ - |\varphi - \delta|$: para Joinville, com $\varphi = -26^\circ$, objetos com $\delta = -26^\circ$ passam pelo zênite, e o polo sul celeste está permanentemente a 26° de altura.

Geometria esférica: a ferramenta de base

Toda a astronomia de posição se apoia em trigonometria esférica, e vale ter as duas fórmulas centrais deduzidas em vez de decoradas. Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C sobre uma esfera de raio unitário, com lados a , b , c medidos como ângulos centrais opostos a cada vértice.

Tome os vetores unitários $\hat{u}_A$, $\hat{u}_B$, $\hat{u}_C$ apontando do centro para cada vértice. Por definição de produto escalar,

$$\cos a = \hat{u}_B \cdot \hat{u}_C, \quad \cos b = \hat{u}_A \cdot \hat{u}_C, \quad \cos c = \hat{u}_A \cdot \hat{u}_B.$$

Escolha o sistema de coordenadas com $\hat{u}_A = (0, 0, 1)$ e $\hat{u}_B$ no plano xz . Então

$$\hat{u}_B = (\sin c, 0, \cos c), \quad \hat{u}_C = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b),$$

em que A é o ângulo interno no vértice A . O produto escalar $\hat{u}_B \cdot \hat{u}_C$ dá imediatamente a **lei dos cossenos esférica**:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Note o que ela substitui: no limite de triângulos pequenos, $\cos x \simeq 1 - x^2/2$ e $\sin x \simeq x$, e a expressão colapsa em $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, a lei dos cossenos plana. A geometria esférica contém a plana como caso limite, e a diferença entre as duas é exatamente o que produz efeitos como a soma dos ângulos internos maior que 180° .

Tomando o produto vetorial em vez do escalar, e usando que a área do paralelogramo é a mesma calculada de dois modos, obtém-se a **lei dos senos esférica**:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Transformação entre sistemas de coordenadas

A aplicação mais frequente dessas fórmulas é converter coordenadas equatoriais — ascensão reta α e declinação δ , fixas na esfera celeste — em coordenadas horizontais — altura h e azimuth A_z , que dependem do observador e do instante.

Monte o triângulo esférico com vértices no polo celeste P , no zênite Z e no objeto X . Os lados valem: $\overline{PZ} = 90^\circ - \varphi$, onde φ é a latitude do observador; $\overline{PX} = 90^\circ - \delta$; e $\overline{ZX} = 90^\circ - h$, a distância zenital. O ângulo no polo é o **ângulo horário** H , definido por $H = \Theta - \alpha$, com Θ o tempo sideral local.

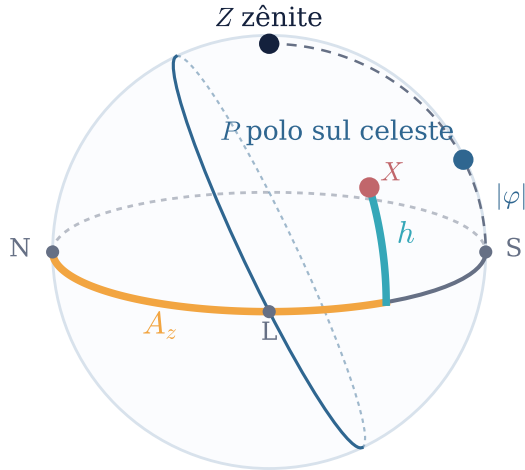
Aplicando a lei dos cossenos ao lado $\overline{ZX}$:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos H,$$

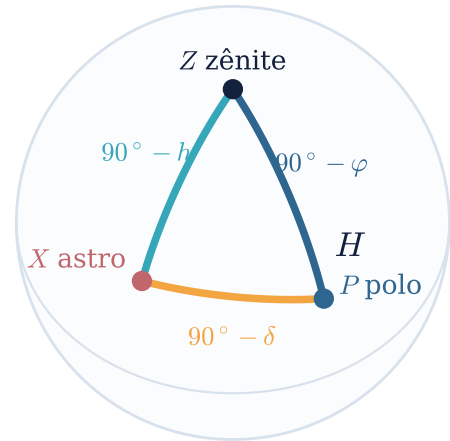
ou seja,

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

(a) a esfera celeste em Joinville



azimute contado do Norte para Leste;
altura medida sobre o círculo vertical

(b) o triângulo esférico PZX 

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

Figura 1: **A esfera celeste e o triângulo que resolve tudo.** (a) O céu visto de Joinville ($\varphi = -26,30^\circ$): o horizonte, o equador celeste, o polo sul celeste elevado de $|\varphi|$ sobre o ponto Sul e um astro X com seu azimute A_z (em dourado, contado do Norte para Leste) e sua altura h (em ciano, sobre o círculo vertical). (b) Os mesmos três pontos formam o triângulo esférico PZX : os lados são $90^\circ - \varphi$, $90^\circ - \delta$ e $90^\circ - h$, e o ângulo no polo é o ângulo horário H . Aplicar a lei dos cossenos a esse triângulo produz a equação da altura, e ela responde sozinha a quase toda pergunta prática de observação.

Essa única expressão responde a quase toda pergunta prática de observação. Para $H = 0$, o objeto está no meridiano e h é máxima, valendo $h_{\max} = 90^\circ - |\varphi - \delta|$. Impondo $h = 0$ obtém-se o ângulo horário do nascer e do poente,

$$\cos H_0 = -\tan \varphi \tan \delta,$$

e daí a duração do arco diurno. Quando $|\tan \varphi \tan \delta| > 1$ não há solução: o objeto é circumpolar (nunca se põe) ou nunca nasce, dependendo do sinal. Para Joinville, com $\varphi \simeq -26^\circ$, objetos com $\delta < -64^\circ$ são circumpolares.

O azimute sai da lei dos senos aplicada ao mesmo triângulo:

$$\sin A_z = -\frac{\cos \delta \sin H}{\cos h}.$$

Tempo sideral e tempo solar

A distinção entre os dois tempos é geométrica e pode ser deduzida em três linhas. Em um dia, a Terra gira 360° em relação às estrelas, mas simultaneamente avança em sua órbita um ângulo

$$\Delta\theta = \frac{360^\circ}{365,25} \simeq 0,986^\circ.$$

Para que o Sol volte ao meridiano, a Terra precisa girar esse tanto a mais. O dia solar é portanto mais longo que o sideral por

$$\Delta t = \frac{0,986^\circ}{360^\circ} \times 24 \text{ h} \simeq 3 \text{ min } 56 \text{ s},$$

donde o dia sideral vale $23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}$. É esse acúmulo de quase quatro minutos por dia que faz o céu noturno girar ao longo do ano: em seis meses, a defasagem chega a doze horas, e as constelações visíveis à meia-noite são exatamente as opostas.

Da data civil à altura no céu: um exemplo completo

As fórmulas anteriores só se tornam úteis quando se sabe obter Θ , o tempo sideral local, a partir de uma data e de uma hora de relógio. A cadeia tem quatro elos, e vale percorrê-la uma vez inteira com números.

Elo 1: data juliana. A data juliana JD conta dias corridos desde -4712 , e existe justamente para eliminar meses de comprimentos diferentes e anos bissextos das contas. Para uma data do calendário gregoriano, com Y , M , D e a hora universal UT em horas, e fazendo $Y \rightarrow Y - 1$, $M \rightarrow M + 12$ quando $M \leq 2$:

$$JD = [365,25 (Y + 4716)] + [30,6001 (M + 1)] + D + B - 1524,5 + \frac{UT}{24},$$

com $B = 2 - A + [A/4]$ e $A = [Y/100]$.

Elo 2: tempo sideral de Greenwich. O tempo sideral médio em Greenwich cresce linearmente com a data juliana:

$$GMST = 280,46061837^\circ + 360,98564736629^\circ (JD - 2\,451\,545,0).$$

O primeiro número é o GMST em J2000,0; o segundo é o ângulo que a Terra gira em um dia solar, e por isso excede 360° — é a mesma diferença de 3^m56^s deduzida acima, escrita como taxa.

Elo 3: tempo sideral local e ângulo horário. Somando a longitude do observador (positiva a leste) e subtraindo a ascensão reta:

$$\Theta = GMST + \lambda_{\text{obs}}, \quad H = \Theta - \alpha.$$

Elo 4: altura e azimute. Aplicam-se as duas expressões já deduzidas.

Exemplo resolvido: Antares vista de Joinville

Pergunta. Em 20 de agosto de 2026, às 21h00 do horário local (UTC−3), a que altura e em que direção está Antares (α Sco) vista de Joinville?

Dados. Antares em J2000: $\alpha = 16^h29^m24,5^s = 247,352^\circ$, $\delta = -26^\circ25'55'' = -26,432^\circ$. Joinville: $\varphi = -26,30^\circ$, $\lambda_{\text{obs}} = -48,85^\circ$.

Passo 1. 21h00 local = 00h00 UT do dia 21. Com $Y = 2026$, $M = 8$, $D = 21$, UT = 0: $A = 20$, $B = -13$, e

$$JD = 2\,461\,273,5.$$

Passo 2. $JD - 2\,451\,545,0 = 9728,5$ dias, logo

$$GMST = 280,4606^\circ + 360,98564737^\circ \times 9728,5 = 329,331^\circ \pmod{360^\circ} = 21^h57^m19^s.$$

Passo 3. $\Theta = 329,331^\circ - 48,85^\circ = 280,481^\circ = 18^h41^m55^s$, e portanto

$$H = 280,481^\circ - 247,352^\circ = 33,129^\circ = 2^h12^m31^s.$$

O sinal positivo diz que Antares já passou pelo meridiano há pouco mais de duas horas: a estrela está a oeste.

Passo 4. Com $\varphi = -26,30^\circ$ e $\delta = -26,432^\circ$:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H = 0,1973 + 0,6722 = 0,8695,$$

logo $h = 60,4^\circ$. Para o azimute, em vez da lei dos senos — que deixa ambiguidade de quadrante — usa-se a forma com arco-tangente de dois argumentos:

$$A_z = \text{atan2}(-\cos \delta \sin H, \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos H) = 262,2^\circ,$$

ou seja, oeste-sudoeste. **Resposta:** Antares está a 60° de altura, a oeste-sudoeste.

Duas verificações que não custam nada. Primeira: como $\delta \simeq \varphi$, a altura máxima dessa estrela em Joinville é $h_{\max} = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 89,9^\circ$ — Antares passa praticamente pelo zênite daqui, o que explica os 60° mesmo duas horas depois da culminação. Segunda: o arco diurno vale $2H_0/15$ com $\cos H_0 = -\tan \varphi \tan \delta = -0,2456$, ou seja $H_0 = 104,2^\circ$ e 13,9 horas acima do horizonte. Se um desses dois números destoasse do resultado, o erro estaria na cadeia, não no céu.

A eclíptica, a obliquidade e as estações

O movimento anual aparente do Sol descreve um grande círculo, a **eclíptica**, inclinado de $\varepsilon = 23^\circ 26'$ em relação ao equador celeste. Essa inclinação — a obliquidade — é a inclinação do eixo de rotação da Terra em relação ao polo de sua órbita, e é ela, e não a variação de distância ao Sol, que produz as estações.

O argumento quantitativo é direto. O fluxo por unidade de área horizontal em uma superfície com o Sol a uma altura h é

$$F_{\text{sup}} = F_0 \sin h,$$

com F_0 o fluxo perpendicular ao feixe. Combinando com a altura máxima do Sol, $h_{\max} = 90^\circ - |\varphi - \delta_\odot|$, e sabendo que a declinação solar varia entre $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$ ao longo do ano, tem-se toda a explicação: no verão local, $\delta_\odot$ tem o mesmo sinal de φ , o Sol sobe mais e $\sin h$ é maior; simultaneamente, o arco diurno se alonga, porque $\cos H_0 = -\tan \varphi \tan \delta_\odot$ torna-se negativo. Mais fluxo por unidade de área e mais horas de insolação, os dois efeitos na mesma direção.

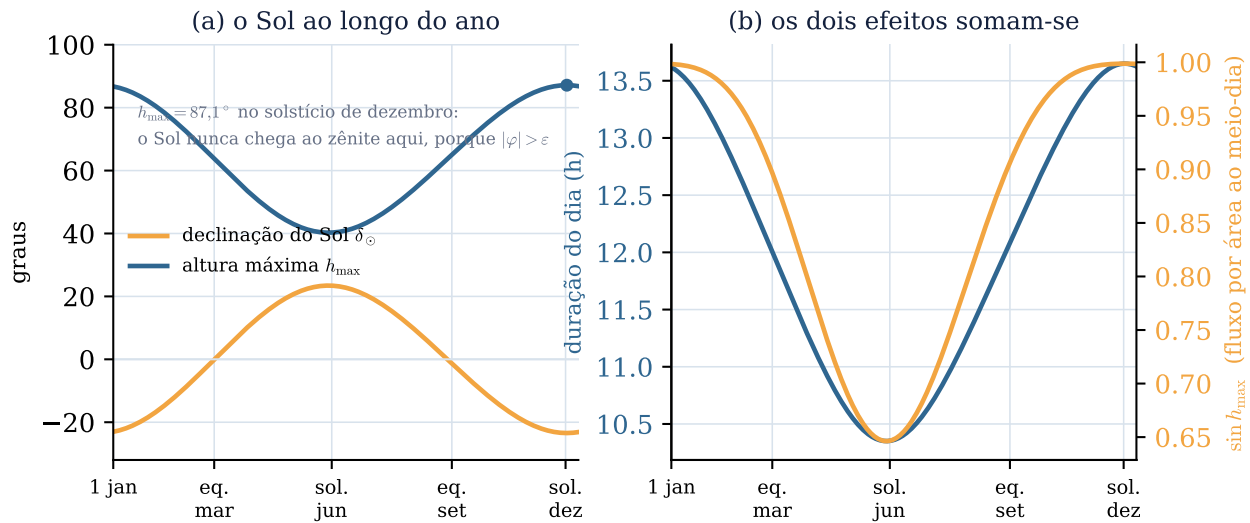


Figura 2: **Por que existem estações, em números, para Joinville.** (a) A declinação do Sol varia entre $\pm\varepsilon$ ao longo do ano, e com ela a altura máxima $h_{\max} = 90^\circ - |\varphi - \delta_\odot|$. Como $|\varphi| = 26,3^\circ$ excede a obliquidade, o Sol nunca alcança o zênite aqui: no solstício de dezembro ele para a $87,1^\circ$. (b) Os dois efeitos caminham juntos e no mesmo sentido: no verão o dia dura mais (13,6 h contra 10,4 h no inverno) e cada metro quadrado recebe mais fluxo ao meio-dia, porque $\sin h_{\max}$ é maior. É a soma dos dois, e não a distância ao Sol, que produz as estações.

Para comparação, a excentricidade orbital terrestre, $e = 0,0167$, produz variação de fluxo de

$$\frac{F_{\text{peri}}}{F_{\text{afel}}} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^2 \simeq 1,069,$$

cerca de 7% — e o periélio ocorre em janeiro, ou seja, no verão do hemisfério sul. Esse efeito existe e é mensurável, mas é secundário frente à modulação geométrica da obliquidade, e tem sinal oposto entre os hemisférios.

Dedução: a equação do tempo

O Sol verdadeiro não é um bom relógio: ele adianta e atrasa em relação a um “Sol médio” fictício que percorreria o equador celeste com velocidade constante. A diferença, chamada **equação do tempo**, é a soma de duas componentes independentes.

Componente da excentricidade. Pela segunda lei de Kepler, a Terra move-se mais rápido no periélio. A velocidade angular varia como

$$\dot{\theta} \propto \frac{1}{r^2},$$

e a anomalia verdadeira difere da média por, em primeira ordem em e ,

$$\nu - M_{\text{an}} \simeq 2e \sin M_{\text{an}}.$$

Convertendo para tempo, a amplitude é

$$\Delta t_e = \frac{2e}{2\pi} \times 1440 \text{ min} \simeq 7,7 \text{ minutos},$$

com período de um ano.

Componente da obliquidade. Mesmo que o Sol se movesse uniformemente sobre a eclíptica, sua *projeção* sobre o equador não seria uniforme, porque os dois círculos são inclinados. A relação entre longitude eclíptica e ascensão reta é $\tan \alpha = \cos \varepsilon \tan \lambda$, cuja diferença vale, em primeira ordem,

$$\alpha - \lambda \simeq -\tan^2 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \sin 2\lambda,$$

com amplitude

$$\Delta t_\varepsilon = \frac{\tan^2(\varepsilon/2)}{2\pi} \times 1440 \simeq 9,9 \text{ minutos},$$

e período de *meio* ano, porque depende de $\sin 2\lambda$.

A soma das duas, com fases diferentes, produz a curva assimétrica de dois máximos e dois mínimos, variando de $-14,2$ a $+16,4$ minutos ao longo do ano. É por isso que o dia mais curto do ano não coincide com o nascer do Sol mais tardio, e é por isso que relógios de sol precisam de tabela de correção. Duas propriedades geométricas independentes — órbita elíptica e eixo inclinado — deixam sua assinatura em um único gráfico observável.

Precessão, nutação e a necessidade de uma época

A Terra não é esférica: a rotação a achata, produzindo um bojo equatorial com excesso de momento de inércia. O Sol e a Lua exercem torque sobre esse bojo, tentando alinhá-lo com a eclíptica. Como a Terra é um giroscópio, a resposta não é o alinhamento, e sim a **precessão** do eixo de rotação.

A taxa pode ser estimada. Para um corpo com momentos de inércia C (polar) e A (equatorial), girando com velocidade angular ω , o torque médio de um perturbador de massa M a distância r produz precessão a

$$\Omega_p \simeq \frac{3}{2} \frac{GM}{r^3 \omega} \left(\frac{C - A}{C} \right) \cos \varepsilon.$$

Com a elipticidade dinâmica da Terra, $(C - A)/C = 3,27 \times 10^{-3}$, obtém-se cerca de $16''$ por ano

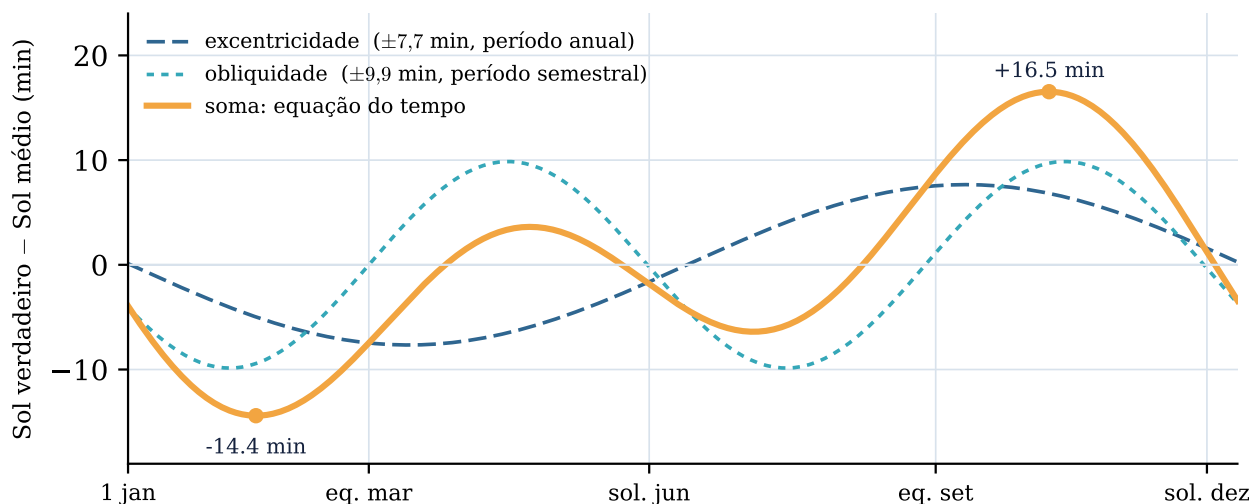


Figura 3: **A equação do tempo e suas duas causas.** A curva dourada é a diferença entre o Sol verdadeiro e o Sol médio, calculada a partir das duas expressões deduzidas acima. A componente da excentricidade (tracejada longa) tem período anual e amplitude 7,7 minutos; a da obliquidade (tracejada curta) tem período semestral e amplitude 9,9 minutos. A soma, com as fases reais, vai de $-14,4$ minutos em meados de fevereiro a $+16,5$ minutos no início de novembro. Duas propriedades geométricas independentes deixam sua assinatura em um único gráfico observável — e é por isso que um relógio de sol precisa de tabela de correção.

para a contribuição solar e $34''$ para a lunar — a Lua domina, apesar de muito menos massiva, porque o torque escala com M/r^3 . A soma,

$$\Omega_p \simeq 50,3'' \text{ por ano,}$$

corresponde a um período de $360^\circ/50,3'' \simeq 25\,800$ anos.

As consequências observacionais são grandes. O ponto vernal — origem da ascensão reta — desliza ao longo da eclíptica; a estrela polar muda ao longo dos milênios; e as coordenadas equatoriais de *todos* os objetos mudam continuamente, a taxas de até $50''$ por ano em ascensão reta. Um catálogo sem indicação de época é, portanto, inutilizável. Em um único ano o deslocamento já é de quase um minuto de arco ($50,3''$); em cinquenta anos acumula $2515''$, ou seja $42'$ — sete décimos de grau, muito acima do campo de visão de qualquer instrumento moderno.

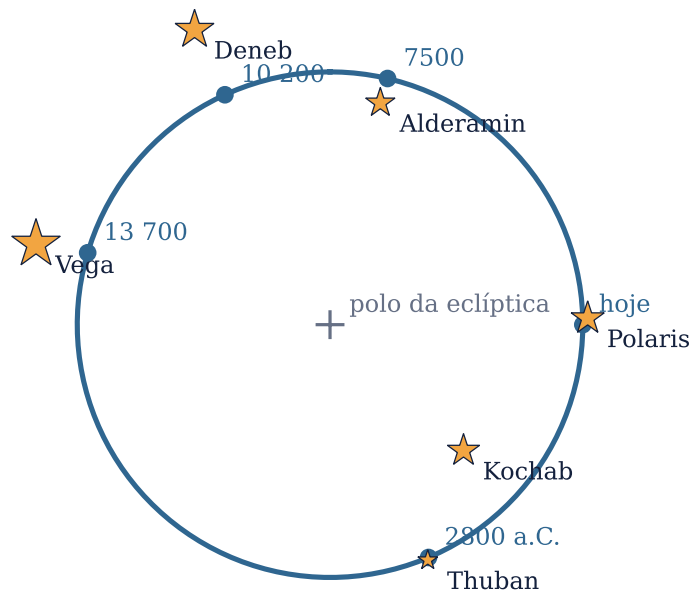
Sobreposta à precessão há a **nutação**, uma oscilação de pequena amplitude cujo termo principal tem período de 18,6 anos — o período de regressão dos nodos da órbita lunar — e amplitude de $9,2''$ em obliquidade. Precessão é o movimento secular suave; nutação é o tremor periódico superposto.

Daí a distinção entre dois conceitos que costumam ser confundidos: a **época** é o instante ao qual se referem a posição e o movimento próprio do objeto (por exemplo, J2000.0, correspondente a JD 2 451 545,0 em Tempo Terrestre); o **equinócio** é o instante que define a orientação dos eixos do sistema de coordenadas. Um catálogo pode listar posições de época 2016 no equinócio J2000 — e as duas informações são necessárias.

Sistemas de referência modernos

A necessidade de corrigir precessão desaparece se o sistema de coordenadas for ancorado em objetos que não se movem. Essa é a ideia do **ICRS** (*International Celestial Reference System*), adotado em 1998: um sistema cinematicamente não rotante, cuja realização prática, o ICRF, é definida pelas posições de algumas centenas de quasares e núcleos ativos observados por interferometria de rádio

o polo celeste norte em 26 000 anos



raio do círculo $= \varepsilon = 23,44^\circ$; $50,3''$ por ano

Figura 4: **O polo celeste não fica parado.** Trajetória do polo celeste norte entre as estrelas, calculada com $50,3''$ por ano: um círculo de raio $\varepsilon = 23,44^\circ$ em torno do polo da eclíptica, percorrido em cerca de 25 800 anos. Polaris ocupa o posto hoje quase por acaso; Thuban o ocupava quando as pirâmides foram erguidas, e Vega o ocupará por volta do ano 13 700. As posições das estrelas foram convertidas de coordenadas equatoriais J2000 para eclípticas. É essa deriva que obriga todo catálogo a declarar sua época.

de base muito longa. Por estarem a distâncias de gigaparsecs, esses objetos não têm movimento próprio detectável — a versão mais recente do catálogo fixa os eixos com estabilidade melhor que 0,03 milissegundo de arco.

Os eixos do ICRS foram escolhidos para coincidir, dentro da incerteza, com o equador e o equinócio médios de J2000.0. Mas a coincidência é histórica, não definitiva: o ICRS *não* é definido pelo equador terrestre, e é justamente por isso que ele não precisa de correção de precessão.

No óptico, a realização é o **Gaia-CRF**¹, construído a partir de centenas de milhares de quasares medidos pela própria missão e alinhado ao ICRF por rotação global. Todo o catálogo do Gaia — e, por extensão, quase toda a astrometria moderna — está expresso nesse referencial. Quando o projeto extra deste capítulo pede paralaxes e movimentos próprios do Gaia, o que está sendo usado é essa infraestrutura.

Da posição de catálogo à posição no telescópio

Apontar um telescópio exige uma cadeia de correções, e é instrutivo enumerá-la porque cada elo corresponde a um fenômeno físico distinto:

1. **Movimento próprio:** propagar a posição da época do catálogo para a data da observação, $\alpha(t) = \alpha_0 + \mu_\alpha(t - t_0)$. Para estrelas rápidas, isso chega a segundos de arco por década.
2. **Paralaxe anual:** corrigir pelo deslocamento da Terra em sua órbita, com amplitude p e fase dependente da época do ano.
3. **Aberração:** somar o desvio de até 20,5'' devido à velocidade orbital da Terra, mais um termo diurno de 0,3'' da rotação.
4. **Deflexão gravitacional pelo Sol:** $4GM_\odot/c^2b$, que vale 1,75'' no limbo solar e ainda 4 mas a 90° de distância angular — portanto não desprezível para astrometria de precisão em *qualquer* direção do céu.
5. **Precessão e nutação:** girar os eixos do equinócio de catálogo para o da data.
6. **Movimento do polo e rotação da Terra:** aplicar a orientação instantânea real do planeta, medida e publicada continuamente.
7. **Refração atmosférica:** elevar a posição aparente conforme a distância zenital.

A soma dessas correções pode ultrapassar um minuto de arco. Nenhuma delas é opcional em trabalho de precisão, e a ordem importa — é por isso que existem bibliotecas padronizadas de redução astrométrica, e por que reimplementá-las manualmente é um caminho conhecido para erros silenciosos.

Laboratório

O laboratório interativo deste capítulo está disponível em:

<https://rafaelcrdelima.github.io/Astronomia/laboratorio-capitulo-1a/>

¹O **Gaia** é o satélite de astrometria da Agência Espacial Europeia, lançado em dezembro de 2013 e operado a partir do ponto de Lagrange L2, a 1,5 milhão de quilômetros da Terra. Mediu posição, paralaxe e movimento próprio de cerca de dois bilhões de objetos, com incerteza de poucos microssegundos de arco para as estrelas brilhantes e de algumas centenas para as mais fracas, até magnitude 21. As observações terminaram em janeiro de 2025 e o satélite foi desativado em março; os catálogos seguem sendo publicados, e o usado neste texto é o DR3, de 2022. É a infraestrutura sobre a qual quase toda a astrometria moderna está construída, e ele reaparece em vários capítulos.

Neste laboratório você não recebe coordenadas: você as *produz*. O painel mostra a abóbada celeste vista de Joinville, e o único instrumento é um que lê **azimute e altura** — exatamente o que se mede do chão. Tudo o mais tem de ser deduzido: a ascensão reta e a declinação saem da conversão com a hora sideral, e a orientação de dois planos fundamentais do céu sai de ajustar um círculo máximo a um conjunto de medidas suas. Ao final, dois números que este capítulo tratou como dados — a inclinação do plano galáctico e a obliquidade da eclíptica — terão sido *medidos*, com incerteza.

Roteiro de experimentos

Preparação dos dados. Abra o laboratório. Escolha a *precisão de leitura* do instrumento — é o erro que suas medidas vão carregar, e vale começar com um valor generoso para depois apertá-lo. Ajuste o dia do ano e a hora local, ligue as populações que quiser ver (campo estelar, faixa galáctica, Sol, planetas) e clique nos objetos na abóbada para registrar cada medida. O CSV exportado traz, para cada registro, o azimute e a altura lidos, a data e a hora, e as coordenadas equatoriais correspondentes.

Experimento 1: do que se mede ao que se cataloga. Registre meia dúzia de objetos em uma mesma noite. Para *um* deles, faça a conversão à mão: com a latitude $\varphi = -26,30^\circ$, a hora sideral local e as fórmulas da seção de transformação, obtenha δ e depois H , e daí $\alpha = \theta_{\text{LST}} - H$. Só então compare com a coluna do arquivo. Se não bater, o erro costuma estar no quadrante do azimute ou no sinal da latitude — e é justamente para pegar isso que a conta é feita à mão uma vez.

Experimento 2: o mesmo objeto, horários diferentes. Escolha um objeto e registre-o em três ou quatro horários da mesma noite. Monte uma tabela com azimute, altura, α e δ . Duas colunas mudam muito e duas praticamente não mudam. Explique por quê, e diga quanto o ângulo horário avançou entre a primeira e a última medida — compare com o intervalo de tempo decorrido e comente a diferença entre dia solar e dia sideral.

Experimento 3: o plano galáctico é um círculo máximo? Ligue a faixa galáctica e registre pelo menos vinte objetos dela, espalhados pelo céu — não concentre tudo em um pedaço. Faça o gráfico de δ contra α . Se o plano galáctico for um círculo máximo inclinado em relação ao equador celeste, os pontos devem cair sobre uma senoide, e não sobre uma reta. Ajuste e obtenha a inclinação i e a declinação do polo galáctico, com incerteza.

Experimento 4: a eclíptica, medida pelo Sol. Registre a posição do Sol em muitas datas ao longo de um ano — quanto mais espalhadas, melhor. O mesmo ajuste de círculo máximo devolve agora a **obliquidade da eclíptica** ε . Compare com o valor de referência, $23,44^\circ$, e discuta se a diferença é compatível com a precisão de leitura que você escolheu.

Experimento 5: os planetas estão na eclíptica? Registre os cinco planetas visíveis a olho nu e converta cada um para coordenadas eclípticas usando a *obliquidade que você mediu*, não a tabelada. As latitudes eclípticas β devem sair pequenas, mas não nulas. Diga quanto valem, e explique a origem física do resíduo.

Experimento 6: o preço da precisão. Repita o Experimento 4 com uma precisão de leitura visivelmente pior e outra visivelmente melhor, mantendo o mesmo número de medidas. Registre como a incerteza de ε responde. A relação esperada é $\sigma \propto 1/\sqrt{N}$ para N medidas de mesma qualidade: verifique se o que você observa é compatível com isso, e diga o que sai mais barato — medir melhor ou medir mais vezes.

Formato da entrega

A entrega é um artigo curto, no modelo da disciplina, e o próprio laboratório monta o esqueleto.

Gerando o esqueleto. Na aba *Template de Relatório*, escreva os nomes do grupo — até três — e clique em *Gerar template*. O laboratório salva `main.tex` já no modelo de artigo da disciplina, o logotipo, as figuras dos ajustes, as tabelas em LaTeX e os CSVs das medidas. As

figuras e as tabelas já estão referenciadas no texto: o que falta é escrever. Registre as medidas *antes* de gerar.

O que o artigo precisa conter. A tabela das medidas registradas, com a precisão de leitura declarada; a conversão feita à mão no Experimento 1, mostrada passo a passo; os dois gráficos de ajuste; e os dois resultados principais com incerteza — a inclinação do plano galáctico e a obliquidade da eclíptica — comparados com os valores de referência. Feche discutindo qual das duas medidas saiu melhor e por quê.

Capítulo 2 – Paralaxe, brilho e luminosidade

O Capítulo 1 ensinou a dizer *onde* um objeto está: uma direção, em um sistema de referência declarado, em uma época declarada. Isso já permite apontar um telescópio, mas não permite dizer nada sobre a estrela em si. Uma direção não distingue uma anã fraca e próxima de uma supergigante distante.

Este capítulo fecha essa lacuna com uma única medida geométrica — a paralaxe — e com a cadeia que sai dela. O percurso é sempre o mesmo, e vale tê-lo na cabeça antes de começar:

ângulo medido $\rightarrow$ distância $\rightarrow$ magnitude absoluta $\rightarrow$ luminosidade

Cada seta é uma equação de uma linha, e cada uma carrega uma hipótese que precisa ser dita em voz alta. **É este capítulo, e não o anterior, que o laboratório e o artigo cobram** — e ele é autocontido: quem leu os Capítulos 1 e 2 tem tudo para escrever o artigo.

Antes de tudo: quanto vale uma unidade astronômica?

Toda a cadeia acima parte de uma distância suposta conhecida: o raio da órbita da Terra, $a_{\oplus} = 1$ UA. Em quilômetros ela vale 149 597 870,7 km, e esse número vai aparecer daqui a pouco, quando o parsec for convertido em metros.

Mas como alguém mediu isso sem ir até o Sol?

Essa é a parte interessante: historicamente, não se mediu diretamente a distância Terra–Sol. Primeiro se descobriu a *geometria relativa* do Sistema Solar, e só depois se mediu uma distância mais acessível para fixar a escala. Um dos métodos clássicos foi o trânsito de Vênus.

O que já se sabia. A terceira lei de Kepler dá o semieixo de qualquer planeta a partir do seu período, em unidades da órbita da Terra. Para Vênus o período nem precisa ser medido diretamente: observa-se o *período sinódico*, o intervalo entre duas conjunções inferiores consecutivas, que vale 583,92 dias. Como

$$\frac{1}{P_{\text{sin}}} = \frac{1}{P_V} - \frac{1}{P_{\oplus}},$$

segue $P_V = 224,70$ dias = 0,6152 ano, e a terceira lei fecha a conta:

$$a_V = P_V^{2/3} = 0,723 a_{\oplus}.$$

Repare no que isso significa. Sabia-se, desde o século XVII, que Vênus orbita a 0,723 do raio da órbita terrestre — com quatro algarismos. Sabia-se a *forma* do Sistema Solar inteiro, e não se sabia o seu *tamanho*. Faltava um único número em quilômetros para converter a planta inteira em uma escala.

O trânsito. Vênus passa entre a Terra e o Sol a cada 583,92 dias, mas quase sempre por cima ou por baixo do disco, porque a sua órbita é inclinada de $3,4^\circ$. Só quando a conjunção inferior cai perto de um dos nodos é que ele cruza o disco solar — e isso acontece em pares separados por oito anos, com intervalos de 105,5 e 121,5 anos entre os pares. Os últimos foram em 2004 e 2012; o próximo será em 2117.

As expedições. A raridade transformou cada trânsito em uma corrida internacional — e, em 1761 e 1769, no primeiro esforço científico verdadeiramente global. Nações em guerra entre si despacharam observadores para a Sibéria, Madagascar, Terra Nova, o Cabo da Boa Esperança e o Pacífico. Charles Mason e Jeremiah Dixon foram mandados ao Cabo em 1761, anos antes de

traçarem a linha que leva os seus nomes. Em 1769 a Royal Society enviou James Cook ao Taiti: observar o trânsito era a missão *oficial* da viagem do *Endeavour*, e o lugar de onde ele observou chama-se Point Venus até hoje.

Duas histórias mostram o prego. Jean-Baptiste Chappe d’Auteroche cruzou a Sibéria até Tobolsk em 1761 e observou; em 1769 atravessou o Atlântico e o México até San José del Cabo, na Baixa Califórnia, e observou de novo. Enquanto a expedição se preparava para voltar, uma epidemia de febre atingiu o povoado. Chappe ficou para cuidar dos doentes, contraiu a doença e morreu em 1º de agosto. **Um único integrante da expedição chegou vivo a Paris**, levando consigo as observações.

E há Guillaume Le Gentil, que partiu da França em 1760 rumo a Pondicherry. A Guerra dos Sete Anos entregou a cidade aos britânicos, o navio teve de dar meia-volta, e em 6 de junho de 1761 ele viu um céu perfeitamente limpo — do convés de um navio em movimento, de onde nenhuma medida presta. Decidiu esperar os oito anos até o trânsito seguinte. Passou-os na região, montou um pequeno observatório em Pondicherry, e em 4 de junho de 1769 o céu amanheceu encoberto. Não viu nada. Voltou a Paris em outubro de 1771, onze anos depois de partir, e encontrou-se declarado morto e substituído na Academia Real de Ciências; foram necessários um longo processo e a intervenção do rei para reaver a cadeira. As versões mais contadas acrescentam bens saqueados e uma esposa recasada, mas esses detalhes são hoje questionados pelos historiadores — e a parte documentada já basta: onze anos de viagem, dois trânsitos, nenhuma medida.

Durante um trânsito, dois observadores muito afastados na Terra veem Vênus cruzar o disco solar por cordas diferentes. Isso é paralaxe — a mesma da estrela, com dois ajustes: a base agora é a separação entre os dois observatórios, e não a órbita da Terra; e o pano de fundo não está no infinito, mas a $a_{\oplus}$.

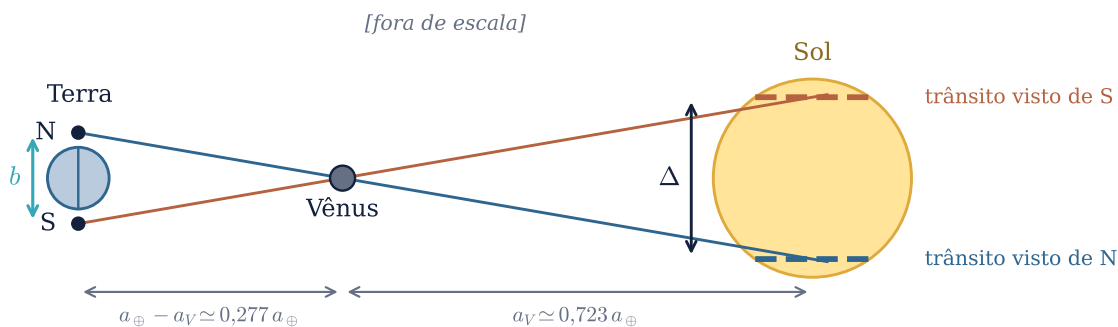


Figura 5: **O trânsito de Vênus e a escala do Sistema Solar.** Dois observatórios separados pela base b veem Vênus projetado sobre cordas diferentes do disco solar. Os raios se cruzam em Vênus, e por isso quem observa ao norte vê a corda mais ao sul. A separação Δ das duas cordas, medida em ângulo a partir da Terra, é o que se compara com a previsão geométrica. As proporções 0,277 e 0,723 vêm de Kepler; o que falta é o fator de conversão para quilômetros.

A geometria, simplificada. Tome os dois observadores separados por uma base b , medida perpendicularmente à linha de visada. Vale para eles a mesma regra de sempre: um objeto a distância d , visto de dois pontos separados por b , aparece em direções que diferem por b/d .

Aplicada a Vênus, que no momento do trânsito está a $a_{\oplus} - a_V$, ela dá um deslocamento aparente de $b/(a_{\oplus} - a_V)$.

O ponto que exige atenção é o passo seguinte. Na paralaxe estelar o pano de fundo são estrelas tão distantes que não se movem, e o deslocamento medido é o do objeto e mais nada. Aqui o pano de fundo é o Sol — e o Sol é um objeto a distância finita, $a_{\oplus}$. A mesma regra vale para ele: visto dos dois observatórios, ele também aparece em direções diferentes, separadas por $b/a_{\oplus}$.

Os dois deslocamentos apontam para o mesmo lado — ambos contrários ao movimento do observador — e Vênus se desloca mais, por estar mais perto. Contra o disco solar, portanto, o que sobra é o quanto Vênus ganhou do Sol, e é essa *diferença* que se mede:

$$\Delta\theta = \frac{b}{a_{\oplus} - a_V} - \frac{b}{a_{\oplus}} = \frac{b}{a_{\oplus}} \cdot \frac{a_V}{a_{\oplus} - a_V}.$$

O segundo fator é puro Kepler: com $a_V = 0,723 a_{\oplus}$,

$$k = \frac{a_V}{a_{\oplus} - a_V} = \frac{0,723}{0,277} = 2,61,$$

um número adimensional que independe da escala. Invertendo,

$$a_{\oplus} = k \frac{b}{\Delta\theta} = 2,61 \frac{b}{\Delta\theta}$$

e aí está a alavanca: b se mede em quilômetros com geodésia, $\Delta\theta$ se mede em segundos de arco com um telescópio, e o quociente entrega a unidade astronômica em quilômetros. **Nenhuma distância astronômica precisou ser conhecida de antemão.**

Exemplo numérico

Dois observatórios com base projetada $b = 10\,000$ km. Vale a pena ver as duas parcelas separadas antes de somá-las. Vênus está a 41,4 milhões de quilômetros, o Sol a 149,6:

$$\frac{b}{a_{\oplus} - a_V} = 49,84'', \quad \frac{b}{a_{\oplus}} = 13,79'', \quad \Delta\theta = 49,84'' - 13,79'' = 36,05'',$$

que é o mesmo que a fórmula compacta entrega:

$$\Delta\theta = 2,61 \times \frac{10\,000}{1,496 \times 10^8} = 1,75 \times 10^{-4} \text{ rad} = 36''.$$

Esquecer que o Sol também se desloca não é um detalhe: daria 49,8'' em vez de 36,0'', e uma unidade astronômica errada por um fator 1,38. Trinta e seis segundos de arco, sobre um disco solar de 1918'': as duas cordas ficam separadas por cerca de 1/53 do diâmetro do Sol. É pouco, mas é mensurável — e a conta ao contrário, partindo de $\Delta\theta = 36''$ medidos, devolve $a_{\oplus} = 1,496 \times 10^8$ km.

Na prática ninguém media a separação das cordas diretamente. Halley propôs, em 1716, cronometrar a *duração* do trânsito: cordas a alturas diferentes têm comprimentos diferentes, e medir um intervalo de tempo com relógio é muito mais preciso do que medir uma separação angular pequena com retículo.

O resultado, e o fim do método. O céu não coopera por decreto, e nenhuma dose de planejamento resolve nuvem — mesmo assim o valor foi convergindo. Encke, reduzindo em 1824 os dados dos dois trânsitos, obteve 153,4 milhões de quilômetros, 2,5% acima do valor real. Após os trânsitos de 1874 e 1882, já com fotografia, Newcomb combinou os quatro e chegou em 1895 a $149,59 \pm 0,31$ milhões, dentro de 0,03%. O erro caiu quase cem vezes em setenta anos, e continuou caindo por

outros caminhos: em 1961 o eco de radar em Vênus mediu a distância Terra–Vênus diretamente, com precisão de partes em um milhão, e tornou o método do trânsito obsoleto de uma vez.

Hoje a questão está encerrada por definição: desde 2012 a União Astronômica Internacional *define* a unidade astronômica como exatamente 149 597 870 700 metros. Ela deixou de ser uma quantidade a medir e virou uma régua fixa — mas a régua só existe porque alguém, antes, foi ao Taiti.

A paralaxe: a única distância medida por geometria

Ao longo de um ano a Terra percorre uma órbita de raio $a_{\oplus} = 1$ UA. Vista de uma estrela próxima, essa órbita tem um tamanho angular; visto da Terra, o efeito é o inverso: a estrela parece descrever uma pequena elipse contra o fundo de objetos muito mais distantes. Metade do deslocamento total ao longo do ano é a **paralaxe** p .

A relação sai da definição de tangente aplicada ao triângulo retângulo formado pelo Sol, pela Terra e pela estrela:

$$\tan p = \frac{a_{\oplus}}{d} \implies p \simeq \frac{a_{\oplus}}{d},$$

com p em radianos. A aproximação de ângulo pequeno, deduzida no Capítulo 1, é excelente aqui: mesmo a estrela mais próxima tem $p < 10^{-5}$ rad.

Definindo o **parsec** como a distância em que $p = 1''$, e usando $1'' = 4,848 \times 10^{-6}$ rad, a relação $p \simeq a_{\oplus}/d$ dá

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ UA}}{4,848 \times 10^{-6}} = 206\,265 \text{ UA},$$

e o resultado sai em *unidades astronômicas*, porque dividir uma UA por um número puro devolve UA. O número que apareceu não é novo: 206 265 é exatamente quantos segundos de arco cabem em um radiano, a mesma constante do Capítulo 1. Só então, substituindo $1 \text{ UA} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$, chega-se ao valor em metros:

$$1 \text{ pc} = 206\,265 \times 1,496 \times 10^{11} \text{ m} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}.$$

Guarde as duas formas. O valor em metros serve para contas de física; é a outra, $1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ UA}$, que diz o que o parsec *é* — a distância em que a órbita da Terra subtende um segundo de arco.

A relação de trabalho torna-se

$$d [\text{pc}] = \frac{1}{p [']} = \frac{1000}{p [\text{mas}]}$$

em que **mas** é o **milissegundo de arco**, com $1 \text{ mas} = 10^{-3}''$; é dessa conversão que vem o fator mil. Atenção à sigla: ela é um símbolo de unidade, não a conjunção portuguesa. É nela que os catálogos publicam, porque as paralaxes reais são minúsculas — a maior do céu, a de Proxima Centauri, vale cerca de 770 mas, e o Gaia mede rotineiramente valores abaixo de 1 mas. O parsec não é uma unidade arbitrária: ele foi definido exatamente para que essa inversão fosse exata.

Vale insistir em por que essa medida é especial. Ela não supõe nada sobre a estrela — nem temperatura, nem tamanho, nem composição. Supõe apenas que a Terra orbita o Sol e que a geometria euclidiana vale nessa escala. Todas as outras régua da astronomia — Cefeidas, supernovas, a própria escada de distâncias — são calibradas, direta ou indiretamente, contra esta.

Medir uma paralaxe em uma imagem

Na prática ninguém mede p diretamente: mede-se o *deslocamento* de uma estrela entre duas imagens do mesmo campo, tomadas em épocas separadas por seis meses, e converte-se esse deslocamento em ângulo.

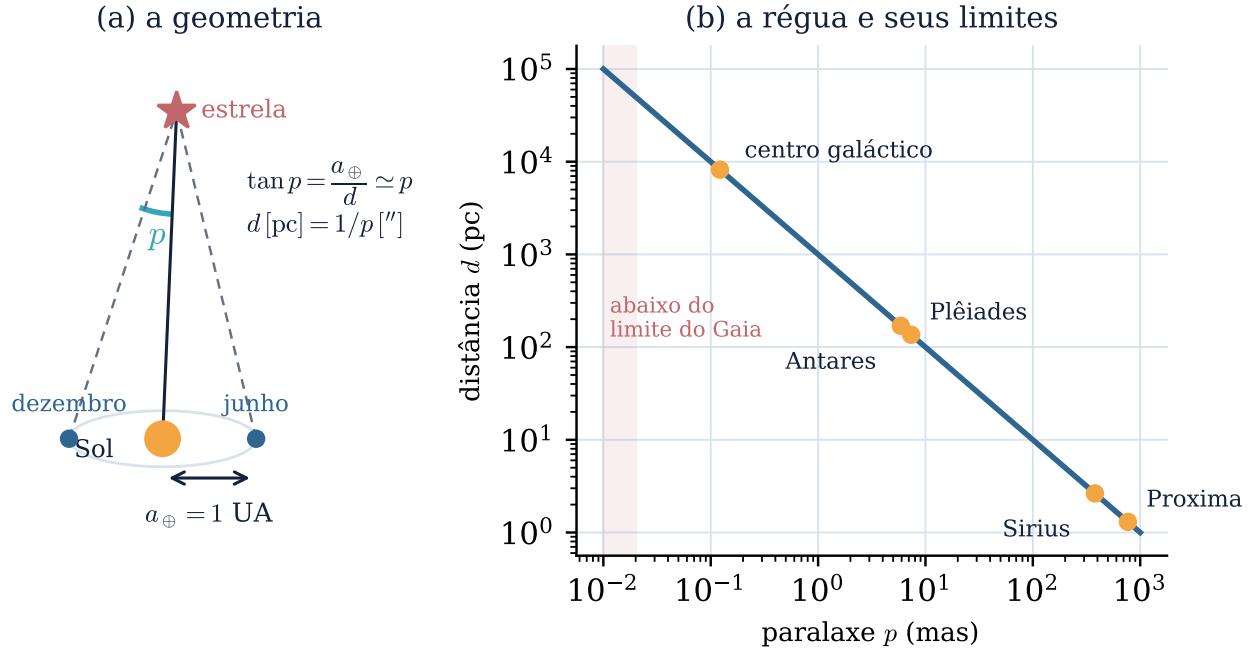


Figura 6: **A única distância medida por geometria pura.** (a) A base do triângulo é o raio da órbita terrestre; o ângulo p é metade do deslocamento aparente entre duas observações separadas por seis meses. O ângulo está muito exagerado: para a estrela mais próxima ele vale $0,77''$, dez mil vezes menor que o desenho sugere. (b) A relação $d = 1/p$ em escala logarítmica, com marcos reais. O Gaia mede paralaxes com incerteza de dezenas de microssegundos de arco, o que mantém a régua utilizável até alguns quiloparsecs; além disso, a geometria cede lugar a métodos indiretos.

Se as duas imagens estão no mesmo sistema de pixels, e a estrela se deslocou de

$$\Delta_{\text{px}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

pixels, basta conhecer a **escala da imagem** s , em milissegundos de arco por pixel, para obter

$$p [\text{mas}] = \frac{\Delta_{\text{px}}}{2} s$$

O fator 2 é onde quase todo mundo erra na primeira vez. O deslocamento entre janeiro e julho vai de um extremo ao outro da elipse paraláctica: ele vale $2p$, e não p . Quem esquece de dividir obtém uma paralaxe duas vezes maior, uma distância duas vezes menor e — porque o fluxo cai com o quadrado — uma luminosidade quatro vezes menor. O erro não gera nenhum sintoma: todas as contas seguintes funcionam, e o resultado simplesmente está errado por um fator conhecido.

Duas verificações baratas evitam o problema. Primeira: a paralaxe obtida tem de ser positiva e menor que 770 mas, que é o valor de Proxima Centauri, a maior do céu. Segunda: se o catálogo trouxer a paralaxe medida, compare — a sua conta e a dele têm de coincidir dentro da incerteza.

A incerteza da distância

Nenhuma medida vem sem incerteza, e a da paralaxe se propaga para a distância de maneira particularmente simples. A regra geral, para uma grandeza $q = q(x_1, \dots, x_n)$ calculada a partir de medidas com erros independentes, é

$$\sigma_q^2 = \sum_i \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2,$$

deduzida no Capítulo 19. Aqui há uma variável só. Como $d = 1/p$, a derivada é $dd/dp = -1/p^2$, e a regra dá $\sigma_d = |-1/p^2| \sigma_p = \sigma_p/p^2$. Dividindo por $d = 1/p$:

$$\frac{\sigma_d}{d} = \frac{\sigma_p}{p}$$

O erro *relativo* passa intacto de uma grandeza para a outra. Uma paralaxe com 5% de incerteza dá distância com 5% de incerteza; uma com 30% dá distância com 30% — e é aí que começa o problema.

O ponto delicado é que $d = 1/p$ é exata para os valores *verdadeiros*, mas não para os medidos. A razão é geométrica, e vale ver de perto: $1/x$ **não é uma reta**. Ela fica cada vez mais íngreme à medida que x se aproxima de zero, e por isso um erro para baixo na paralaxe custa muito mais em distância do que o mesmo erro para cima.

Tome uma estrela com $p = 10$ mas, isto é, $d = 100$ pc, medida com $\sigma_p = 2$ mas:

$$p_{\text{obs}} = 12 \text{ mas} \rightarrow 83,3 \text{ pc } (-16,7), \quad p_{\text{obs}} = 8 \text{ mas} \rightarrow 125,0 \text{ pc } (+25,0).$$

O mesmo erro de um desvio-padrão, para cada lado, produz uma excursão 1,5 vez maior na direção das distâncias grandes. Com $\sigma_p/p = 30\%$ a razão vai a 1,9. Erros simétricos em p chegam tortos em d , e a distribuição de $1/p_{\text{obs}}$ ganha uma cauda longa para o lado de longe.

Quanto maior σ_p/p , mais perto de $p = 0$ chega a cauda inferior — e ali d diverge. Em $\sigma_p/p = 50\%$, cerca de 2% das medidas saem com *paralaxe negativa*, para a qual $1/p$ devolve uma distância negativa, isto é, nada. Não é curiosidade: os catálogos do Gaia trazem paralaxes negativas, e é por isso que existe um limiar em vez de uma degradação suave.

Uma consequência prática merece registro. Como $1/x$ é monótona, ela preserva *medianas*: a mediana de $1/p_{\text{obs}}$ continua sendo a distância verdadeira, mesmo com 30% de erro. O que se estraga é a *média*, que foge para cima e, no limite gaussiano, sequer converge. Se você precisa de um número único, use a mediana e um intervalo de percentis — nunca a média.

A regra prática, hoje padrão em trabalhos com dados do Gaia, é:

- $\sigma_p/p \lesssim 0,1$: inverter é perfeitamente aceitável;
- $\sigma_p/p \gtrsim 0,2$: não inverta — infira, com o tratamento estatístico discutido no Capítulo 3.

Em qualquer relatório, portanto, a distância se escreve $d \pm \sigma_d$, e a razão σ_p/p se calcula *antes* de decidir se a inversão vale.

Dois vieses distintos, e em sentidos opostos. O que acabou de ser descrito — a assimetria de $1/p_{\text{obs}}$ para uma estrela de paralaxe fixa — empurra a *média* para distâncias maiores. Há um segundo efeito, de natureza diferente: como há mais estrelas longe do que perto, uma estrela *observada* com certa paralaxe tem probabilidade maior de ser uma distante promovida pelo erro do que uma próxima rebaixada. Esse é o viés de Lutz-Kelker, e ele puxa a distância inferida para *menos*. Os dois convivem, o segundo costuma dominar, e é ele que o Capítulo 3 trata.

Fluxo, luminosidade e a lei do inverso do quadrado

Com a distância na mão, o brilho aparente passa a dizer algo sobre a estrela. **Fluxo** F é energia recebida por unidade de área e de tempo, aqui na Terra; **luminosidade** L é energia emitida por unidade de tempo, lá na estrela. Se a emissão é isotrópica e o meio entre nós e ela é transparente, toda a energia emitida em um segundo atravessa uma esfera de raio d , de área $4\pi d^2$:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

As duas hipóteses são reais e podem falhar: emissão isotrópica falha em objetos colimados, e meio transparente falha sempre que há poeira — que é o assunto de duas seções adiante. Enquanto valerm, esta é a ponte entre o que se mede e o que a estrela é.

A escala de magnitudes, deduzida

A escala de magnitudes é a mais antiga grandeza quantitativa da astronomia ainda em uso — e a mais confusa, porque nasceu como uma *classificação* e só depois virou medida.

A origem, por volta de 135 a.C. Hiparco de Niceia (c. 190–120 a.C.), trabalhando em Rodas, compilou um catálogo de cerca de 850 estrelas. Nele as estrelas aparecem repartidas em seis classes: as de **primeira grandeza** são as mais brilhantes, e as de **sexta** as mais fracas ainda visíveis a olho nu. A palavra é literal — *magnitude* quer dizer tamanho, e os antigos supunham que as estrelas mais brilhantes fossem maiores. Daí vem, também, a inversão que atrapalha todo mundo até hoje: os números eram *postos*, não medidas, e o primeiro posto é o do mais notável.

O catálogo de Hiparco não sobreviveu, e a atribuição da escala a ele é tradicional, não demonstrada: o que temos é o *Almagesto* de Ptolomeu, de cerca de 150 d.C., que usa o sistema extensivamente e o difundiu. Em 2022 anunciou-se a identificação de um trecho do catálogo em um palimpsesto do Mosteiro de Santa Catarina, no Sinai; a leitura foi contestada em 2024 e defendida pelos autores em 2025. O caso continua aberto.

O que Pogson fez, em 1856. Norman Pogson (1829–1891) não inventou uma escala: ele *calibrou* a que já existia havia dois mil anos. Medidas fotométricas do século XIX tinham mostrado que uma estrela de primeira grandeza é cerca de cem vezes mais brilhante que uma de sexta — e, o que é mais notável, que os seis postos de Hiparco correspondiam a degraus aproximadamente iguais em *razão* de fluxo, e não em diferença. Isso não é acaso: a resposta do olho a estímulos luminosos é aproximadamente logarítmica, de modo que uma classificação feita por inspeção visual sai naturalmente geométrica.

Pogson então tomou o valor medido, arredondou-o para exatamente 100, e *definiu* a escala por ele. Repare no detalhe que decide o expoente: da primeira à sexta grandeza há **cinco intervalos**, e não seis. Por isso o fator por magnitude é $\sqrt[5]{100} = 2,512$, e a definição fica:

$$\frac{F_1}{F_2} = 100^{(m_2 - m_1)/5} \quad \implies \quad m_2 - m_1 = -2,5 \log_{10} \frac{F_2}{F_1}.$$

O coeficiente 2,5 não é escolha estética: ele é $5/\log_{10} 100 = 5/2$, forçado pela definição. O sinal negativo preserva a convenção de postos herdada de Hiparco, em que o mais brilhante recebe o número menor — fonte inesgotável de confusão, e que não vai mudar.

O que restou da classificação antiga são os *valores aproximados*: uma estrela que Hiparco chamaria de primeira grandeza tem hoje magnitude perto de 1. Mas a escala precisou romper os dois extremos da faixa original. Pogson fixou o zero pelo limite do olho nu, colocando a sexta grandeza em 6,0; os objetos mais brilhantes que a primeira classe exigiram números *negativos* — Sirius tem $-1,46$ —, e a fotometria moderna estendeu a escala muito além do olho: o Gaia mede até magnitude 21, cerca de um milhão de vezes mais fraco que o limiar visual. A escala de seis postos virou uma reta contínua e ilimitada, e só o nome e a direção sobreviveram.

Magnitude absoluta e módulo de distância

A magnitude aparente m mistura duas coisas: quanto a estrela emite e quão longe ela está. Para separá-las, define-se a **magnitude absoluta** M como a magnitude que o objeto teria se estivesse a 10 pc.

Aplicando a lei do inverso do quadrado, $F(d)/F(10\text{ pc}) = (10/d)^2$ com d em parsecs, e substituindo na relação de Pogson:

$$m - M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{10}{d} \right)^2 = 5 \log_{10} d - 5.$$

A diferença $m - M$ chama-se **módulo de distância**, e é uma das expressões mais usadas de toda a astronomia. Na forma que se aplica a uma estrela medida, com a distância já conhecida pela paralaxe, é mais cômodo escrevê-la resolvida em M :

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\text{ pc}} \right)$$

Extinção: quando a poeira entra na conta

A hipótese de meio transparente falha com frequência. A poeira interestelar remove fótons da linha de visada por absorção e espalhamento: se a profundidade óptica na direção observada é τ_λ , o fluxo transmitido é $F_{\text{obs}} = F_0 e^{-\tau_\lambda}$. Convertendo para magnitudes pela relação de Pogson,

$$A_\lambda \equiv m_{\text{obs}} - m_0 = -2,5 \log_{10} e^{-\tau_\lambda} = 1,0857 \tau_\lambda.$$

Esse fator 1,086 é apenas $2,5/\ln 10$, e explica por que “uma magnitude de extinção” corresponde aproximadamente a uma profundidade óptica unitária.

A extinção A_V é sempre positiva: ela faz a estrela parecer *mais fraca* do que é. Corrigi-la é subtraí-la da magnitude observada, e a magnitude absoluta completa fica

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\text{ pc}} \right) - A_V$$

Ignorar A_V não produz nenhum sintoma: a conta fecha, as unidades batem, e a luminosidade sai sistematicamente baixa. No plano galáctico, onde A_V pode chegar a dezenas de magnitudes, ignorá-la não introduz erro — torna a medida sem sentido.

Uma consequência quantitativa que vale internalizar: um erro de 0,1 magnitude em A_V produz erro de 5% na distância inferida, pois $\Delta d/d = \ln(10) \Delta A/5 \simeq 0,46 \Delta A$.

Cor: o que $B - V$ mede

Uma cor é uma diferença de magnitudes em duas bandas, por exemplo $B - V$. Pela relação de Pogson, isso equivale a uma razão de fluxos:

$$B - V = -2,5 \log_{10} \frac{F_B}{F_V} + \text{const},$$

com a constante fixada pela calibração do sistema fotométrico. Como a razão F_B/F_V depende da *forma* do espectro e não do brilho total, **a cor é independente da distância** — e é por isso que ela é tão útil: mede temperatura sem exigir que se saiba onde o objeto está.

Mas só enquanto não houver poeira. Como a extinção é maior no azul, a cor observada fica mais vermelha que a intrínseca, e a diferença é o **excesso de cor**

$$E(B - V) = (B - V)_{\text{obs}} - (B - V)_{\text{intr}} = A_B - A_V.$$

A razão entre extinção total e seletiva, $R_V = A_V/E(B - V)$, vale tipicamente 3,1 no meio interestelar difuso. Daí a advertência que vale para qualquer trabalho fotométrico: uma estrela avermelhada pode ser fria, ou pode ser quente e empoeirada, e a cor sozinha não distingue os dois casos.

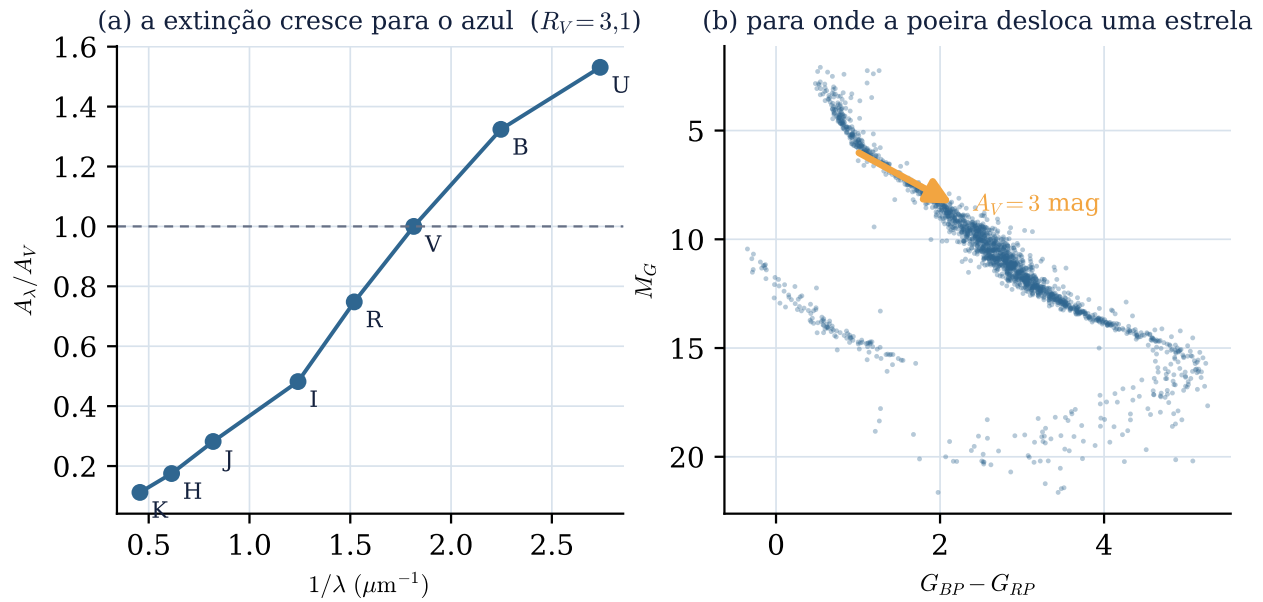


Figura 7: **A poeira empobrece e avermelha.** (a) A extinção relativa A_λ/A_V para a lei padrão do meio difuso ($R_V = 3,1$): cresce monotonicamente para o azul, e no infravermelho próximo cai a um décimo do valor no visível — razão pela qual regiões de formação estelar só se abrem em K ou no infravermelho médio. (b) O efeito no diagrama cor–magnitude construído com as 2000 estrelas do Gaia do projeto extra deste capítulo: a poeira desloca a estrela ao longo da seta, para baixo e para a direita. Sem corrigir, ela seria classificada como mais fria e mais distante do que é.

Da magnitude absoluta à luminosidade

O último elo converte magnitude absoluta em luminosidade, e é onde mora uma armadilha silenciosa. Aplicando a relação de Pogson entre a estrela e o Sol, ambos colocados a 10 pc,

$$M - M_\odot = -2,5 \log_{10} \frac{L}{L_\odot} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{L}{L_\odot} = 10^{(M_\odot - M)/2,5}}$$

A armadilha está em qual $M_\odot$ usar. **As duas constantes não são intercambiáveis:**

- $M_{V,\odot} = 4,83$ — a magnitude absoluta do Sol *na banda V*. É esta que se usa quando M foi obtida a partir de uma magnitude aparente V , como em quase todo trabalho fotométrico introdutório.
- $M_{\text{bol},\odot} = 4,74$ — a magnitude *bolométrica*, que corresponde ao fluxo integrado em todos os comprimentos de onda. Só vale se M também for bolométrica, isto é, se a correção bolométrica já tiver sido aplicada.

As duas escalas diferem exatamente pela correção bolométrica, tratada no Capítulo 3. Trocar uma pela outra desloca a luminosidade em cerca de 8% — pouco para estragar uma ordem de grandeza, o bastante para inutilizar uma comparação, e sem produzir sintoma nenhum.

Exemplo resolvido: de um deslocamento em pixels até a luminosidade

Medidas. Em duas imagens do mesmo campo, separadas por seis meses, uma estrela se deslocou $\Delta_{\text{px}} = 12,5$ pixels. A escala da imagem é $s = 4 \text{ mas/pixel}$. O catálogo informa $\sigma_p = 1,2 \text{ mas}$, magnitude aparente $m_V = 9,40$ e extinção $A_V = 0,18$.

Passo 1 — a paralaxe.

$$p = \frac{\Delta_{\text{px}}}{2} s = \frac{12,5}{2} \times 4 = 25,0 \text{ mas.}$$

Passo 2 — a distância e sua incerteza.

$$d = \frac{1000}{25,0} = 40,0 \text{ pc,} \quad \frac{\sigma_d}{d} = \frac{\sigma_p}{p} = \frac{1,2}{25,0} = 0,048,$$

logo $\sigma_d = 1,9 \text{ pc}$ e $d = 40,0 \pm 1,9 \text{ pc}$. Como $\sigma_p/p = 4,8\%$ está bem abaixo de 10%, inverter a paralaxe é legítimo.

Passo 3 — a magnitude absoluta.

$$M = 9,40 - 5 \log_{10} \left(\frac{40,0}{10} \right) - 0,18 = 9,40 - 3,01 - 0,18 = 6,21.$$

Passo 4 — a luminosidade.

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{(4,83-6,21)/2,5} = 10^{-0,552} = 0,28.$$

Resposta. A estrela está a $40 \pm 2 \text{ pc}$ e emite cerca de 0,28 da luminosidade solar — é intrinsecamente mais fraca que o Sol, apesar de estar entre as vizinhas. Note que os quatro passos usam quatro equações diferentes, e que a incerteza foi carregada desde o início: um resultado sem ela não seria resultado.

Quatro erros que não deixam sintoma

Todos os quatro produzem um número plausível, com unidade certa, e nenhuma mensagem de erro. Aplicados ao exemplo acima, dão:

Erro	$L/L_{\odot}$ obtida	Desvio
— (conta correta)	0,28	—
Esquecer o fator 2 na paralaxe	0,070	4× menor
Esquecer a extinção A_V	0,24	15% menor
Usar 4,74 no lugar de 4,83	0,26	8% menor

O quarto erro possível não aparece na tabela porque não muda o número, e sim o seu significado: **inverter uma paralaxe com σ_p/p acima de 20%**. Nesse regime a distância obtida é enviesada, e nenhuma verificação interna à conta denuncia isso — só a razão σ_p/p , calculada antes.

Laboratório

O laboratório interativo deste capítulo está disponível em:

<https://rafaelcrdelima.github.io/Astronomia/laboratorio-capitulo-1/>

Neste laboratório você trabalhará como em uma pequena campanha observacional. Cada acesso ao painel gera um catálogo diferente, de modo que os números não serão iguais para todos os grupos. O objetivo é medir posições em datas diferentes, exportar o catálogo, transformar observáveis em grandezas físicas e justificar as inferências feitas.

Roteiro de experimentos

Preparação dos dados. Abra o laboratório, selecione uma estrela no mapa e varie a data de observação. Use a opção de sobrepor uma data oposta para visualizar o deslocamento anual da estrela em relação ao grid e às estrelas de referência. Depois use o botão *Exportar CSV*. O arquivo contém paralaxe medida, erro de paralaxe, posições simuladas em janeiro e julho, magnitude nos filtros B , V e R , magnitude absoluta inferida, cor observada, extinção A_V e luminosidade. Use pelo menos 8 estrelas do catálogo para a análise.

Experimento 1: paralaxe por duas épocas. Para cada uma das 8 estrelas escolhidas, use as colunas de posição em janeiro e julho para calcular o deslocamento angular no mapa:

$$\Delta_{\text{px}} = \sqrt{(x_{\text{jul}} - x_{\text{jan}})^2 + (y_{\text{jul}} - y_{\text{jan}})^2}.$$

No laboratório, a escala do mapa é indicada em mas por pixel. Estime a paralaxe por:

$$p_{\text{grid}}(\text{mas}) = \frac{\Delta_{\text{px}}}{2} s_{\text{mapa}}.$$

O arquivo exportado já traz as colunas `deslocamento_jan_jul_px` e `paralaxe_por_grid_mas`: use-as apenas para *conferir* a sua conta, depois de tê-la feito. Se os dois valores não baterem, o erro está na escala do mapa ou no fator 2 — lembre que o deslocamento total entre janeiro e julho vale $2p$, não p . Em seguida compare ambos com a paralaxe medida que consta do CSV. Em seguida calcule a distância:

$$d(\text{pc}) = \frac{1000}{p(\text{mas})}.$$

Calcule também a incerteza aproximada:

$$\sigma_d \simeq d \frac{\sigma_p}{p}.$$

Entregue uma tabela com Δ_{px} , p_{grid} , p , σ_p , d e σ_d . Identifique a estrela com maior erro relativo de distância e explique numericamente por que paralaxes pequenas tornam a distância menos confiável.

Experimento 2: magnitude absoluta. Usando a magnitude aparente m , a distância inferida d e a extinção A_V , calcule para as mesmas estrelas:

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right) - A_V.$$

Compare seu valor de M com a coluna de magnitude absoluta inferida no arquivo exportado. Registre a diferença absoluta $|\Delta M|$ para cada estrela. Se houver diferença relevante, verifique arredondamento, uso de parsec e inclusão de A_V .

Experimento 3: luminosidade a partir de magnitude. Converta magnitude absoluta em luminosidade relativa ao Sol usando $M_{\odot, V} = 4,83$:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{(4,83 - M)/2,5}.$$

Atenção a uma diferença que passa despercebida: aqui M é a magnitude absoluta na banda V , e a constante é $M_{V, \odot} = 4,83$; na seção sobre correção bolométrica a constante era $M_{\text{bol}, \odot} = 4,74$, que só vale para magnitudes bolométricas. As duas escalas diferem exatamente pela correção bolométrica, e misturá-las produz luminosidades erradas sem gerar nenhum sintoma. Ordene as 8 estrelas por luminosidade. Depois ordene as mesmas estrelas por magnitude aparente.

As duas ordenações coincidem? Escolha dois casos em que não coincidam e explique, com números, se a diferença vem principalmente de distância, luminosidade intrínseca ou extinção.

Experimento 4: fotometria em filtros. Para as mesmas 8 estrelas, registre m_B , m_V e m_R . Calcule o índice de cor:

$$B - V = m_B - m_V.$$

Compare estrelas com $B - V$ pequeno e grande. Interprete, com números, quais objetos parecem mais azuis ou mais vermelhos. Discuta por que cor observada não mede apenas temperatura: poeira e extinção também entram na interpretação.

Experimento 5: brilho aparente versus distância. Escolha pares de estrelas com luminosidades inferidas parecidas, mas distâncias diferentes. Para cada par, compare os fluxos relativos com a previsão aproximada da lei do inverso do quadrado:

$$\frac{F_1}{F_2} \simeq \frac{L_1}{L_2} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 10^{-0,4(A_{V,1} - A_{V,2})}.$$

Calcule pelo menos três razões de fluxo previstas e compare com o CSV. Interprete quando a diferença é dominada por distância, luminosidade intrínseca ou extinção.

A entrega: o artigo do Capítulo 2

A entrega é um artigo curto, no modelo da disciplina, e o próprio laboratório monta o esqueleto para você.

Gerando o esqueleto. Na aba *Template de Relatório*, escreva seu nome e clique em *Gerar template*. O laboratório salva um conjunto pronto: `main.tex` já no modelo de artigo da disciplina, o logotipo, as quatro figuras (o mapa do céu e os três gráficos de inferência), as duas tabelas em LaTeX e os dois CSVs. Envie tudo ao Overleaf e compile duas vezes. As figuras e as tabelas já estão referenciadas no texto: o que falta é escrever.

O que cada seção deve conter.

- **Resumo** — quantas estrelas você mediu, e o resultado principal em números: a diferença típica entre a paralaxe medida na régua e a do catálogo, ou o erro relativo da distância da estrela mais distante da amostra, sempre com incerteza.
- **Introdução** — por que o deslocamento aparente anual mede distância por geometria pura, sem hipótese alguma sobre a estrela.
- **Revisão Teórica** — apenas o que você usou: $d = 1/p$, a estimativa $p_{\text{grid}} = (\Delta_{\text{px}}/2) s$, o módulo de distância com extinção, a conversão para luminosidade e $\sigma_d/d = \sigma_p/p$.
- **Dados e Discussão** — os cinco experimentos acima, com as contas e as unidades. Cada figura e cada tabela precisa ser citada no texto.
- **Conclusão** — responda com números: por que o brilho aparente sozinho não permite saber se uma estrela é fisicamente luminosa?
- **Bibliografia** — só o que você consultou de fato.

Frases como “a estrela está longe” ou “a poeira atrapalha” não contam sozinhas: precisam vir acompanhadas do valor calculado.

Capítulo 3 – Movimentos, unidades e fotometria

Este capítulo aprofunda o que o Capítulo 2 introduziu para uso imediato, e se divide em quatro partes.

A primeira separa da paralaxe os dois efeitos que se confundem com ela — aberração e movimento próprio — e fecha o vetor velocidade. A segunda trata das unidades astronômicas e do que mudou quando elas deixaram de ser medidas e passaram a ser convenções exatas. A terceira é fotometria: correção bolométrica, o zero da escala e os sistemas de magnitude. A quarta, **propagação de incertezas**, é curta e não é opcional: todo resultado deste curso é um valor com incerteza, e é aqui que estão as duas regras que faltavam.

Depois delas vêm as seções de instrumentação e as escalas de tempo, explicitamente marcadas como leitura complementar, e o **projeto do Gaia** — um catálogo real, do qual sai a densidade estelar da vizinhança solar com incerteza. É o trabalho prático deste capítulo.

Aberração e movimento próprio

Dois efeitos são frequentemente confundidos com a paralaxe e precisam ser separados dela.

A **aberração da luz** decorre da composição de velocidades entre a velocidade orbital da Terra, $v_{\oplus} \simeq 29,8 \text{ km s}^{-1}$, e a da luz. A direção aparente da fonte desloca-se de um ângulo

$$\theta_{\text{ab}} \simeq \frac{v_{\oplus}}{c} = \frac{29,8}{3 \times 10^5} \simeq 9,9 \times 10^{-5} \text{ rad} \simeq 20,5''.$$

Note que esse valor é quase **vinte e sete vezes** maior que a maior paralaxe existente — a de Próxima Centauri, $0,769''$ — e que, crucialmente, ele *não depende da distância*. Aberração e paralaxe também estão defasadas de um quarto de período: a aberração é máxima quando a velocidade é perpendicular à linha de visada, a paralaxe quando o deslocamento de posição é. Foi essa defasagem que permitiu a Bradley, em 1728, identificar a aberração e, no processo, obter a primeira prova direta do movimento orbital da Terra.

O **movimento próprio** μ é o deslocamento angular real da estrela no céu, medido em segundos de arco por ano. Ele é o que sobra depois de descontar paralaxe e aberração — e o que o distingue das duas é a forma: ambas são *periódicas*, com o ano por período, enquanto o movimento próprio é *secular*, acumula sempre no mesmo sentido e cresce sem limite. Uma série de posições longa o bastante separa os três sem ambiguidade: duas senoides defasadas de um quarto de período, mais uma reta.

Converter μ em velocidade exige a distância, e é o assunto da seção *Velocidade espacial completa*. Combinado com a velocidade radial obtida por Doppler, ele fecha o vetor velocidade — e é essa combinação, feita para bilhões de estrelas, que transformou o Gaia em um instrumento de dinâmica galáctica.

As unidades e o que elas significam hoje

As três unidades de distância da astronomia têm origens distintas, e duas delas foram redefinidas recentemente — o que mudou seu status de “medida” para “convenção exata”.

A **unidade astronômica** nasceu como o semieixo maior da órbita terrestre, uma quantidade medida e sujeita a revisão. Desde 2012, por resolução da União Astronômica Internacional, ela é um valor *exato* por definição:

$$1 \text{ UA} = 149\,597\,870\,700 \text{ m (exato)}.$$

A mudança teve motivo prático: com telemetria de radar e rastreamento de sondas, a distância Terra-Sol passou a ser conhecida melhor que a própria definição antiga permitia expressar, e além disso ela varia lentamente à medida que o Sol perde massa. Fixar o número elimina a ambiguidade.

O **parsec** passou a ser, por consequência, também exato:

$$1 \text{ pc} = \frac{648\,000}{\pi} \text{ UA} = 3,085\,677\,581\,4913673 \times 10^{16} \text{ m},$$

já que $648\,000'' = 180^\circ$ e a definição é puramente geométrica. Note que o parsec não é uma unidade “natural” do espaço: ele codifica a órbita da Terra. Uma civilização em outro sistema planetário teria outro parsec.

O **ano-luz** é definido a partir do ano juliano de 365,25 dias exatos e da velocidade da luz, também exata:

$$1 \text{ al} = 9,460\,730\,472\,5808 \times 10^{15} \text{ m}, \quad 1 \text{ pc} = 3,261\,56 \text{ al}.$$

Ele é útil em divulgação, por embutir a ideia de tempo de viagem da luz, e raro em trabalho técnico.

Para massas e luminosidades, a IAU adotou em 2015 um conjunto de **valores nominais**, também exatos por convenção, justamente para que resultados publicados não mudem quando a medida do Sol for refinada:

$$\mathcal{L}_\odot^{\text{N}} = 3,828 \times 10^{26} \text{ W}, \quad \mathcal{R}_\odot^{\text{N}} = 6,957 \times 10^8 \text{ m}, \quad (\mathcal{GM})_\odot^{\text{N}} = 1,327\,124\,4 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}.$$

Repare que se adota $GM_\odot$, e não $M_\odot$ separadamente: o produto é medido com dez algarismos significativos pelas órbitas planetárias, enquanto G é conhecido com apenas quatro ou cinco. Dividir um pelo outro degradaria a precisão. É um exemplo instrutivo de como a escolha de variáveis preserva informação.

Velocidade espacial completa

Uma estrela tem três componentes de velocidade em relação ao Sol, e cada uma vem de uma medida diferente.

A **velocidade radial** v_r vem do deslocamento Doppler das linhas espectrais e é independente da distância — é a única componente mensurável sem saber onde o objeto está.

A **velocidade tangencial** vem do movimento próprio combinado com a distância:

$$v_t = \mu d.$$

Em unidades práticas, com μ em segundos de arco por ano e d em parsecs,

$$v_t [\text{km s}^{-1}] = 4,74 \mu d.$$

O fator 4,74 merece dedução, porque ele é frequentemente decorado sem sentido: uma estrela a 1 pc com movimento próprio de $1''$ por ano percorre, por definição de parsec, 1 UA por ano. Convertendo,

$$\frac{1 \text{ UA}}{1 \text{ ano}} = \frac{1,495\,979 \times 10^{11} \text{ m}}{3,155\,76 \times 10^7 \text{ s}} = 4740 \text{ m s}^{-1}.$$

O número não é uma constante física; é a razão entre duas unidades escolhidas por seres humanos.

Cuidado com uma coincidência de dígitos: este 4,74 é uma velocidade em kms^{-1} e nada tem a ver com $M_{\text{bol},\odot} = 4,74$, a magnitude bolométrica absoluta do Sol, que aparece adiante neste mesmo capítulo. São grandezas diferentes, com unidades diferentes, e o mesmo número por acaso.

O movimento próprio tem duas componentes, e há uma convenção que gera erros: publica-se $\mu_{\alpha*} = \mu_\alpha \cos \delta$, e não μ_α , justamente para que a quantidade represente deslocamento angular verdadeiro sobre o céu — meridianos convergem nos polos, e sem o fator $\cos \delta$ um objeto polar teria movimento próprio em ascensão reta enorme sem se deslocar quase nada. O módulo é então

$$\mu = \sqrt{\mu_{\alpha*}^2 + \mu_\delta^2}.$$

Compondo as duas partes, a velocidade espacial total é

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_t^2},$$

e é ela — não a velocidade radial isolada — que entra em qualquer estudo de dinâmica galáctica. Note a assimetria de informação: v_r é fácil e independe de distância; v_t exige astrometria e distância, e sua incerteza herda ambas. Foi exatamente essa assimetria que o Gaia desfez, ao medir movimentos próprios e paralaxes para o mesmo bilhão de estrelas.

O viés de inverter a paralaxe

A seção anterior terminou em uma assimetria: v_t herda a incerteza da distância, e a distância vem de inverter a paralaxe. Vale olhar de perto o que essa inversão faz com o erro.

A relação $d = 1/p$ é exata para os valores verdadeiros. Para valores *medidos*, ela não é.

Suponha que a paralaxe medida tenha erro gaussiano, $p_{\text{obs}} = p_{\text{verd}} + \epsilon$ com $\epsilon \sim N(0, \sigma_p)$. A distribuição de $1/p_{\text{obs}}$ não é gaussiana e, pior, tem média divergente: existe probabilidade não nula de p_{obs} ser arbitrariamente próximo de zero, e o inverso explode. Formalmente, $\langle 1/p_{\text{obs}} \rangle$ não existe.

Há ainda um efeito adicional, o **viés de Lutz-Kelker**. Estrelas distribuem-se no espaço, e o volume acessível cresce com d^3 : há muito mais estrelas com paralaxe pequena do que com paralaxe grande. Quando o erro espalha valores para cima e para baixo, o número de estrelas distantes promovidas a paralaxes maiores excede o de próximas rebaixadas, simplesmente porque as primeiras são mais numerosas. O resultado é que uma paralaxe medida tende, em média, a superestimar a verdadeira — e portanto a distância inferida por $1/p$ tende a ser subestimada.

Formalizando com o teorema de Bayes, e adotando densidade espacial uniforme como *prior*, a posterior da distância é

$$P(d | p_{\text{obs}}) \propto d^2 \exp \left[-\frac{(p_{\text{obs}} - 1/d)^2}{2\sigma_p^2} \right],$$

em que o fator d^2 vem do elemento de volume. Para $\sigma_p/p \lesssim 0,1$ a correção é pequena e $1/p$ é aceitável; para $\sigma_p/p \gtrsim 0,2$ ela domina, e usar $1/p$ produz erro sistemático de dezenas de por cento. A regra prática, hoje padrão em trabalhos com Gaia, é: acima de 20% de erro relativo em paralaxe, não inverte — infra.

Correção bolométrica e o zero da escala

A magnitude em uma banda mede apenas a fração do fluxo que passa pelo filtro. Para obter a luminosidade total, define-se

$$BC_V = m_{\text{bol}} - V = M_{\text{bol}} - M_V,$$

uma quantidade que depende quase inteiramente da temperatura efetiva e é sempre negativa ou nula por convenção moderna.

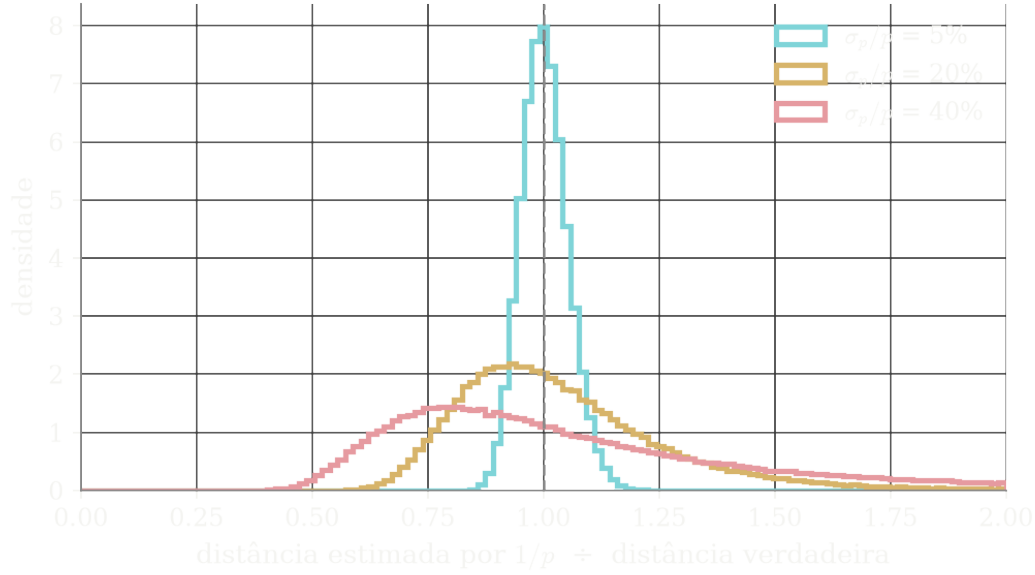


Figura 8: **O viés, simulado.** Populações sintéticas com densidade espacial uniforme, e a razão entre a distância obtida por $1/p_{\text{obs}}$ e a verdadeira. Com 5% de erro em paralaxe a distribuição é estreita e centrada em 1; com 40% ela se alarga e o pico desloca para baixo de 1 — a distância inferida sai sistematicamente curta, e a mediana não salva.

O ponto zero foi fixado pela IAU em 2015 de forma absoluta, encerrando décadas de ambiguidade: $M_{\text{bol}} = 0$ corresponde exatamente a

$$L = 3,0128 \times 10^{28} \text{ W},$$

de modo que a conversão entre magnitude bolométrica e luminosidade é

$$M_{\text{bol}} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_0} \right), \quad L_0 = 3,0128 \times 10^{28} \text{ W}.$$

Com a luminosidade nominal solar, isso dá $M_{\text{bol},\odot} = 4,74$ exatamente. Note que esse valor deixou de ser uma medida do Sol e passou a ser uma consequência de duas convenções — outro exemplo do movimento geral da metrologia astronômica em direção a definições fixas.

Para uso prático, a expressão que converte magnitude *bolométrica* absoluta em luminosidade solar é

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{-0,4(M_{\text{bol}} - 4,74)},$$

e agora se sabe de onde vem cada um dos seus números.

Não é esta a expressão usada no laboratório deste capítulo. Lá as magnitudes são de banda V , e a conversão correta é a do Capítulo 2, com $M_{V,\odot} = 4,83$. As duas formas diferem exatamente pela correção bolométrica: só coincidem para uma estrela com $BC = 0$. Usar 4,74 sobre uma magnitude V desloca a luminosidade em cerca de 8%, sem produzir sintoma algum.

Sistemas fotométricos e a definição de magnitude

Uma magnitude não é uma medida absoluta de energia; ela é a integral do fluxo ponderada pela resposta de um sistema:

$$m = -2,5 \log_{10} \frac{\int F_{\lambda} R_{\lambda} d\lambda}{\int F_{\lambda}^{\text{ref}} R_{\lambda} d\lambda},$$

com R_λ a resposta combinada de filtro, óptica, detector e atmosfera. Dois sistemas de referência coexistem.

No **sistema Vega**, a estrela Vega define magnitude zero em todas as bandas por convenção. É historicamente dominante, mas tem o inconveniente de amarrar toda a fotometria às propriedades de uma estrela real — que, por sinal, tem um disco de poeira e é vista quase de polo.

No **sistema AB**, a referência é uma fonte hipotética de densidade de fluxo constante em frequência:

$$m_{AB} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_\nu}{3631 \text{ Jy}} \right).$$

A constante 3631 Jy é escolhida para que os dois sistemas coincidam aproximadamente na banda V . A vantagem é que uma magnitude AB converte-se diretamente em unidades físicas sem tabela auxiliar — razão pela qual levantamentos modernos, do SDSS ao Rubin, adotaram esse padrão.

A conversão entre sistemas depende da banda, e o deslocamento cresce muito para o vermelho: é de poucos centésimos em V , sobe a 0,45 mag em I , a 0,89 em J e a 1,85 em K_s , e passa de 3 mag nas bandas do WISE. Misturar magnitudes AB e Vega é um erro silencioso e comum, que produz distâncias e luminosidades erradas sem gerar nenhum sintoma óbvio — e no infravermelho o estrago é de magnitudes inteiras, não de frações.

Propagação de incertezas: o mínimo necessário

Todo resultado deste curso é um valor *com* incerteza; sem ela, não é resultado. A regra geral, $\sigma_q^2 = \sum_i (\partial q / \partial x_i)^2 \sigma_{x_i}^2$, está enunciada no Capítulo 2 e deduzida no Capítulo 19. Lá também está o caso da potência, que dá $\sigma_d/d = \sigma_p/p$ para a inversão da paralaxe. Faltam dois casos, igualmente frequentes.

Logaritmo e magnitudes. Se $m = -2,5 \log_{10} F$, então

$$\sigma_m = \frac{2,5}{\ln 10} \frac{\sigma_F}{F} = 1,0857 \frac{\sigma_F}{F},$$

de modo que 1% de erro em fluxo é 0,011 magnitude. O caminho inverso, $\sigma_F/F = 0,921 \sigma_m$, converte incerteza fotométrica em incerteza de fluxo.

Módulo de distância. De $m - M = 5 \log_{10} d - 5$ segue

$$\frac{\sigma_d}{d} = \frac{\ln 10}{5} \sigma_{(m-M)} \simeq 0,46 \sigma_{(m-M)},$$

que é a mesma conta já feita para a extinção: 0,1 magnitude de erro no módulo, ou em A_V , vale 4,6% na distância.

As quatro seções seguintes — redução de imagens, astrometria de placa, refração e escalas de tempo — são **leitura complementar**. Elas não são pré-requisito para nenhum artigo deste capítulo nem do anterior, mas você vai precisar delas nos laboratórios dos capítulos seguintes. O projeto do Gaia, que fecha o capítulo, depende apenas do que veio antes desta caixa.

Redução de dados de imageamento

O sinal bruto de um detector CCD ou CMOS é

$$C_{\text{bruto}}(x, y) = B(x, y) + D(x, y) t + G(x, y) [S(x, y) + \text{céu}] t,$$

com B o nível de *bias* (pedestal eletrônico), D a corrente escura, G a resposta relativa de cada pixel e S o sinal astronômico. A redução inverte essa expressão em três passos:

1. **Subtração de bias**, medida com exposições de duração zero.
2. **Subtração de dark**, medida com o obturador fechado e a mesma duração; escala linearmente com o tempo e dobra a cada $\sim 6\text{--}7^\circ\text{C}$, razão pela qual detectores são resfriados.
3. **Divisão por flat-field**, obtida iluminando uniformemente o detector; corrige simultaneamente variações de sensibilidade pixel a pixel, poeira na óptica e vinhetamento.

O resultado é $S + \text{céu}$, do qual se estima e subtrai o céu localmente. Cada operação propaga ruído, e é por isso que as calibrações são feitas com dezenas de exposições combinadas por mediana — reduzindo tanto o ruído estatístico quanto a contaminação por raios cósmicos.

A **fotometria de abertura** soma as contagens dentro de um raio r e subtrai o céu estimado em um anel externo. A escolha de r é um compromisso: pequeno demais perde luz das asas da PSF, grande demais inclui ruído de céu. O ótimo fica em torno de 1,5 vezes a largura a meia altura da PSF, e para fontes fracas ou campos densos usa-se ajuste de PSF, que pondera cada pixel pelo perfil esperado — exatamente o filtro casado do Capítulo 18 aplicado ao espaço.

Astrometria: da posição no detector ao céu

Converter coordenadas de pixel (x, y) em coordenadas celestes exige uma **solução de placa**. Primeiro projeta-se a esfera no plano tangente pela projeção gnomônica:

$$\xi = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0)}{\sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)},$$

$$\eta = \frac{\sin \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \sin \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}{\sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)},$$

e então ajusta-se um polinômio $\xi = a_0 + a_1x + a_2y + \dots$ usando estrelas de catálogo com posições conhecidas. Termos de ordem superior absorvem distorção óptica, refração diferencial e efeitos de inclinação do detector. Com o Gaia fornecendo dezenas de milhares de referências por grau quadrado, soluções de placa modernas atingem precisão de milíarcossegundos rotineiramente.

Refração atmosférica

A atmosfera desvia a luz, elevando aparentemente os objetos. Para distâncias zenitais moderadas,

$$R \simeq (n_0 - 1) \tan z \simeq 58'' \tan z,$$

com $n_0 - 1 \simeq 2,8 \times 10^{-4}$ para ar a 15°C ao nível do mar; a 0°C o índice sobe para $2,9 \times 10^{-4}$ e o coeficiente vai a $60''$, razão pela qual tabelas de refração sempre trazem temperatura e pressão. A 45° do zênite o desvio é de quase um minuto de arco — centenas de vezes maior que a precisão astrométrica desejada. Perto do horizonte a expansão falha e a refração chega a $35'$, aproximadamente o diâmetro do Sol: quando o disco solar aparenta tocar o horizonte, geometricamente ele já se pôs por inteiro.

Como n depende do comprimento de onda, existe também **refração diferencial**: a imagem de uma estrela se alonga em um pequeno espectro vertical, com o azul acima do vermelho. Em observações espectroscópicas com fenda estreita, isso causa perda seletiva de luz azul se a fenda não estiver orientada ao longo do círculo vertical — erro clássico que distorce a forma do contínuo medido.

Escalas de tempo em astronomia

Medidas de precisão exigem distinguir escalas de tempo que diferem por termos pequenos mas sistemáticos.

UT1 acompanha a rotação da Terra, que não é uniforme: marés desaceleram o planeta e movimentos internos produzem variações irregulares. **TAI** é o tempo atômico, uniforme por construção. **UTC** é atômico mas mantido dentro de 0,9 s de UT1 pela inserção de segundos intercalares — prática com os dias contados: a Conferência Geral de Pesos e Medidas decidiu em 2022 abandonar o segundo intercalar até 2035, deixando UTC e UT1 divergirem livremente, porque as interrupções de um segundo causavam mais problemas em sistemas digitais do que resolviam. **TT** é a escala usada em efemérides, $TT = TAI + 32,184 \text{ s}$.

Para trabalho de alta precisão — cronometragem de pulsares, trânsitos, ondas gravitacionais — usa-se **BJD_{TDB}**: a data juliana corrigida para o baricentro do Sistema Solar e expressa em uma escala relativisticamente consistente. A correção baricêntrica chega a $\pm 8,3$ minutos — o tempo que a luz leva para cruzar 1 UA — e ignorá-la introduz uma modulação anual espúria de mesmo período em qualquer série temporal. Muitos “sinais anuais” na literatura têm essa origem.

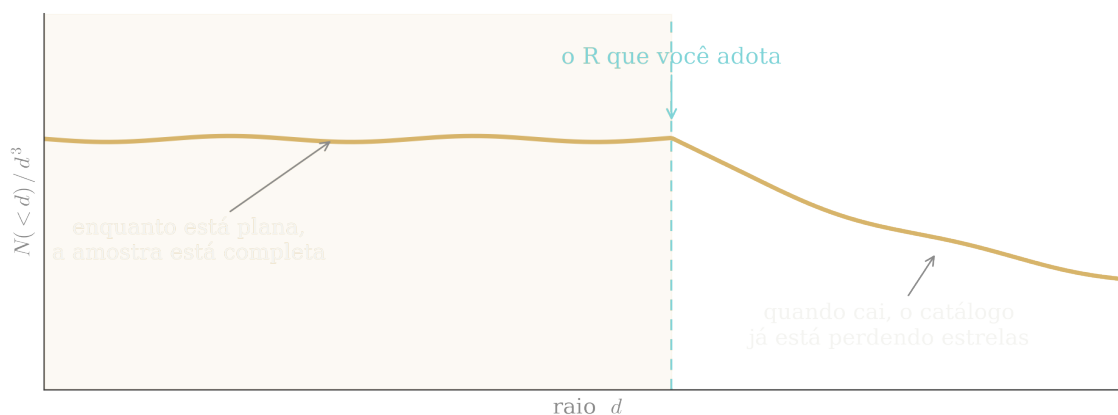


Figura 9: **Como se sabe até onde um catálogo é completo.** Se a densidade espacial for uniforme, $N(<d)$ cresce como d^3 e a razão $N(<d)/d^3$ é constante. Enquanto a curva está plana, a amostra contém tudo o que existe até ali; quando começa a cair, o catálogo já está perdendo objetos, e o raio em que isso acontece é o maior que se pode usar em um cálculo de densidade.

O projeto do capítulo: a vizinhança solar medida com o Gaia

A vizinhança solar medida com o Gaia

Este é o trabalho prático do Capítulo 3, e é o único dos primeiros capítulos que usa um catálogo *real*, e não simulado: 2000 estrelas do Gaia, com as imperfeições que um catálogo real tem. Ele é independente do artigo do laboratório do Capítulo 2 — não o substitui nem o repete — e vale como trabalho complementar, entregue à parte.

Arquivo: 01_gaia_estrelas_25pc.csv — as 2000 estrelas mais próximas do Sol com paralaxe medida pelo Gaia. Colunas, nesta ordem: `source_id` (A), `ra_deg` (B), `dec_deg` (C), `paralaxe_mas` (D), `erro_paralaxe_mas` (E), `pmra_mas_ano` (F), `pmdec_mas_ano` (G), `vel_radial_km_s` (H), `G_mag` (I), `BP_RP` (J) — as letras são as colunas do Excel ou do LibreOffice quando o arquivo é aberto sem alterações. Os movimentos próprios já vêm na convenção $\mu_{\alpha*} = \mu_{\alpha} \cos \delta$.

Limites da amostra — leia antes de dividir qualquer coisa por um volume. Três características precisam entrar na discussão de qualquer resultado obtido daqui:

1. **O raio real é 18,4 pc, não 25.** A menor paralaxe do arquivo é 54,33 mas: a lista foi truncada nas 2000 mais próximas. Usar 25 pc como raio em um cálculo de densidade erra o resultado por um fator 2,5, e sem sintoma nenhum.
2. **Faltam as estrelas brilhantes.** A mais brilhante do arquivo tem $G = 2,68$, porque o Gaia satura antes disso. Estão ausentes Sirius A, α Centauri A e B, Procyon A, Altair, Vega, Fomalhaut — e as três gigantes que existem dentro de 18,4 pc: Pollux, Arcturus e Capella. Nas posições de Sirius e de Capella o arquivo traz apenas as companheiras fracas.
3. **28% não têm velocidade radial.** São 561 células vazias na coluna H, e o Excel trata célula vazia como zero em contas aritméticas.

Física. A paralaxe dá distância por geometria pura; a distância converte brilho aparente em brilho intrínseco; e uma contagem dentro de um volume dá densidade:

$$d[\text{pc}] = \frac{1000}{p[\text{mas}]}, \quad M = m - 5 \log_{10} d + 5, \quad n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \quad \frac{\sigma_n}{n} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

A última é a incerteza de Poisson: contagens de N objetos independentes flutuam com $\sqrt{N}$.

Roteiro.

1. **Distância**, em K: =1000/D2. Em Python: `df["d"]=1000/df.paralaxe_mas`.
2. **Magnitude absoluta**, em L: =I2-5*LOG10(K2)+5. Em Python: `df["M"]=df.G_mag-5*np.log10(df.d)+5`.
3. **Diagrama HR:** dispersão de M_G (eixo y , invertido) contra BP_RP. Você acaba de construir um diagrama cor–magnitude com dados próprios.
4. **Os dois grupos.** A nuvem principal, que corta o gráfico na diagonal, é a *sequência principal*: estrelas que ainda queimam hidrogênio no núcleo. O grupo isolado embaixo à esquerda — fraco, mas azul — são *anãs brancas*, restos compactos de estrelas que já morreram; a sequência principal é assunto do Capítulo 8 e as anãs brancas, do Capítulo 10. Conte quantas há em cada grupo adotando um critério explícito e dizendo qual é. Um critério razoável é $M_G > 10$ e $\text{BP} - \text{RP} < 1,5$; se você escolher outro, a contagem muda, e é por isso que o critério tem de estar escrito no artigo.
5. **Incerteza das distâncias:** $\sigma_d/d = \sigma_p/p$, em M: =E2/D2. Para quantas estrelas a distância é melhor que 1%? E quantas passam de 20%, faixa em que inverter a paralaxe deixa de ser legítimo? Explique o resultado que encontrar — ele diz respeito a esta amostra, não ao método.
6. **Teste de completeza** (Figura 9). Se as estrelas estivessem distribuídas com densidade uniforme, o número dentro de um raio d cresceria como $N(< d) \propto d^3$. Conte $N(< d)$ para $d = 6, 8, 10, \dots, 18$ pc (no Excel: =CONT.SE(K:K;<10"), ou COUNTIF em inglês) e faça o gráfico de $N(< d)/d^3$ contra d . Se a curva for plana, a amostra é completa até ali; se cair, o catálogo está perdendo objetos. Registre até que raio ela se mantém plana.
7. **Densidade estelar local.** Com o raio validado no passo anterior, calcule $n = N/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ e sua incerteza de Poisson. Compare com o censo da vizinhança solar, que dá cerca de 0,10 estrela por pc^3 contando também anãs marrons e companheiras de sistemas múltiplos. **Este é o resultado principal do seu artigo:** um número, com incerteza, comparado a um valor de referência. A diferença não é erro — é o que a discussão tem de explicar, usando os três limites listados no início.

8. **Velocidades.** Calcule $\mu = \sqrt{\mu_{\alpha*}^2 + \mu_{\delta}^2}$ em segundos de arco por ano (as colunas estão em mas/ano, então divida por 1000), depois $v_t = 4,74 \mu d$. Para a velocidade espacial, use *apenas* as estrelas com velocidade radial medida: `=SE(H2=; ;RAIZ(H2^2+02^2))` — se você não proteger a fórmula, as 561 células vazias entram como zero e viram velocidades espaciais falsas.
9. **Verificação de sanidade.** Ordene por v e olhe as cinco maiores antes de usá-las. Duas delas têm $|v_r|$ perto de 400 km s^{-1} com v_t pequeno, e caem na região das anãs brancas do diagrama. Para isso ser real, o vetor velocidade teria de estar alinhado com a linha de visada dentro de $0,6^\circ$ em um caso e de $5,5^\circ$ no outro — coincidências de 1 em 19 500 e de 1 em 220, duas vezes, em pouco mais de cem objetos. Diga no artigo o que você fez com essas medidas e por quê.

A **entrega** é um artigo curto, no modelo da disciplina, separado do artigo do laboratório do Capítulo 2. O esqueleto está pronto para baixar em

<https://rafaelcrdelima.github.io/Astronomia/modelo-artigo-gaia/>

com as seções abaixo já na ordem, as três equações escritas e os lugares das figuras e das tabelas referenciados no texto. Diferente dos laboratórios dos outros capítulos, aqui as figuras são *suas*: o pacote traz duas de exemplo, feitas com os dados reais do arquivo, para você substituir pelas que produzir.

- **Resumo** — um parágrafo com a densidade medida, sua incerteza e a comparação com a referência, em números.
- **Introdução** — o que é uma amostra limitada por volume e por que a vizinhança solar é o único lugar onde se pode contar estrelas quase uma a uma.
- **Revisão Teórica** — somente o que você usou: $d = 1/p$, o módulo de distância, $n = N/V$ e a incerteza de Poisson, com as hipóteses declaradas.
- **Dados e Discussão** — origem dos dados; o diagrama HR com os dois grupos e o critério adotado; o gráfico de completeza; a densidade com incerteza; e a discussão da diferença em relação ao valor de referência, nomeando cada efeito e, quando possível, estimando seu tamanho.
- **Conclusão** — o que o número significa e o que dominaria uma medida melhor.
- **Bibliografia** — Gaia DR3 e a fonte do valor de referência.

Confira. A estrela mais próxima da lista tem $p = 768,07 \text{ mas}$, ou seja $d = 1,302 \text{ pc}$: é Proxima Centauri. Das 2000 estrelas, 1958 têm distância melhor que 1% e *nenhuma* chega a 5% — em uma amostra tão próxima, inverter a paralaxe é sempre legítimo, e o viés de Lutz-Kelker só passa a importar em amostras distantes ou limitadas por magnitude. O teste de completeza dá $N(< d)/d^3$ praticamente constante, em torno de 0,31, de 8 pc até o limite da amostra: a densidade é uniforme e a lista é completa até $R = 18,4 \text{ pc}$. Daí sai $n = 0,077 \pm 0,002 \text{ pc}^{-3}$, cerca de 77% do censo de referência — o déficit está nas anãs marrons, nas companheiras não resolvidas e no corte de brilho. As anãs brancas somam 116 objetos com o critério sugerido, ou $5,8\% \pm 0,5\%$ da amostra. O maior movimento próprio passa de $10''$ por ano: é a estrela de Barnard, com $v_t \simeq 90 \text{ km s}^{-1}$. Entre as 1439 estrelas com velocidade radial, 97 ultrapassam 100 km s^{-1} — essas pertencem tipicamente ao disco espesso ou ao halo, e a cinemática já separa populações antes de qualquer espectro.

Capítulo 4 – Órbitas elípticas e as leis de Kepler

Bloco Geometria e descrição. Este capítulo descreve as órbitas sem explicá-las, na ordem em que elas foram descobertas: primeiro a forma da curva, depois as três leis que Kepler extraiu dos dados de Tycho Brahe, depois o que um observador preso à Terra consegue medir delas. Nenhuma força aparece aqui — a explicação é o assunto do Capítulo 5. A pergunta central é: quanto da arquitetura do Sistema Solar se deduz apenas de ângulos?

Como estudar este bloco: Trabalhe sempre com desenho, unidades e ordem de grandeza antes de substituir números.

A elipse, antes da física

Esta seção é geometria pura: não há nenhuma força nela. Ela prova as três propriedades da elipse que o resto do capítulo usa sem demonstrar de novo — a equação polar, a relação $b^2 = a^2(1 - e^2)$ e a área πab . Lá elas são *usadas*; aqui elas são *provadas*, e é por isso que vêm primeiro. Vale saber desde já onde cada uma reaparece: a equação polar volta em *A equação da órbita*, quando a mesma curva sair da gravitação newtoniana em vez da definição focal; $b^2 = a^2(1 - e^2)$ e a área πab voltam juntas, e no mesmo parágrafo, na dedução da terceira lei.

A definição focal. Uma elipse é o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, os focos F e F' , é a mesma para todos eles:

$$FP + F'P = 2a \quad \text{para todo ponto } P \text{ da curva.}$$

A constante $2a$ é o eixo maior, e a é o semieixo maior. Chamando de $2c$ a separação entre os focos, define-se a **excentricidade**

$$e = \frac{c}{a},$$

de modo que $c = ae$. Quanto maior a distância entre os focos, maior a excentricidade: em $e = 0$ os dois focos coincidem e a curva é uma circunferência; quando $e \rightarrow 1$ a elipse se alonga indefinidamente.

Periélio e afélio. Na órbita de um planeta o Sol ocupa *um* dos focos — o outro fica vazio, sem nada de físico nele. Os dois extremos do eixo maior são então as distâncias mínima e máxima ao Sol:

$$R_p = a - c = a - ae = a(1 - e), \quad R_a = a + c = a + ae = a(1 + e).$$

Somando as duas, $R_p + R_a = 2a$: o semieixo maior é a *média aritmética* das distâncias extremas, e não a distância média ao longo do tempo. A distinção volta a importar quando se interpreta o a da terceira lei.

A elipse em coordenadas polares

Ponha a origem no foco ocupado pelo Sol e chame de r a distância do planeta a ele, e de θ o ângulo medido a partir da direção do periélio. Seja r_1 a distância ao foco vazio. No triângulo formado pelos dois focos e pelo planeta, o lado entre os focos vale $2c$ e o ângulo em F' vale $180^\circ - \theta$. A lei dos cossenos dá

$$r_1^2 = r^2 + (2c)^2 - 2r(2c)\cos(180^\circ - \theta).$$

Como $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$, o sinal do último termo se inverte, e com $c = ae$:

$$r_1^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta.$$

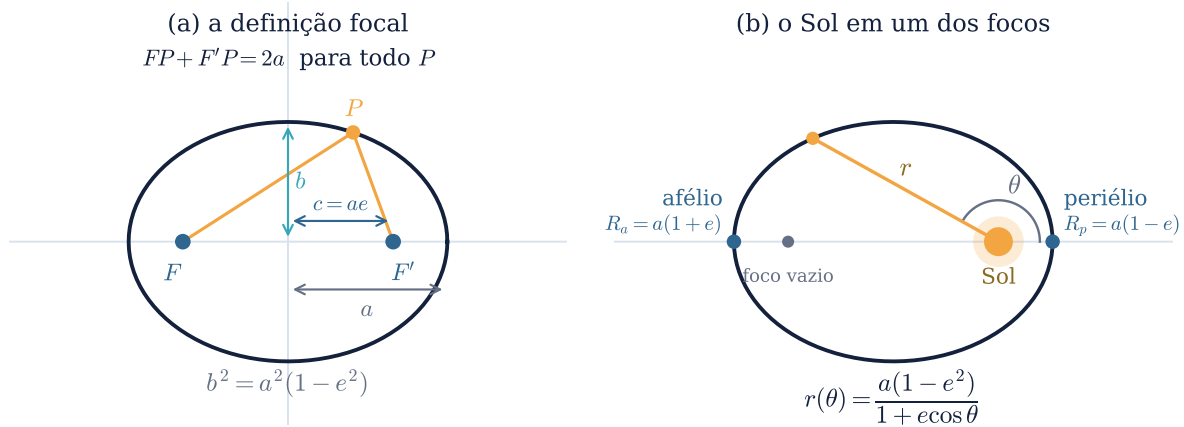


Figura 10: **A geometria da elipse.** (a) A definição focal: a soma $FP + F'P$ vale $2a$ para qualquer ponto P da curva. O semieixo maior a , o semieixo menor b e a semidistância focal $c = ae$ formam o triângulo retângulo que dá $b^2 = a^2(1 - e^2)$. (b) Com o Sol em um dos focos, o periélio fica no extremo mais próximo, a $a(1 - e)$, e o afélio no oposto, a $a(1 + e)$. O ângulo θ é medido a partir do foco ocupado e a partir da direção do periélio: é a anomalia verdadeira, e é ela que aparece na equação polar.

A definição da elipse fornece a segunda equação: $r + r_1 = 2a$, ou seja $r_1 = 2a - r$. Substituindo,

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae \cos \theta.$$

O termo r^2 cancela dos dois lados. Dividindo o que sobra por $4a$,

$$a - r = ae^2 + re \cos \theta \implies a(1 - e^2) = r(1 + e \cos \theta),$$

e portanto

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

Confira nos extremos: em $\theta = 0$ o denominador vale $1 + e$ e $r = a(1 - e^2)/(1 + e) = a(1 - e) = R_p$; em $\theta = 180^\circ$ vale $1 - e$ e $r = a(1 + e) = R_a$. O numerador $a(1 - e^2)$ é o *semi-latus rectum*, a distância ao foco quando $\theta = 90^\circ$; ele reaparecerá adiante como $p = \ell^2/GM$, e é aí que a geometria encontra a dinâmica.

A elipse em coordenadas cartesianas

Agora ponha a origem no *centro* da elipse, com os focos em $(\pm ae, 0)$. As duas distâncias focais de um ponto (x, y) da curva são

$$r_1^2 = (x + ae)^2 + y^2, \quad r^2 = (x - ae)^2 + y^2.$$

Subtraindo a segunda da primeira, os quadrados de x , de y e de ae se cancelam e sobra apenas o termo cruzado:

$$r_1^2 - r^2 = (x + ae)^2 - (x - ae)^2 = 4aex.$$

Usando outra vez $r = 2a - r_1$ no lado esquerdo,

$$r_1^2 - (2a - r_1)^2 = 4ar_1 - 4a^2 = 4aex \implies r_1 = a + ex.$$

Essa relação linear entre a distância focal e a abscissa é a chave de todo o resto. Substituindo-a na expressão de r_1^2 ,

$$(a + ex)^2 = (x + ae)^2 + y^2,$$

e expandindo, o termo $2aex$ aparece dos dois lados e some:

$$y^2 = a^2 + e^2x^2 - x^2 - a^2e^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Dividindo por $a^2(1 - e^2)$ e reagrupando:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

O semieixo menor. Falta identificar o denominador do segundo termo. Tome o ponto no extremo do eixo menor, em $(0, b)$. Por simetria as duas distâncias focais ali são iguais, e como somam $2a$, cada uma vale a . O triângulo retângulo de catetos b e ae e hipotenusa a dá então

$$a^2 = b^2 + (ae)^2 \implies \boxed{b^2 = a^2(1 - e^2)}$$

que é a relação anunciada na definição da excentricidade, agora demonstrada; dela seguem $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Com ela a equação toma a forma familiar

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

A área da elipse

A área sai por integração direta, e o resultado será necessário duas vezes adiante: na lei das áreas e na dedução da terceira lei. Convém medir o ângulo *a partir do centro*, onde a figura é simétrica — chame-o de φ , para não confundir com a anomalia verdadeira θ , que é medida a partir do foco. Pondo $x = r \cos \varphi$ e $y = r \sin \varphi$ na equação cartesiana,

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \implies r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi},$$

ou seja

$$r(\varphi) = \frac{ab}{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}.$$

O elemento de área em coordenadas polares é $dA = r dr d\varphi$, com $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq r(\varphi)$. A integral radial é imediata e produz o fator $1/2$:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\varphi)} r dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [r(\varphi)]^2 d\varphi = \frac{a^2 b^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Dividindo numerador e denominador por $\cos^2 \varphi$,

$$A = \frac{a^2 b^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 \varphi d\varphi}{b^2 + a^2 \tan^2 \varphi},$$

e a substituição que resolve a integral é

$$a \tan \varphi = b \tan u \implies a \sec^2 \varphi d\varphi = b \sec^2 u du.$$

Com ela o denominador vira $b^2 + b^2 \tan^2 u = b^2 \sec^2 u$, e a secante ao quadrado cancela:

$$A = \frac{a^2 b^2}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b^2} \int_0^{2\pi} du = \frac{ab}{2} [u]_0^{2\pi},$$

$$A = \pi ab$$

Um cuidado com os limites, que é onde esse tipo de substituição costuma falhar: de $a \tan \varphi = b \tan u$ vem $\cos u = b/\sqrt{a^2 \tan^2 \varphi + b^2}$, de modo que $\varphi = 0$ leva a $u = 0$ e $\varphi = 2\pi$ leva a $u = 2\pi$. A correspondência é um para um no intervalo inteiro, e os limites podem ser mantidos. Note ainda o caso particular $a = b$: a área vira πa^2 , como deve ser.

As três leis de Kepler

Com a geometria estabelecida, as três leis podem ser enunciadas na forma em que Kepler as deixou — descritivas, extraídas dos dados de Tycho Brahe, sem nenhuma explicação de causa.

As três leis, como Kepler as enunciou

I — Lei das órbitas. A órbita de um planeta é uma elipse com o Sol em um dos focos.

II — Lei das áreas. A reta que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. Perto do periélio o planeta corre mais e cobre um ângulo grande com raio curto; perto do afélio faz o oposto.

III — Lei harmônica. O quadrado do período orbital é proporcional ao cubo do semieixo maior:

$$P^2 = K a^3.$$

Medindo P em anos — o período sideral da Terra — e a em unidades astronômicas — a distância média Terra-Sol —, a constante vale $K = 1$, e a lei fica simplesmente $P^2 = a^3$.

A escolha de unidades que faz $K = 1$ não é mágica: ela apenas calibra a lei pela própria Terra. O teste é a tabela.

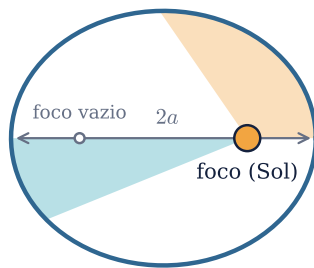
A terceira lei nos oito planetas

Planeta	a (UA)	P (anos)	a^3	P^2
Mercúrio	0,387	0,241	0,058	0,058
Vênus	0,723	0,615	0,378	0,378
Terra	1,000	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	3,537	3,538
Júpiter	5,203	11,863	140,8	140,7
Saturno	9,537	29,447	867,4	867,2
Urano	19,189	84,017	7065,8	7058,8
Netuno	30,070	164,791	27187,1	27156,2

Elementos orbitais médios (J2000). As duas últimas colunas coincidem em três algarismos para os planetas internos. O pequeno déficit de P^2 nos gigantes não é erro de arredondamento: a lei exata traz a *soma* das massas no denominador, $P^2 = 4\pi^2 a^3 / G(M_\odot + m)$, e para Júpiter a razão P^2/a^3 cai justamente na proporção $1/(1 + m/M_\odot)$, com $m/M_\odot = 1/1047$. Kepler não podia ver esse efeito nos dados de que dispunha; ele aparece na dedução newtoniana, no Capítulo 5.

Exemplo resolvido. Um planeta orbita uma estrela em $P = 1$ ano com $a = 1$ UA. Como esse é o caso da Terra, a massa inferida é $1M_\odot$. Se outro planeta orbita a mesma estrela em $a = 4$ UA, então

(a) órbita elíptica e a lei das áreas



os dois setores correspondem ao mesmo intervalo de tempo: áreas iguais

(b) terceira lei com dados reais

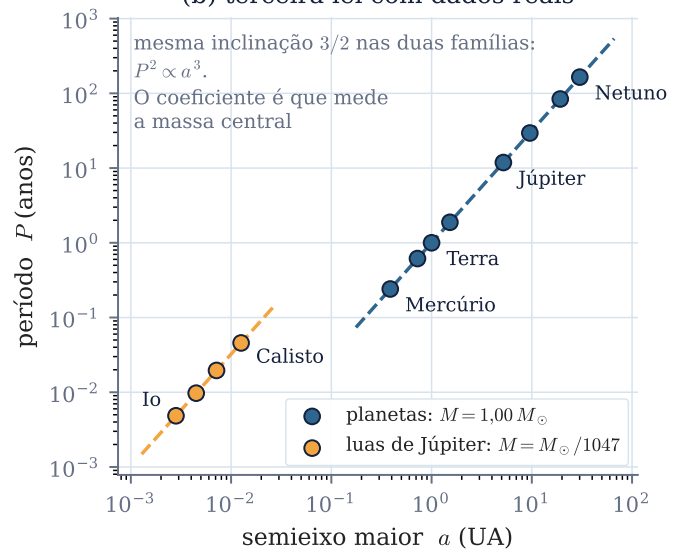


Figura 11: **As leis de Kepler.** (a) Órbita de excentricidade 0,55 obtida resolvendo a equação de Kepler $M = E - e \sin E$. O corpo central ocupa um foco, o outro fica vazio, e os dois setores sombreados — percorridos no mesmo intervalo de tempo — têm a mesma área: perto do periélio o planeta corre mais e cobre um ângulo grande com raio curto; perto do afélio faz o oposto. (b) A terceira lei com dados tabelados: os oito planetas em torno do Sol e os quatro satélites galileanos em torno de Júpiter. As duas famílias caem sobre retas de mesma inclinação $3/2$ mas coeficientes diferentes, e é o coeficiente que carrega a física: ele mede a massa do corpo central. Kepler não tinha como extraí-la; o Capítulo 5 mostra como, e o resultado é $1,00 M_{\odot}$ para os planetas e $1,90 \times 10^{27} \text{ kg}$ — a massa de Júpiter — para as luas.

$P^2 \propto a^3 = 64$, logo $P = 8$ anos. A conta não exigiu conhecer G porque usamos uma calibração solar. Essa é uma lição prática: relações proporcionais são atalhos poderosos quando a referência é bem escolhida.

Erros comuns. Não confunda raio orbital instantâneo com semieixo maior; não use a forma circular quando a excentricidade é essencial; não esqueça a inclinação em velocidades radiais; não trate velocidade projetada como velocidade total sem justificativa.

Astronomia de posição para o laboratório

Medidas angulares são tudo o que um observador tem, e é exatamente isso que o laboratório entrega. Esta seção reúne o que as converte em grandezas orbitais — elongação, oposição, período sinódico, retrogradação, maior elongação — retomando em uso, e não em teoria, o que o Capítulo 1 estabeleceu sobre coordenadas.

Do céu observado à órbita

Antes de qualquer conta, é essencial separar três tipos de grandezas:

- **coordenadas eclípticas** (λ, β) : longitude e latitude medidas em relação ao plano da órbita da Terra;
- **coordenadas equatoriais** (α, δ) : ascensão reta e declinação, úteis para localizar objetos em catálogos e telescópios;
- **coordenadas horizontais** (A, h) : azimute e altura, que dependem do local, da hora sideral e da latitude do observador.

O mesmo planeta tem praticamente a mesma longitude eclíptica geocêntrica em uma data dada, mas sua altura no horizonte muda quando mudamos a hora ou a latitude. Assim, $\lambda(t)$ é boa para estudar a dinâmica orbital, enquanto $h(t)$ e $A(t)$ respondem à pergunta observacional: *dá para ver esse objeto agora?*

A altura de um objeto no céu local já foi obtida no Capítulo 1, pela lei dos cossenos esférica aplicada ao triângulo PZX ; aqui ela é apenas usada:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H, \quad H = \theta_{\text{LST}} - \alpha,$$

com φ a latitude do observador, H o ângulo horário e θ_{LST} a hora sideral local. Um objeto está acima do horizonte quando $h > 0^\circ$. É essa equação que explica por que um planeta pode estar em posição orbital interessante e, ainda assim, não ser observável de um dado lugar em um dado horário.

Exemplo: janela de observação. Suponha um planeta com $\delta = 10^\circ$, observado de Joinville, aproximadamente $\varphi = -26^\circ$. Se no instante considerado $H = 0^\circ$, então

$$\sin h = \sin(-26^\circ) \sin(10^\circ) + \cos(-26^\circ) \cos(10^\circ) \cos(0^\circ).$$

Numericamente, $\sin h \simeq -0,076 + 0,885 = 0,809$, logo $h \simeq 54^\circ$. O planeta está alto no céu. Se seis horas siderais depois $H = 90^\circ$, o termo com cosseno desaparece:

$$\sin h \simeq \sin(-26^\circ) \sin(10^\circ) \simeq -0,076,$$

então $h \simeq -4,4^\circ$: o mesmo planeta estaria abaixo do horizonte. O laboratório permite verificar esse efeito variando a hora sideral.

Elongação, oposição e conjunção

A **elongação solar** E é a separação angular aparente entre o planeta e o Sol no céu. Em termos de longitudes eclípticas geocêntricas, uma aproximação útil quando as latitudes eclípticas são pequenas é

$$E \simeq |\lambda_p - \lambda_\odot|,$$

tomando o menor ângulo entre 0° e 180° . Na prática, use

$$E = |\text{wrap}_{180}(\lambda_p - \lambda_\odot)|,$$

onde wrap_{180} recoloca a diferença angular no intervalo $[-180^\circ, 180^\circ]$.

Para planetas externos, uma **oposição** ocorre quando $E \simeq 180^\circ$: Sol e planeta aparecem em lados opostos do céu. A oposição é especialmente importante porque o planeta tende a estar mais brilhante e observável por boa parte da noite. Uma **conjunção** ocorre quando $E \simeq 0^\circ$: planeta e Sol aparecem quase na mesma direção, o que dificulta ou impossibilita a observação visual.

Para planetas internos, como Mercúrio e Vênus, a elongação nunca chega a 180° . Eles ficam sempre angularmente próximos do Sol. A maior elongação é uma pista geométrica do tamanho de sua órbita.

Exemplo: identificando oposição em uma tabela. Imagine que, para Marte, o laboratório exportou:

dia	E
720	171°
735	178°
750	176°

A melhor estimativa discreta da oposição é dia 735. Se a oposição seguinte ocorre no dia 1515, então o período sinódico estimado é

$$S = 1515 - 735 = 780 \text{ dias} = 2,14 \text{ anos}.$$

Esse número não é o período orbital de Marte em torno do Sol; é o tempo entre configurações Terra–Sol–Marte parecidas vistas da Terra.

Período sinódico e período sideral

O período sideral P é o período orbital real em relação às estrelas distantes. O período sinódico S é o tempo para que a configuração aparente observada da Terra se repita, por exemplo de uma oposição à próxima. Para movimentos médios circulares, a velocidade angular média é

$$n = \frac{2\pi}{P}.$$

Para um planeta externo, a Terra, mais interna, “alcança” o planeta. A taxa relativa é

$$n_\oplus - n_p = \frac{2\pi}{S}.$$

Como $P_\oplus = 1$ ano,

$$\frac{1}{S} = 1 - \frac{1}{P_p}.$$

Reorganizando,

$$\frac{1}{P_p} = 1 - \frac{1}{S} \Rightarrow P_p = \frac{1}{1 - 1/S},$$

com P_p e S em anos. Para planetas internos, a ordem se inverte:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_p} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P_p} = 1 + \frac{1}{S}.$$

No laboratório, use a forma de planeta externo para Marte, Júpiter e Saturno.

Exemplo: período de Marte a partir de oposições. Usando $S = 2,14$ anos,

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{1}{2,14} = 1 - 0,467 = 0,533.$$

Portanto,

$$P \simeq 1,88 \text{ anos.}$$

Esse valor é próximo do período sideral real de Marte. O ponto didático é importante: medindo apenas datas de oposição, que são observáveis angulares, chegamos a uma propriedade orbital heliocêntrica.

Lei de Kepler em unidades astronômicas

Para planetas orbitando o Sol, é muito conveniente usar anos, unidades astronômicas e massas solares. Nestas unidades,

$$P^2 = a^3$$

para objetos de massa desprezível comparada ao Sol. Assim,

$$a = P^{2/3}.$$

Essa forma é a que aparece no roteiro do laboratório, e ela basta para tudo o que este capítulo pede: é uma proporção, sem constante física nenhuma dentro. Calibrar pela Terra — $P = 1$ ano com $a = 1$ UA — é o que faz a constante valer 1. A versão dimensional, que traz G e a massa do corpo central e por isso mede massas, é assunto do Capítulo 5.

Exemplo: semieixo maior de Marte. Com $P = 1,88$ anos,

$$a = P^{2/3} = 1,88^{2/3}.$$

Uma forma prática é calcular primeiro P^2 :

$$P^2 \simeq 3,53.$$

Como $a^3 = P^2$, queremos a raiz cúbica de 3,53:

$$a \simeq 1,52 \text{ UA.}$$

O laboratório deve levar a um valor próximo disso se as oposições forem bem escolhidas.

Movimento direto e retrógrado

Quando acompanhamos a longitude eclíptica $\lambda(t)$ de um planeta externo, normalmente ela aumenta com o tempo em relação ao fundo de estrelas. Esse é o movimento direto. Perto da oposição, porém, a Terra passa o planeta por dentro da órbita. A direção aparente pode inverter por algumas semanas ou meses: é o movimento retrógrado.

Em uma tabela discreta, calcule diferenças sucessivas:

$$\Delta\lambda_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i.$$

Como longitude é angular, trate a passagem por 0° com cuidado usando novamente uma diferença embrulhada:

$$\Delta\lambda_i = \text{wrap}_{180}(\lambda_{i+1} - \lambda_i).$$

Se $\Delta\lambda_i > 0$, o movimento naquele intervalo é direto; se $\Delta\lambda_i < 0$, é retrógrado. O gráfico $\lambda(t)$ deve mostrar uma mudança de inclinação nos intervalos retrógrados.

Exemplo: detectando retrogradação. Considere observações de Marte:

dia	λ	$\Delta\lambda$
0	142°	
30	150°	$+8^\circ$
60	154°	$+4^\circ$
90	151°	-3°
120	146°	-5°
150	148°	$+2^\circ$

O intervalo entre os dias 60 e 120 é retrógrado. Em uma entrega, não basta dizer “Marte voltou”: indique os intervalos e os valores de $\Delta\lambda$ que sustentam a conclusão.

Maior elongação de planetas internos

Para um planeta interno em órbita circular, a maior elongação ocorre quando a linha de visada Terra–planeta é tangente à órbita do planeta. No triângulo Sol–Terra–planeta, o ângulo no planeta é 90° . Se a distância Terra–Sol é 1 UA e o raio orbital do planeta é a , então

$$\sin E_{\max} \simeq \frac{a}{1 \text{ UA}}.$$

Logo,

$$a \simeq \sin E_{\max} \text{ UA}.$$

Essa dedução é aproximada, e vale saber exatamente onde ela falha. Em uma órbita elíptica a distância ao Sol varia entre $a(1 - e)$ e $a(1 + e)$, e a maior elongação varia junto: ela não é um número, é uma faixa entre $\arcsin[a(1 - e)]$ e $\arcsin[a(1 + e)]$. Em Vênus, com $e = 0,007$, a faixa tem menos de 2° de largura e a distinção não importa. Em Mercúrio, com $e = 0,206$, ela vai de 18° a 28° , e escolher a maior elongação de todas superestima a em cerca de 20%. O que estima a é a *média* das elongações máximas, não a maior delas.

Exemplo: órbita de Vênus por maior elongação. As elongações máximas de Vênus ficam todas entre 45° e 47° ; a média é $E_{\max} \simeq 46^\circ$, e

$$a \simeq \sin 46^\circ \simeq 0,72 \text{ UA}.$$

Em Mercúrio a excentricidade espalha as máximas entre 18° e 28° . A média fica em $22,4^\circ$, e

$$a \simeq \sin 22,4^\circ \simeq 0,38 \text{ UA},$$

próximo dos 0,387 UA tabelados — ao passo que a maior de todas, 28° , daria 0,47 UA. Assim, mesmo sem ver a órbita de cima, a geometria angular já indica que Vênus orbita mais longe do Sol do que Mercúrio.

Como apresentar contas com dados do laboratório

Para cada grandeza estimada, deixe claro:

1. quais colunas do CSV foram usadas;
2. quais observações foram selecionadas;
3. qual equação foi aplicada;
4. em que unidade está o resultado;
5. qual é a interpretação física.

Um bom padrão de tabela para o teste de Kepler é:

planeta	S (anos)	P (anos)	$a = P^{2/3}$ (UA)	P^2/a^3
Marte	2,14	1,88	1,52	1,00

Se os dados forem aproximados, P^2/a^3 não precisa dar exatamente 1, mas deve ficar próximo. Diferenças grandes indicam erro de unidade, oposição mal identificada ou confusão entre período sinódico e sideral.

Laboratório

O laboratório interativo deste capítulo está disponível em:

<https://rafaelcrdelima.github.io/Astronomia/laboratorio-capitulo-4/>

Neste laboratório você trabalhará como um observador pré-telescópico ou do início da astronomia moderna. O painel não entrega a órbita vista de cima: ele mostra posições aparentes de planetas no céu, como longitude e latitude eclípticas, ascensão reta, declinação, altura e elongação solar. A tarefa é construir, a partir dessas medidas angulares, a evidência que levou às leis de Kepler.

Roteiro de experimentos

Preparação dos dados. Abra o laboratório, escolha um planeta, varie a data da observação e use *Registrar observação*. Repita o procedimento por muitas datas. A janela do simulador cobre 22 000 dias — cerca de sessenta anos —, o suficiente para duas órbitas completas de Saturno. O CSV exportado contém data, planeta, longitude e latitude eclípticas, ascensão reta, declinação, azimute, altura, elongação solar e a longitude eclíptica do Sol. Use a régua angular do mapa para medir separações no céu sempre que precisar comparar duas posições.

Experimento 1: caderno de observações de Marte. Registre a longitude eclíptica de Marte a cada 20 ou 30 dias durante pelo menos três anos simulados. Faça um gráfico $\lambda(t)$. Identifique intervalos de movimento direto e movimento retrógrado. Explique por que uma descrição geocêntrica simples exigiria um movimento aparente complicado.

Experimento 2: período sinódico e período sideral. Para Marte, Júpiter ou Saturno, localize *várias* oposições sucessivas — datas em que a elongação solar passa perto de 180° — e tome a **média** dos intervalos. Essa média é o período sinódico S . Para um planeta externo,

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{1}{S}, \quad P \text{ e } S \text{ em anos.}$$

Use a média, e não um intervalo só. Essa inversão é mal condicionada quando S se aproxima de um ano: para Saturno, $S \simeq 378$ dias, e um único dia de erro em S desloca P em 7%; para Júpiter, em 2,6%; para Marte, em 0,1%. Com a média de dezenas de oposições, os

três fecham dentro de 0,1%. Compare seu P com o valor inferido visualmente pela repetição do padrão no gráfico $\lambda(t)$.

Experimento 3: o teste da terceira lei, com Mercúrio e Vênus. Este é o experimento central, e ele só vale se a e P vierem de medidas *independentes*. Para Mercúrio e para Vênus:

1. **O período.** A elongação de um planeta interno passa por zero duas vezes em cada período sinódico — na conjunção inferior, quando o planeta está entre nós e o Sol, e na superior, quando está atrás dele. As duas se distinguem pela distância geocêntrica, e portanto pelo tamanho aparente do planeta no mapa. Meça o intervalo entre conjunções *inferiores* sucessivas, tire a média, e obtenha S ; então $1/P = 1 + 1/S$.
2. **O semieixo maior.** Colecione todas as elongações máximas e use a *média* delas: $a \simeq \sin \langle E_{\max} \rangle$ (ver o Experimento 4).
3. **O teste.** Só agora calcule P^2/a^3 para os dois planetas.

Nenhuma das duas medidas usa a terceira lei, de modo que o teste *pode* falhar — e é isso que o torna um teste. Feito com cuidado, ele fecha em torno de 1 com poucos por cento.

Não obtenha a de P por $a = P^{2/3}$ e depois calcule P^2/a^3 :

isso devolve exatamente 1 para qualquer P , inclusive para um planeta inventado, e não testa nada.

Experimento 4: maior elongação e o efeito da excentricidade. Para Mercúrio e para Vênus, registre a elongação solar em muitas datas e colecione **todas** as elongações máximas, não apenas a maior. Para uma órbita interna aproximadamente circular,

$$a \simeq \sin \langle E_{\max} \rangle.$$

A média importa. Em Vênus, com $e = 0,007$, as máximas ficam todas entre 45° e 47° e tanto faz. Em Mercúrio, com $e = 0,206$, elas se espalham entre 18° e 28° — os dois extremos são $\arcsin[a(1 - e)]$ e $\arcsin[a(1 + e)]$ —, e usar só a maior devolve $a \simeq 0,47$, um erro de 20%. Com a média, $a \simeq 0,38$. Compare Mercúrio e Vênus: qual fica mais distante angularmente do Sol no céu, e o que isso diz sobre o raio orbital?

Experimento 5: aplicar a lei aos planetas externos. Com a terceira lei já testada nos internos, use-a agora como *instrumento*: a partir do P medido no Experimento 2, preveja $a = P^{2/3}$ para Marte, Júpiter e Saturno e compare com os valores tabelados (1,524, 5,203 e 9,537 UA). Note a diferença de estatuto: nos internos a lei foi **testada**, porque a e P eram independentes; aqui ela é **usada**, e a comparação afere a medida de P , não a lei.

Experimento 6 (opcional): triangular Marte como Kepler. Duas observações separadas por exatamente um período sideral de Marte pegam o planeta no mesmo ponto da órbita, com a Terra em dois lugares diferentes. A coluna `lambda_sol_deg` dá a longitude do Sol, e portanto a posição da Terra: ela está a 1 UA na direção $\lambda_{\odot} + 180^\circ$. Trace as duas linhas de visada a partir dessas duas posições e ache a interseção: a distância dela ao Sol é a . Repita para vários pares de datas e use a mediana — pares isolados espalham bastante, mas a mediana de meia dúzia cai em torno de 1,54 UA, a 1% do valor tabelado. É esta a medida que faltava para testar a terceira lei também nos externos.

Experimento 7: altura, ascensão reta e janela observacional. Escolha um planeta e varie a hora sideral local e a latitude do observador. Registre ascensão reta, declinação e altura. Determine em que horários o planeta está acima do horizonte. Interprete por que uma posição orbital favorável não garante observação se o objeto estiver baixo ou abaixo do horizonte.

Formato da entrega

A entrega deve conter o caderno de dados exportado; um gráfico $\lambda(t)$ para Marte, com os intervalos retrógrados marcados; o período sinódico e o sideral de pelo menos um planeta externo, obtidos da média de várias oposições, com o número de oposições usadas declarado; a tabela do teste da terceira lei para Mercúrio e Vênus, com as colunas S , P , $\langle E_{\max} \rangle$, a e P^2/a^3 , deixando claro que a e P saíram de medidas independentes; a previsão de a para os três externos e a comparação com os valores tabelados; e uma interpretação curta respondendo: como medidas puramente angulares podem revelar a arquitetura orbital do Sistema Solar?

O esqueleto do artigo sai pronto do laboratório. Na aba *Template de Relatório*, escreva os nomes do grupo — até três — e clique em *Gerar template*. O laboratório salva `main.tex` já no modelo de artigo da disciplina, o logotipo, o mapa do céu, os gráficos de $\lambda(t)$ e de elongação, a tabela das observações registradas e uma tabela em branco para o teste da terceira lei, além do CSV do caderno de dados. As figuras e as tabelas já estão referenciadas no texto; o que falta é escrever. Registre as observações *antes* de gerar: o template leva as que estiverem no caderno naquele momento. Envie tudo ao Overleaf e compile duas vezes.

Capítulo 5 – Gravitação newtoniana e dinâmica orbital

Bloco Fundamentos quantitativos. Este capítulo reforça a passagem da geometria observacional para a dinâmica gravitacional. A pergunta central é simples: como movimentos observados revelam massa?

Como estudar este bloco: Trabalhe sempre com desenho, unidades e ordem de grandeza antes de substituir números. Em gravitação, uma conta dimensional bem feita costuma revelar metade da física.

O Capítulo 4 descreveu as órbitas: a forma da curva, as três leis e o que se mede delas do chão. Não explicou nenhuma. Kepler obteve $P^2 \propto a^3$ dos dados e não tinha como dizer de onde vinha a constante, nem por que ela é a mesma para todos os planetas, nem o que aconteceria com um corpo que não voltasse. Este capítulo deduz as três leis — e, ao fazê-lo, transforma o que era descrição em instrumento de medida: a partir daqui, uma órbita medida vira uma massa em quilogramas.

O caminho é percorrido *duas vezes*, de propósito. A primeira travessia é elementar: as leis de Newton, a aceleração centrípeta deduzida geometricamente, o argumento que leva de Kepler à lei do inverso do quadrado e a constante K obtida para duas massas em órbita circular. Ela cabe em papel e lápis, é a que Newton de fato percorreu, e já entrega a balança gravitacional que o laboratório do capítulo usa. A segunda travessia é vetorial e não supõe círculo em momento nenhum: de uma única equação de movimento saem, em sequência, a conservação de energia, a conservação de momento angular, a primeira lei, a segunda e a terceira. O preço da elegância é que ela esconde a física atrás da álgebra; por isso vem depois, e não no lugar da primeira.

As três leis de Newton

Tudo o que segue sai de três enunciados e de uma lei de força. Vale reescrevê-los na forma em que serão usados.

Primeira lei (inércia). Se a resultante das forças sobre um corpo é nula, seu momento linear é constante:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \implies \quad \vec{p} = m\vec{v} = \text{constante}.$$

O enunciado é vetorial, e isso não é detalhe: constante significa constante em módulo, direção e sentido. Um corpo em movimento circular uniforme tem rapidez constante e mesmo assim está acelerado, porque a direção de $\vec{v}$ muda. É exatamente esse o caso de um planeta em órbita.

Segunda lei. A força é a taxa de variação do momento linear:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Se a massa é constante, o primeiro termo desaparece e sobra a forma familiar $\vec{F} = m d\vec{v}/dt = m\vec{a}$. Escrever a lei na forma completa não é preciosismo: o termo $\vec{v} dm/dt$ é o que governa foguetes, estrelas que perdem massa em vento e objetos que acretam matéria de uma companheira — todos assuntos deste curso. Neste capítulo, porém, as massas são constantes, e usaremos $\vec{F} = m\vec{a}$.

Terceira lei (ação e reação). As forças que dois corpos exercem um sobre o outro são opostas:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|.$$

Ela é a mais subestimada das três e a que fará mais trabalho adiante: é dela que virá a simetria entre as duas massas na lei da gravitação, e é dela que virá a soma $m_1 + m_2$ na terceira lei de Kepler.

Aceleração em órbitas circulares

Antes da gravitação, um resultado puramente cinemático: de quanto está acelerado um corpo que percorre uma circunferência com rapidez constante? A resposta é v^2/r , e vale deduzi-la, porque o argumento é curto e porque ela é o único ingrediente dinâmico da primeira travessia.

Lema: se o módulo de $\vec{r}$ é constante, então $\vec{v} \perp \vec{r}$

Seja $|\vec{r}|$ constante. Então $|\vec{r}|^2 = \sum_i x_i^2$ também é, e sua derivada se anula:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i x_i^2 \right) = 0 \implies \sum_i 2x_i \frac{dx_i}{dt} = 0 \implies \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \cdot \vec{v} = 0.$$

Produto escalar nulo entre vetores não nulos significa perpendicularidade: em qualquer movimento sobre uma circunferência, a velocidade é tangente. O lema vale em qualquer número de dimensões e não usa nada além da regra da cadeia.

Considere o corpo em duas posições separadas por um ângulo pequeno θ , percorridas em um intervalo Δt . Duas leituras da mesma figura:

No espaço. O arco percorrido vale $r\theta$. Para $\Delta t \rightarrow 0$ a corda tende ao arco, e o comprimento percorrido é $v\Delta t$:

$$v \Delta t = \theta r. \quad (1)$$

Nas velocidades. Pelo lema, $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{r}$ nas duas posições. Dois vetores obtidos girando de 90° duas direções separadas por θ estão eles próprios separados por θ : o vetor velocidade girou do mesmo ângulo. Para θ pequeno, o triângulo isósceles formado por $\vec{v}$, $\vec{v}'$ e $\Delta\vec{v}$ dá

$$|\Delta\vec{v}| = v \theta \implies \theta = \frac{\Delta v}{v}. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1),

$$v \Delta t = \frac{\Delta v}{v} r \implies \boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}}$$

e, para um corpo de massa m ,

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

Um alerta que economiza confusão. A força centrípeta *não é um novo tipo de força*. Ela é a resultante — seja lá de que natureza for — que aponta para o centro da trajetória. Em um carro na curva é o atrito; em uma pedra girando na corda é a tração; em um planeta é a gravidade. Escrever $F = mv^2/r$ não diz nada sobre a origem da força: diz apenas quanto ela precisa valer para a trajetória ser aquela.

De Kepler a Newton: a lei do inverso do quadrado

Newton percebeu que a mesma força que faz corpos caírem na Terra se estende até a Lua e a mantém em órbita. A pergunta seguinte é quantitativa: como essa força depende da distância? A resposta sai de combinar a cinemática recém-deduzida com a terceira lei de Kepler, tratando a órbita como circular.

Em uma circunferência de raio r percorrida em um período P ,

$$P = \frac{2\pi r}{v} \implies v = \frac{2\pi r}{P}.$$

A terceira lei de Kepler, tomada como fato empírico, diz $P^2 = Kr^3$, com K uma constante que depende só das unidades de P e r . Então

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{P^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{Kr^3} = \frac{4\pi^2}{Kr} \implies v^2 \propto \frac{1}{r}.$$

Levando à força centrípeta sobre o planeta de massa m :

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{4\pi^2 m}{K r^2} \implies F \propto \frac{m}{r^2}.$$

Falta a massa do Sol. Ela entra pela terceira lei de Newton: o planeta puxa o Sol com força de mesmo módulo, e o mesmo raciocínio aplicado ao Sol daria $F \propto M/r^2$. Uma única expressão que satisfaça as duas proporcionalidades ao mesmo tempo é o produto,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}}$$

com G uma constante universal — universal no sentido forte: o mesmo número para a maçã, para a Lua, para Júpiter e para uma galáxia. O sinal negativo e o versor $\hat{r}$ registram que a força é atrativa e dirigida ao longo da linha que une os corpos. Seu valor, $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, só ficou acessível com o experimento de Cavendish em 1798 — que na verdade mediu a densidade média da Terra com uma balança de torção, de onde G se extrai —, 111 anos depois dos *Principia*. Newton estabeleceu a forma da lei sem nunca saber o valor da constante, e é por isso que a astronomia mede tão bem os produtos GM e tão mal as massas isoladas: G continua sendo a constante fundamental pior determinada da física.

Isso não é um argumento circular? A pergunta é boa e precisa ser respondida, porque em seguida deduziremos a terceira lei de Kepler a partir da lei do inverso do quadrado — que acabamos de obter da terceira lei de Kepler.

Não é circular porque as duas passagens têm estatutos lógicos diferentes. A primeira é uma *inferência*: supondo órbitas circulares, a forma $1/r^2$ é a que reproduz $P^2 \propto a^3$. Ela não prova nada — apenas sugere a lei. O passo decisivo de Newton foi outro: *postular* que $F = GMm/r^2$ vale entre quaisquer dois corpos, sempre, e então *deduzir* as consequências. E as consequências vão muito além do que entrou: a dedução completa dispensa a hipótese de órbita circular, produz as órbitas abertas, que Kepler não descreveu, e corrige a própria terceira lei, trocando a constante K por algo que depende da soma das massas — um efeito ausente da lei empírica. Uma teoria se testa pelo que ela prevê além daquilo de que foi construída.

A constante K , deduzida

Kepler mediu K ; agora podemos calculá-la. Considere dois corpos de massas m_1 e m_2 em órbitas circulares em torno do centro de massa comum, com raios r_1 e r_2 e o mesmo período P . A separação entre eles é $a = r_1 + r_2$, e a definição de centro de massa impõe $m_1 r_1 = m_2 r_2$.

A força gravitacional entre eles depende da separação, não dos raios individuais:

$$F_G = \frac{Gm_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Já as forças centrípetas dependem de cada raio:

$$F_1 = \frac{m_1 v_1^2}{r_1}, \quad F_2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2}, \quad \text{com} \quad v_1 = \frac{2\pi r_1}{P}, \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{P}.$$

A gravidade é a única força em jogo, logo $F_G = F_1$:

$$\frac{Gm_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_1}{r_1} \left(\frac{2\pi r_1}{P} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{P^2}.$$

A massa m_1 cancela dos dois lados — e essa é a razão de a órbita medir a massa do *outro* corpo:

$$\frac{Gm_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{P^2}.$$

Fazendo o mesmo com $F_G = F_2$:

$$\frac{Gm_1}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4\pi^2 r_2}{P^2}.$$

Dividindo uma pela outra recupera-se $m_2/m_1 = r_1/r_2$, que é a definição de centro de massa — boa aferição de que nada se perdeu no caminho. Somando as duas:

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4\pi^2(r_1 + r_2)}{P^2},$$

e com $a = r_1 + r_2$,

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3} \quad \text{ou seja} \quad K = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}.$$

A constante de Kepler não é constante. Ela depende da soma das massas do par, e só *parece* universal no Sistema Solar porque, para todo planeta, $M_\odot + m \simeq M_\odot$ com erro menor que um milésimo. Esse termo era invisível nos dados de Tycho e é o que explica o pequeno déficit de P^2/a^3 observado na tabela do Capítulo 4 para Júpiter. É também ele que dá utilidade à lei: se K fosse mesmo uma constante da natureza, a terceira lei não mediria nada.

Determinação de massas

Escrita ao contrário, a relação recém-deduzida é um instrumento de medida:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2},$$

e quando um dos corpos domina, $M \gg m$, ela dá diretamente a massa central, $M = 4\pi^2 a^3 / GP^2$. Duas grandezas geométricas — um tamanho e um tempo — entregam uma massa em quilogramas.

O mesmo resultado aparece em forma mais crua igualando gravidade e aceleração centrípeta para uma órbita circular, $GMm/r^2 = mv^2/r$, de onde $v^2 = GM/r$ e

$$M = \frac{rv^2}{G}.$$

Nessa forma ela reaparece o curso inteiro: planetas ao redor do Sol, estrelas ao redor do centro galáctico, gás em discos de galáxias e matéria em aglomerados. A geometria muda, a distribuição de massa muda, os fatores numéricos mudam — a ideia não: movimento orbital é uma balança.

Um sistema de unidades em que a conta some

A constante $K = 4\pi^2/G(M+m)$ depende das unidades escolhidas, e há uma escolha que a torna igual a 1. Meça períodos em anos, distâncias em unidades astronômicas e massas em massas solares. Para o sistema Terra-Sol, $P = 1$, $a = 1$ e $M + m \simeq 1$, de modo que

$$K = \frac{P^2(M+m)}{a^3} = \frac{(1 \text{ ano})^2 (1 M_\odot)}{(1 \text{ UA})^3} = 1,$$

e a terceira lei fica simplesmente

$$\boxed{P^2 = \frac{a^3}{M}} \quad \Longleftrightarrow \quad M = \frac{a^3}{P^2}.$$

É nessa forma que o laboratório deste capítulo é feito: entrando com a em UA e P em anos, sai a massa em massas solares, sem nenhuma constante física pelo caminho.

Exemplo resolvido: a massa de Marte, a partir de Deimos

Deimos, o menor satélite de Marte, tem período sideral $P_D = 1,262$ dias e distância média $a_D = 23\,500$ km. Qual a massa de Marte?

(a) Em massas terrestres, sem usar constante alguma. Compare o par Marte-Deimos com o par Terra-Lua. Para cada um, com a massa do satélite desprezível,

$$K_\oplus^{-1} = \frac{a_L^3}{P_L^2} \propto M_\oplus, \quad K_M^{-1} = \frac{a_D^3}{P_D^2} \propto M_M \quad \Rightarrow \quad \frac{M_M}{M_\oplus} = \frac{a_D^3}{a_L^3} \cdot \frac{P_L^2}{P_D^2}.$$

Com $P_L = 27,3$ dias e $a_L = 384\,000$ km:

$$M_M = \left(\frac{23\,500}{384\,000} \right)^3 \left(\frac{27,3}{1,262} \right)^2 M_\oplus = 0,11 M_\oplus.$$

As unidades de a e de P cancelam; podiam ser quilômetros e dias, ou pés e semanas.

(b) Em massas solares. Mesma ideia, tomando agora como referência o par Sol-Terra, com $P_\oplus = 365,25$ dias e $a_\oplus = 1,5 \times 10^8$ km:

$$M_M = \left(\frac{P_\oplus^2}{a_\oplus^3} \cdot \frac{a_D^3}{P_D^2} \right) M_\odot = 3,2 \times 10^{-7} M_\odot.$$

Confira. Os valores tabelados são $0,107 M_\oplus$ e $3,23 \times 10^{-7} M_\odot$. Repare no que não foi preciso: nem G , nem a massa da Terra, nem a massa do Sol, nem sequer converter unidades. Toda medida de massa em astronomia é, no fundo, uma comparação entre duas órbitas.

Da observação ao modelo

Observável	Grandeza inferida	Hipótese ou calibração necessária
período orbital, semieixo maior angular, velocidade radial	massa total, inclinação orbital, separação física	distância calibrada, órbita aproximadamente kepleriana, identificação correta dos componentes

Pergunta de checagem: Que parte da massa foi medida dinamicamente e que parte depende de uma hipótese geométrica?

Do laboratório do Capítulo 4 à massa do Sol, em quilogramas

Nas unidades astronômicas acima a massa do Sol vale 1 por construção, o que é conveniente e não informa nada. Para obter o número em quilogramas é preciso voltar ao SI, e aí entra G :

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}.$$

O laboratório do capítulo anterior entregou a e P a partir de ângulos medidos do chão. Converta $a = 1 \text{ UA} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ e $P = 1 \text{ ano} = 3,156 \times 10^7 \text{ s}$, use $G = 6,674 \times 10^{-11}$ em unidades SI e confira que sai $2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$. É a ponte entre astronomia de posição e dinâmica gravitacional — e é o primeiro número do curso que não sai de geometria nenhuma.

O problema de dois corpos: a equação do movimento

Começa aqui a segunda travessia. Tudo o que foi obtido até agora supôs órbita circular; nada do que segue supõe. Duas massas M e m interagem apenas gravitacionalmente. Em um referencial inercial qualquer, com posições $\vec{r}_M$ e $\vec{r}_m$, defina o vetor *relativo*

$$\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M, \quad r = |\vec{r}|,$$

que aponta do corpo central para o corpo que orbita. Aplicando a segunda lei de Newton à lei da gravitação, a força sobre m é

$$m\ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r},$$

onde a potência r^3 no denominador aparece porque $\vec{r}$, e não $\hat{r}$, está no numerador. Pela terceira lei de Newton, a força sobre M é a oposta:

$$M\ddot{\vec{r}}_M = +\frac{GMm}{r^3}\vec{r}.$$

Somando as duas equações, o lado direito se cancela e sobra $m\ddot{\vec{r}}_m + M\ddot{\vec{r}}_M = 0$, isto é, $\ddot{\vec{R}}_{\text{cm}} = 0$ com $\vec{R}_{\text{cm}} = (M\vec{r}_M + m\vec{r}_m)/(M + m)$: o centro de massa move-se em linha reta com velocidade constante. Podemos trabalhar no referencial em que ele está parado, e o problema perde três graus de liberdade.

Dividindo cada uma pela respectiva massa e subtraindo, o lado esquerdo vira $\ddot{\vec{r}}_m - \ddot{\vec{r}}_M = \ddot{\vec{r}}$ e o direito se combina:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M + m)}{r^3}\vec{r}.$$

Escrevendo $M_{\text{tot}} = M + m$ para a massa total do par, chega-se à equação central de todo o capítulo:

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{GM_{\text{tot}}}{r^3}\vec{r} = 0} \quad (\star)$$

Ela é a **equação do movimento relativo**, e é idêntica à de uma única partícula orbitando um centro fixo de massa M_{tot} . Dois corpos viraram um. É por isso que a solução do problema de Kepler serve tanto para um planeta em torno do Sol quanto para duas estrelas de massas comparáveis: muda o valor da massa que aparece, não a forma da solução. Se além disso interessarem as energias

absolutas, e não só as por unidade de massa, entra a **massa reduzida** $\mu = Mm/(M + m)$, que é a massa efetiva do corpo fictício.

Nas três seções seguintes, $(\star)$ será multiplicada por três coisas diferentes — escalarmente por $\dot{\vec{r}}$, vetorialmente por $\vec{r}$ e vetorialmente pelo vetor que resultar da segunda operação — e cada produto entregará uma lei de conservação. Não há truque adicional: é sempre a mesma equação, vista de ângulos diferentes.

Notação, para não se perder entre livros. Daqui em diante M_{tot} é a massa total do par. Ela aparece com dois conjuntos de nomes, conforme a situação: $M_{\text{tot}} = M + m$ quando um corpo domina — um planeta em torno do Sol — e $M_{\text{tot}} = m_1 + m_2$ quando as massas são comparáveis, como em uma binária. É a mesma grandeza; muda só o rótulo. O produto GM_{tot} aparece o tempo todo. Boa parte dos textos de mecânica celeste abrevia esse produto como $\mu \equiv G(M + m)$, o *parâmetro gravitacional padrão*; nesta apostila a letra μ já designa o movimento próprio (Capítulo 3), a massa reduzida (acima) e o peso molecular médio (Capítulo 9), de modo que o produto fica escrito por extenso. Do mesmo modo, o momento angular por unidade de massa é escrito $\vec{\ell} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$; muitos livros o chamam $\vec{h}$. São a mesma coisa com nomes diferentes.

Conservação da energia

Multiplique $(\star)$ escalarmente por $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{GM_{\text{tot}}}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0.$$

Os dois termos são derivadas totais disfarçadas. O primeiro:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

O segundo exige uma identidade que será usada várias vezes: de $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ segue $2r\dot{r} = 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$, ou seja

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\dot{r}$$

— em palavras, a projeção da velocidade sobre a direção radial é a taxa de variação da distância, que é o mesmo que escrever $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = vr \cos \alpha$ com α o ângulo entre os dois vetores. Então

$$\frac{GM_{\text{tot}}}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{GM_{\text{tot}}\dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{GM_{\text{tot}}}{r} \right).$$

Somando, a equação inteira vira a derivada de uma coisa só:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\text{tot}}}{r} \right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\text{tot}}}{r} = \text{constante}}$$

ε é a **energia mecânica específica**, isto é, por unidade de massa reduzida. O primeiro termo é cinético, o segundo é o potencial gravitacional, e o sinal de ε decide o destino da órbita: negativa, o corpo está ligado e volta sempre; nula ou positiva, ele não volta. Multiplicando por μ recuperam-se as energias absolutas.

Conservação do momento angular

Agora multiplique $(\star)$ *vetorialmente* por $\vec{r}$, pela esquerda:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \frac{GM_{\text{tot}}}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0.$$

O segundo termo é nulo, porque o produto vetorial de um vetor por ele mesmo é zero — e é exatamente aqui que entra a informação de que a força é *central*, isto é, paralela a $\vec{r}$. Sobra

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0,$$

de modo que

$$\boxed{\vec{\ell} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{constante}}$$

$\vec{\ell}$ é o momento angular por unidade de massa; o momento angular propriamente dito é $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$. Como $\vec{\ell}$ é constante e, por construção, perpendicular a $\vec{r}$ em todo instante, o vetor posição está sempre no mesmo plano: **o movimento é plano**, e restam duas coordenadas em vez de três. Repare que só se usou que a força é central; a forma $1/r^2$ não entrou.

A primeira lei de Kepler

Falta a terceira multiplicação. Tome $(\star)$ e multiplique vetorialmente por $\vec{\ell}$, pela direita:

$$\left(\ddot{\vec{r}} + \frac{GM_{\text{tot}}}{r^3} \vec{r} \right) \times \vec{\ell} = 0 \implies \ddot{\vec{r}} \times \vec{\ell} = -\frac{GM_{\text{tot}}}{r^3} \vec{r} \times \vec{\ell} = \frac{GM_{\text{tot}}}{r^3} \vec{\ell} \times \vec{r}.$$

Substituindo $\vec{\ell} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ e usando a identidade do duplo produto vetorial, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$, com $\vec{a} = \vec{r}$, $\vec{b} = \dot{\vec{r}}$ e $\vec{c} = \ddot{\vec{r}}$:

$$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \ddot{\vec{r}} = (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} - (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) \vec{r} = r^2 \ddot{\vec{r}} - r \dot{r} \dot{\vec{r}},$$

onde na última passagem entrou de novo $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \dot{r}$. Logo

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{\ell} = GM_{\text{tot}} \left[\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r} \vec{r}}{r^2} \right].$$

O colchete é uma derivada exata — é precisamente a derivada do versor radial:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r} \vec{r}}{r^2}.$$

E o lado esquerdo também é, porque $\vec{\ell}$ é constante: $\ddot{\vec{r}} \times \vec{\ell} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{\ell})$. A equação toda é então uma igualdade entre duas derivadas, e integra-se de imediato:

$$\boxed{\dot{\vec{r}} \times \vec{\ell} = GM_{\text{tot}} \frac{\vec{r}}{r} + \vec{\beta}} \quad (\text{A})$$

com $\vec{\beta}$ um vetor constante de integração. Onde ele está? O lado esquerdo é perpendicular a $\vec{\ell}$, por ser um produto vetorial que tem $\vec{\ell}$ como fator; e o primeiro termo do lado direito também é, por ser

paralelo a $\vec{r}$, que está no plano da órbita. A diferença entre os dois é $\vec{\beta}$, logo $\vec{\beta} \cdot \vec{\ell} = 0$: $\vec{\beta}$ **também está no plano da órbita**. Temos agora dois vetores constantes, $\vec{\ell}$ e $\vec{\beta}$, e um escalar constante, ε . Multiplique (A) escalarmente por $\vec{r}$ e chame de θ o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{\beta}$:

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{\ell}) = GM_{\text{tot}} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta} = GM_{\text{tot}} r + \beta r \cos \theta.$$

O lado esquerdo se simplifica com a identidade do produto misto, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$:

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{\ell}) = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{\ell} = \vec{\ell} \cdot \vec{\ell} = \ell^2.$$

Igualando e pondo r em evidência:

$$\ell^2 = r (GM_{\text{tot}} + \beta \cos \theta) = GM_{\text{tot}} r \left(1 + \frac{\beta}{GM_{\text{tot}}} \cos \theta \right),$$

e isolando r chega-se à **equação da trajetória**:

$$r(\theta) = \frac{\ell^2 / GM_{\text{tot}}}{1 + \frac{\beta}{GM_{\text{tot}}} \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

com

$$p = \frac{\ell^2}{GM_{\text{tot}}} \quad \text{e} \quad e = \frac{\beta}{GM_{\text{tot}}}.$$

Esta é a equação de uma cônica em coordenadas polares com o foco na origem. **A primeira lei de Kepler não foi suposta em momento nenhum: ela é a solução.** O parâmetro p é o *semi-latus rectum* do Capítulo 4, que agora ganha conteúdo dinâmico, e e é a excentricidade. Como r é mínimo quando $\cos \theta = 1$, o vetor $\vec{\beta}$ aponta para o pericentro: ele é a direção do periélio, escrita como constante de movimento. A menos do fator GM_{tot} , é o que se chama vetor de Laplace–Runge–Lenz, ou vetor excentricidade, $\vec{e} = \vec{\beta} / GM_{\text{tot}}$.

E veio um resultado que Kepler não poderia ter obtido: a solução não se limita a curvas fechadas.

$$e = 0 \text{ circunferência}; \quad 0 < e < 1 \text{ elipse}; \quad e = 1 \text{ parábola}; \quad e > 1 \text{ hipérbole}.$$

As duas primeiras são movimentos cíclicos; as duas últimas, movimentos infinitos — o corpo passa uma vez e não volta. É a mesma família de curvas que se obtém seccionando um cone com um plano, e daí o nome.

A excentricidade é energia disfarçada

As constantes ε , ℓ e e não são independentes. De (A), $\vec{\beta} = \dot{\vec{r}} \times \vec{\ell} - GM_{\text{tot}} \vec{r} / r$; tomando o módulo ao quadrado,

$$\beta^2 = \left| \dot{\vec{r}} \times \vec{\ell} \right|^2 + (GM_{\text{tot}})^2 - 2GM_{\text{tot}} \frac{(\dot{\vec{r}} \times \vec{\ell}) \cdot \vec{r}}{r}.$$

Como $\vec{\ell}$ é perpendicular a $\dot{\vec{r}}$, o primeiro termo vale $v^2 \ell^2$; o último já foi calculado acima e vale ℓ^2 . Com $\beta = e GM_{\text{tot}}$:

$$(GM_{\text{tot}})^2 e^2 = v^2 \ell^2 + (GM_{\text{tot}})^2 - \frac{2GM_{\text{tot}} \ell^2}{r},$$

e reagrupando aparece exatamente a combinação que define ε :

$$(GM_{\text{tot}})^2 (e^2 - 1) = 2\ell^2 \left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\text{tot}}}{r} \right) \implies \boxed{\varepsilon = \frac{(GM_{\text{tot}})^2 (e^2 - 1)}{2\ell^2}}$$

A forma da órbita é decidida pela energia, e a correspondência é exata: $e < 1 \Leftrightarrow \varepsilon < 0$ (ligada), $e = 1 \Leftrightarrow \varepsilon = 0$ (limite de escape), $e > 1 \Leftrightarrow \varepsilon > 0$ (livre). Nada disso foi imposto — saiu de multiplicar $(\star)$ por três vetores diferentes.

Caminho alternativo: a substituição de Binet

A mesma equação da trajetória sai por uma rota mais curta, útil porque se generaliza a outras leis de força. Troque a variável r por $u = 1/r$ e use $\dot{\theta} = \ell u^2$:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = -\ell \frac{du}{d\theta}, \quad \ddot{r} = -\ell^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}.$$

A equação radial em coordenadas polares é $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -GM_{\text{tot}}/r^2$; substituindo e dividindo por $-\ell^2 u^2$:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM_{\text{tot}}}{\ell^2},$$

um oscilador harmônico com termo forçado constante — talvez a equação diferencial mais bem comportada da física. Sua solução é $u = (GM_{\text{tot}}/\ell^2)[1 + e \cos(\theta - \theta_0)]$, que invertida devolve a mesma cônica. A rota vetorial foi apresentada primeiro porque produz $\vec{\beta}$ e, com ele, a relação entre excentricidade e energia; Binet chega mais rápido, mas não entrega isso de graça.

Para a elipse, o *semi-latus rectum* se relaciona ao semieixo maior por $p = a(1 - e^2)$, de modo que

$$\ell^2 = GM_{\text{tot}} a (1 - e^2),$$

e as distâncias extremas são o pericentro $r_{\min} = a(1 - e)$, em $\theta = 0$, e o apocentro $r_{\max} = a(1 + e)$, em $\theta = \pi$.

A segunda lei de Kepler

A lei das áreas já está contida na conservação de $\vec{\ell}$; falta apenas traduzi-la. Escreva a velocidade em coordenadas polares no plano da órbita. Com

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j},$$

e $\vec{r} = r \hat{e}_r$, derivando no tempo,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta,$$

uma componente radial, que aproxima ou afasta, e uma tangencial, que gira. Então

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v} = r \hat{e}_r \times (\dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta) = r^2 \dot{\theta} \hat{z}, \quad \text{isto é} \quad \ell = r^2 \dot{\theta}.$$

A área varrida pelo raio vetor em um deslocamento $d\vec{r}$ é a de um triângulo de lados $\vec{r}$ e $d\vec{r}$:

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r} \implies \dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{\ell}}{2}.$$

Mas $\vec{\ell}$ é constante. Logo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\ell}{2} = \text{constante}$$

que é a segunda lei: áreas iguais em tempos iguais. Em coordenadas polares o mesmo resultado se lê $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, e $dA/dt = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta} = \ell/2$.

Vale sublinhar o que *não* foi usado: em nenhum ponto entrou a forma $1/r^2$ da força. A segunda lei vale para qualquer força central — só precisa que a força aponte ao longo de $\vec{r}$. São a primeira e a terceira leis que exigem especificamente gravitação newtoniana.

A terceira lei de Kepler, sem supor círculo

A primeira travessia obteve $P^2 = 4\pi^2 a^3 / GM_{\text{tot}}$ supondo órbitas circulares. Agora essa hipótese cai. Integrando a taxa areal ao longo de um período completo, a área total varrida é a da elipse inteira, πab , com $b = a\sqrt{1 - e^2}$:

$$\pi ab = \frac{\ell}{2} P.$$

Elevando ao quadrado e substituindo $\ell^2 = GM_{\text{tot}} a(1 - e^2)$ e $b^2 = a^2(1 - e^2)$:

$$\pi^2 a^4 (1 - e^2) = \frac{GM_{\text{tot}} a(1 - e^2)}{4} P^2,$$

e o fator $(1 - e^2)$ cancela dos dois lados, deixando

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\text{tot}}} = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

— o mesmo resultado da primeira travessia, agora sem nenhuma hipótese sobre a forma da órbita, e com a o semieixo maior da elipse em vez do raio do círculo. Vale reparar em duas coisas. A excentricidade sumiu no cancelamento, e isso é uma afirmação física forte: órbitas muito alongadas e quase circulares de mesmo semieixo maior têm exatamente o mesmo período — um cometa e um asteroide de mesmo a voltam juntos. E a soma das massas reaparece intacta, o que era de se esperar, já que os dois caminhos partem da mesma lei de força.

O que acabou de acontecer. Uma equação, $(\star)$, multiplicada por três coisas diferentes, produziu as três leis que Kepler levou vinte anos extraindo de tabelas de observação — e produziu mais do que elas: as órbitas abertas, a relação entre excentricidade e energia, e a correção de massa que a lei empírica não podia conter. É o exemplo mais limpo, em todo o curso, do que significa explicar em vez de descrever.

Energia orbital e a equação vis-viva

A conservação de energia já deu $\varepsilon = v^2/2 - GM_{\text{tot}}/r$, mas não disse quanto vale essa constante para uma órbita dada. A relação entre excentricidade e energia, deduzida acima, resolve isso em uma linha. Substituindo $\ell^2 = GM_{\text{tot}} a(1 - e^2)$ em $\varepsilon = (GM_{\text{tot}})^2(e^2 - 1)/2\ell^2$, o fator $(1 - e^2)$ cancela:

$$\varepsilon = \frac{(GM_{\text{tot}})^2 (e^2 - 1)}{2GM_{\text{tot}} a(1 - e^2)} \implies \boxed{\varepsilon = -\frac{GM_{\text{tot}}}{2a}}$$

A energia depende *só* do semieixo maior — a excentricidade sumiu, como havia sumido no período. Duas órbitas de mesmo a têm a mesma energia e o mesmo período, por mais diferentes que pareçam.

Confira por outro caminho. Avalie ε no pericentro, onde a velocidade é puramente tangencial e vale $v = \ell/r_{\min}$, com $r_{\min} = a(1 - e)$:

$$\varepsilon = \frac{GM_{\text{tot}}a(1 - e^2)}{2a^2(1 - e)^2} - \frac{GM_{\text{tot}}}{a(1 - e)} = \frac{GM_{\text{tot}}(1 + e)}{2a(1 - e)} - \frac{GM_{\text{tot}}}{a(1 - e)} = -\frac{GM_{\text{tot}}}{2a},$$

o mesmo resultado. Igualando as duas expressões de ε — a definição e o valor recém-obtido — obtém-se a **equação vis-viva**:

$$v^2 = GM_{\text{tot}} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

que dá a velocidade em qualquer ponto de qualquer órbita. Três casos limite valem a pena: para órbita circular, $r = a$ e $v = \sqrt{GM_{\text{tot}}/r}$; para $a \rightarrow \infty$, $v = \sqrt{2GM_{\text{tot}}/r}$, a velocidade de escape — de onde se lê que escapar custa exatamente $\sqrt{2}$ vezes a velocidade circular; e para $\varepsilon > 0$ a órbita é hiperbólica e o corpo não retorna.

Explore. O painel interativo **vis-viva** põe as quatro cônicas lado a lado: lançando sempre do mesmo ponto e mudando só a rapidez, a curva de v contra r se desloca em relação à curva de escape, e a parábola cai exatamente sobre ela.

<https://rafaelcrdelima.github.io/Astronomia/vis-viva/>

De onde vem o nome. *Vis viva* é latim: *força viva*. A expressão é de Leibniz, que em 1686 publicou uma crítica de duas páginas a Descartes — o *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii* — argumentando que a grandeza conservada nos choques não é a “quantidade de movimento” cartesiana mv , mas mv^2 , que ele batizou de *vis viva* por oposição à *vis mortua*, a força de um corpo em repouso que apenas tende a se mover, como a de uma mola comprimida. A polêmica atravessou meio século até d’Alembert observar, em 1743, que era uma disputa de palavras: as duas grandezas se conservam, são apenas grandezas diferentes — o que hoje chamamos de momento linear e de energia cinética. O fator 1/2 veio com Coriolis, em 1829, para que a grandeza igualasse o trabalho realizado, e o nome “energia cinética” se firmou com Thomson e Tait em meados do século XIX. A *vis viva* de Leibniz é, portanto, o dobro da energia cinética moderna. Em toda a física o termo caiu em desuso — menos aqui. A equação acima é a integral de energia do problema de dois corpos, e no século XVIII a mecânica celeste a chamava de *integral das forças vivas*; o apelido sobreviveu apenas neste canto da física, e ainda é assim que ela aparece nos manuais de planejamento de missões. É um fóssil de vocabulário: o nome é de 1686, a equação continua sendo a de todo dia.

Exemplo de aplicação: velocidade de escape

A velocidade de escape vem de igualar energia cinética inicial e energia gravitacional necessária para escapar:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 = \frac{GMm}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Para a Terra, $v_{\text{esc}} \simeq 11,2 \text{ km s}^{-1}$. Para uma anã branca com massa solar e raio terrestre, a mesma fórmula daria milhares de quilômetros por segundo. A equação é newtoniana, mas já aponta para o regime em que relatividade e compactação se tornam inevitáveis.

Posição em função do tempo: a equação de Kepler

A solução $r(\theta)$ dá a forma da órbita, mas não diz onde o corpo está em cada instante — e essa é a pergunta prática. Introduce-se a **anomalia excêntrica** E , definida pela projeção da elipse sobre seu círculo circunscrito, de modo que

$$r = a(1 - e \cos E), \quad x = a(\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Partindo de $dA/dt = \ell/2$ constante e integrando a área varrida desde o periastro em termos de E , chega-se à **equação de Kepler**:

$$M_{\text{an}} = E - e \sin E, \quad M_{\text{an}} \equiv \frac{2\pi}{P}(t - t_0)$$

onde M_{an} é a anomalia média, que cresce linearmente com o tempo. A equação é transcendental: não existe solução em forma fechada para E dado M_{an} . Resolve-se numericamente, tipicamente por Newton-Raphson,

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M_{\text{an}}}{1 - e \cos E_n},$$

que converge em poucas iterações para e moderado. Esse é literalmente o cálculo feito para produzir o painel (a) da Figura 11 e é o mesmo que qualquer efeméride executa milhões de vezes por dia.

Binárias: como a órbita vira massa

Em um sistema binário, cada estrela descreve uma elipse em torno do centro de massa, com semieixos a_1 e a_2 satisfazendo $m_1 a_1 = m_2 a_2$ e $a = a_1 + a_2$. Isso já fornece a razão de massas diretamente da geometria observada: $m_1/m_2 = a_2/a_1$.

Em **binárias espectroscópicas**, mede-se a velocidade radial de uma ou das duas componentes. A amplitude da variação de velocidade radial da componente 1 é

$$K_1 = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P\sqrt{1 - e^2}},$$

com i a inclinação do plano orbital. O fator $\sin i$ aparece porque só se mede a projeção da velocidade na linha de visada, e essa é a limitação fundamental do método. Combinando com a terceira lei, obtém-se a **função de massa**:

$$f(m) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{PK_1^3 (1 - e^2)^{3/2}}{2\pi G}$$

Tudo do lado direito é observável. O lado esquerdo mistura as duas massas com a inclinação desconhecida. Se apenas uma componente é vista, $f(m)$ fornece um *limite inferior* para m_2 , atingido quando $i = 90^\circ$ e $m_1 \rightarrow 0$. É exatamente esse raciocínio que estabelece candidatos a buraco negro em binárias de raios X: quando $f(m)$ excede a massa máxima possível de uma estrela de nêutrons, a companheira invisível não pode ser outra coisa.

Se as duas componentes são vistas espectroscopicamente e o sistema eclipsa — caso em que $i \simeq 90^\circ$ —, então todas as ambiguidades desaparecem e obtêm-se massas absolutas com precisão de poucos por cento. Esse é o motivo pelo qual binárias eclipsantes destacadas são a fonte dos dados usados na Figura 15: elas são o único caminho para massas estelares verdadeiramente medidas.

O teorema do virial, deduzido

Considere um sistema de N partículas ligadas gravitacionalmente. Defina o momento de inércia total $I = \sum_i m_i r_i^2$. Derivando duas vezes,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = \sum_i m_i \dot{r}_i^2 + \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = 2K + \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i.$$

O último termo é o *virial* de Clausius. Para forças gravitacionais entre pares, somando sobre todos os pares e usando $\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j) / r_{ij}^3$, mostra-se que

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = U.$$

Para um sistema em equilíbrio estatístico, I não varia sistematicamente e a média temporal de $d^2 I / dt^2$ se anula, deixando

$$2K + U = 0$$

As consequências merecem ser explicitadas, porque são contraintuitivas. Como $E = K + U = -K$, um sistema ligado tem energia total negativa e igual a menos sua energia cinética. Se ele perde energia — por radiação, por exemplo — então E diminui, o que significa que K *umenta*: o sistema esquenta ao perder energia. Uma estrela que irradia contrai e aquece. Um aglomerado que evapora estrelas torna-se mais compacto e mais “quente”. Sistemas autogravitantes têm capacidade térmica negativa, e essa é uma das ideias mais profundas de toda a astrofísica — ela explica por que estrelas não atingem equilíbrio térmico com o meio e por que a evolução estelar tem a direção que tem.

As três seções seguintes — marés, o problema restrito de três corpos e os pontos de Lagrange — são leitura complementar. Elas aplicam a mecânica já deduzida a situações específicas e não são pré-requisito para o laboratório de dados que fecha o capítulo; o núcleo se encerra no teorema do virial.

Forças de maré

Maré é o efeito da *diferença* de força gravitacional entre pontos de um corpo extenso. Um corpo de raio R a distância d de uma massa M sente, entre o centro e a superfície, uma diferença

$$\Delta F = \frac{GMm}{d^2} - \frac{GMm}{(d+R)^2} \simeq \frac{2GMmR}{d^3},$$

usando expansão binomial para $R \ll d$. O ponto essencial é a dependência d^{-3} , e não d^{-2} : forças de maré caem muito mais rápido com a distância que a força gravitacional total. Daí a Lua, muito menos massiva que o Sol, dominar as marés terrestres — ela está muito mais perto, e o que conta aqui é M/d^3 .

A mesma expressão fornece o **limite de Roche**. Um satélite mantido apenas pela autogravidade se desfaz quando a maré supera sua própria atração superficial:

$$\frac{2GMmR}{d^3} > \frac{Gm_s m}{R^2}.$$

Escrevendo as massas em termos de densidades, $M = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho_p$ e $m_s = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s$, os raios do satélite cancelam e sobra

$$d < \left(2 \frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} R_p.$$

Um tratamento mais cuidadoso, incluindo a deformação do satélite, substitui o fator $2^{1/3} \simeq 1,26$ por 2,44. O resultado é o mesmo em espírito: existe uma distância crítica, proporcional ao raio do planeta e à raiz cúbica da razão de densidades, dentro da qual material não se agrega em luas.

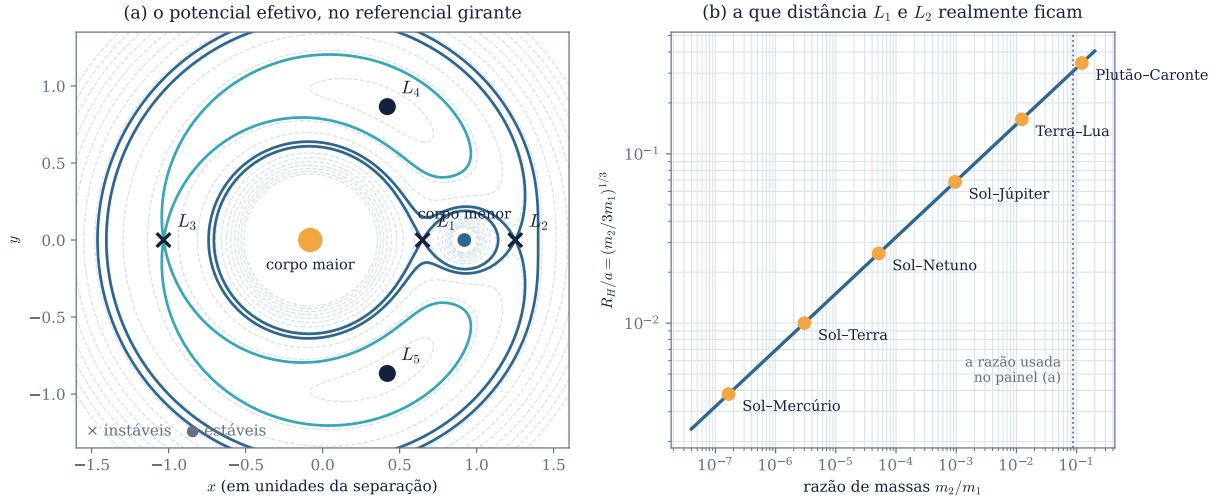


Figura 12: **O potencial efetivo e os cinco pontos de Lagrange.** (a) Curvas de nível de Φ_{ef} no referencial girante. As destacadas passam por L_1 , L_2 , L_3 e L_4 : são as fronteiras das regiões proibidas, e é por isso que a de L_1 tem a forma de um oito — é ela que define os lóbulos de Roche. Os três pontos colineares são instáveis; L_4 e L_5 , nos vértices dos triângulos equiláteros, são estáveis. **A razão de massas do desenho, $m_2/m_1 = 0,087$, é muito maior que a real**, senão L_1 e L_2 ficariam colados no corpo menor e invisíveis. (b) A escala verdadeira: a distância de L_1 e L_2 ao corpo menor é $R_H/a = (m_2/3m_1)^{1/3}$, e a raiz cúbica achata tudo — variar a razão de massas por seis ordens de grandeza move R_H/a por apenas duas. No sistema Sol-Terra, $R_H/a = 0,010$: os telescópios em L_2 estão a 1,5 milhão de quilômetros, um centésimo da distância ao Sol.

O problema restrito de três corpos

O problema de dois corpos tem solução fechada; o de três, não. Mas um caso particular — duas massas $m_1 > m_2$ em órbita circular e uma terceira massa desprezível — é tratável e produz resultados que organizam boa parte da dinâmica do Sistema Solar.

Trabalhe em um referencial girando com a velocidade angular orbital Ω . A aceleração de uma partícula teste inclui os termos inerciais:

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla\Phi - 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}).$$

O último termo, centrífugo, deriva de um potencial, e pode ser absorvido definindo o **potencial efetivo**

$$\Phi_{\text{ef}} = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} - \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2).$$

O termo de Coriolis não deriva de potencial, mas não realiza trabalho. Consequentemente existe uma integral de movimento, a **constante de Jacobi**:

$$C_J = -2\Phi_{\text{ef}} - v^2,$$

que é conservada mesmo sem que energia e momento angular o sejam separadamente. Ela define regiões proibidas: como $v^2 \geq 0$, a partícula só pode ocupar pontos onde $-2\Phi_{\text{ef}} \geq C_J$. As fronteiras dessas regiões são as superfícies de Hill.

Pontos de Lagrange

Os pontos de equilíbrio do potencial efetivo satisfazem $\nabla\Phi_{\text{ef}} = 0$. Há cinco, e a Figura 12 mostra onde ficam. Três deles, L_1 , L_2 e L_3 , ficam sobre a linha que une as massas e são obtidos resolvendo

uma equação quártica. Para $m_2 \ll m_1$, a expansão fornece

$$r_{L_1} \simeq a \left(1 - \left(\frac{m_2}{3m_1} \right)^{1/3} \right), \quad r_{L_2} \simeq a \left(1 + \left(\frac{m_2}{3m_1} \right)^{1/3} \right),$$

ou seja, ambos a uma distância $R_H = a(m_2/3m_1)^{1/3}$ do corpo menor — o **raio de Hill**. Ele reaparecerá no Capítulo 12 como a escala que decide de que faixa do disco um planeta em formação consegue capturar material. Para o sistema Sol-Terra, $R_H = 1,5 \times 10^6$ km, e é ali, em L_2 , que se instalaram Planck (2009–2013), Gaia (2013–2025), o JWST e o Euclid — os dois primeiros já encerrados, os dois últimos em operação. A razão é a mesma para todos: em L_2 o Sol, a Terra e a Lua ficam do mesmo lado, o que permite blindagem térmica única e resfriamento passivo.

Os pontos L_1 , L_2 e L_3 são instáveis — daí missões ali precisarem de manobras de manutenção de estação, tipicamente algumas dezenas de metros por segundo de Δv por ano. Já L_4 e L_5 , nos vértices de triângulos equiláteros com as duas massas, são *estáveis* desde que

$$\frac{m_1}{m_2} > 24,96,$$

condição satisfeita com folga por Sol-Júpiter. A estabilidade é garantida pela força de Coriolis, que curva as trajetórias de volta. É por isso que existem os asteroides troianos de Júpiter, hoje contados aos milhares, e troianos de Netuno, de Marte e até da Terra.

Laboratório de dados 2 – pesar o Sol, Júpiter e Saturno

Arquivo: 02_terceira_lei_kepler.csv — semieixo maior e período de 21 corpos reais, orbitando quatro centros diferentes.

Física. A terceira lei de Kepler na forma newtoniana é uma balança gravitacional:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}.$$

Em unidades astronômicas e anos, com massa em massas solares, ela vira simplesmente $M = a^3/P^2$.

Roteiro.

1. Calcule a^3/P^2 para cada corpo. No Excel: =C2^3/D2^2.
2. Agrupe por coluna **orbita_em_torno_de** e tire a média de cada grupo. Você obteve a massa de cada corpo central, em massas solares.
3. Converta as massas de Júpiter e Saturno para quilogramas e compare com valores tabelados.
4. Faça o gráfico de $\log P$ contra $\log a$ com todos os corpos, colorindo por sistema. Confirme que a inclinação é $3/2$ e explique por que as retas são paralelas mas deslocadas.

A entrega é um artigo curto, no modelo da disciplina. O esqueleto está pronto para baixar em

<https://rafaelcrdelima.github.io/Astronomia/modelo-artigo-massas/>

com as seções na ordem, a equação já escrita e os lugares da tabela e do gráfico referenciados no texto. O artigo precisa conter: a tabela com as quatro massas centrais obtidas e sua incerteza; o gráfico log-log de $\log P$ contra $\log a$, com os quatro sistemas em cores distintas; a comparação das massas de Júpiter e de Saturno com os valores tabelados, em quilogramas; e a explicação física do deslocamento vertical entre as retas — por que elas são paralelas, e o que o coeficiente carrega.

Uma pergunta que o artigo deve responder. A Terra aparece no arquivo como corpo central, com um único satélite. Uma média de um valor só não tem incerteza estatística: diga o que isso significa para aquela linha da sua tabela, e o que seria preciso para melhorá-la.

Confira. Pelos planetas você deve obter $\simeq 1,00 M_{\odot}$; pelas luas galileanas, $\simeq 9,5 \times 10^{-4} M_{\odot}$, isto é, $M_{\odot}/1047$ — a massa de Júpiter.

Capítulo 6 – Radiação, corpo negro e espectros

A luz é o mensageiro mais importante da astrofísica. Ela transporta energia, momento, direção, polarização e informação espectral. Um único fóton possui energia $E = h\nu = hc/\lambda$, de modo que comprimentos de onda menores correspondem a fótons mais energéticos. Essa relação conecta cor, temperatura, transições atômicas e processos de alta energia. Quando um telescópio registra luz, ele não está apenas formando uma imagem: está coletando evidências sobre a matéria que emitiu, absorveu ou espalhou essa radiação.

O espectro contínuo de muitos objetos pode ser comparado, em primeira aproximação, à radiação de corpo negro. Um corpo negro ideal absorve e emite radiação de maneira determinada apenas por sua temperatura. A lei de Wien indica que o comprimento de onda de máxima emissão diminui quando a temperatura aumenta:

$$\lambda_{\max} T \simeq 2,9 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Por isso estrelas frias têm aparência avermelhada e estrelas quentes emitem mais fortemente em azul e ultravioleta. Essa regra, porém, não deve ser usada mecanicamente: atmosferas reais têm linhas, bandas moleculares, opacidades dependentes do comprimento de onda e efeitos de poeira no caminho.

As linhas espectrais são assinaturas de quantização. Átomos e moléculas só absorvem ou emitem fótons associados a diferenças específicas de energia entre níveis. Uma linha de hidrogênio, cálcio, sódio ou ferro é como uma pista de presença química, mas sua intensidade depende de temperatura, ionização, densidade e opacidade. A ausência de uma linha forte não significa necessariamente ausência do elemento; pode significar que o elemento está em estado de ionização inadequado ou que as condições físicas não favorecem aquela transição.

O efeito Doppler transforma espectros em medidores de movimento. Se uma fonte se aproxima, suas linhas deslocam-se para comprimentos de onda menores; se se afasta, deslocam-se para comprimentos maiores. Para velocidades pequenas comparadas à velocidade da luz, a aproximação

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \frac{v_r}{c}$$

permite medir a velocidade radial. Esse método revela binárias espectroscópicas, rotação estelar, expansão de nebulosas, discos de acreção, planetas por velocidade radial e redshifts de galáxias. Em cosmologia, o redshift ganha interpretação ligada à expansão do próprio espaço, mas a ideia observacional continua sendo o deslocamento de linhas.

O que o detector realmente mede

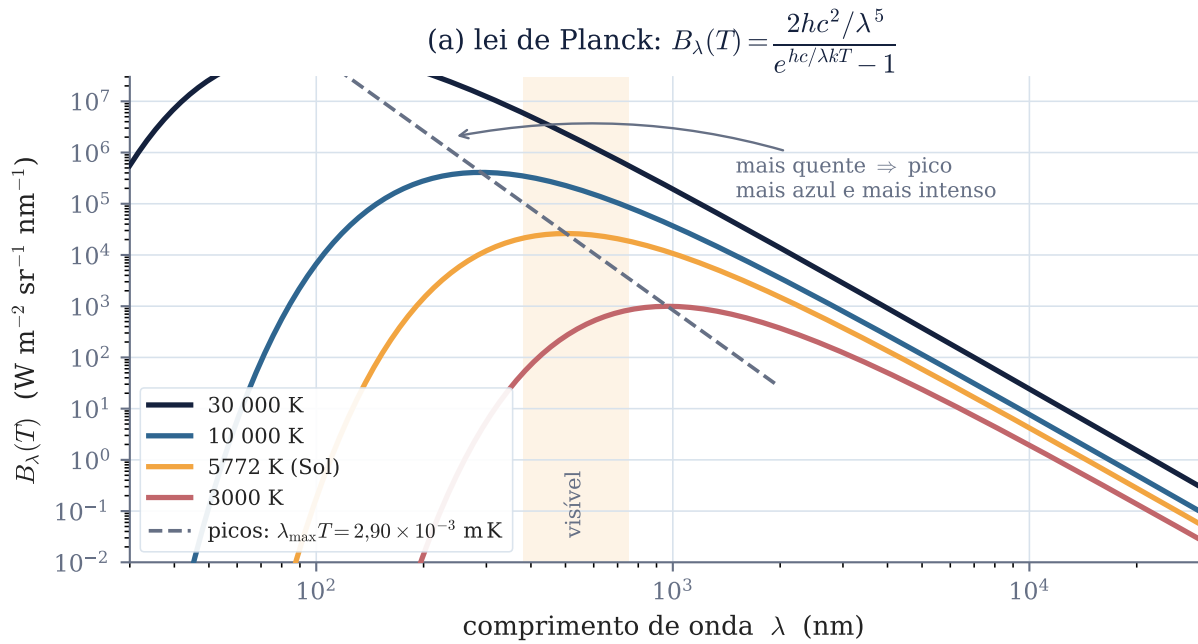
Um espectro observado não começa como “fluxo físico”. Ele começa como contagens no detector. Para uma exposição de duração t , em um comprimento de onda λ , uma forma simplificada do sinal é

$$C_{\text{bruto}}(\lambda) = t R_{\text{inst}}(\lambda) F_{\lambda}(\lambda) + D(\lambda) + N(\lambda),$$

onde R_{inst} é a resposta instrumental, D é dark current e N representa ruído. A redução de dados tenta recuperar algo proporcional ao fluxo:

$$F_{\lambda}(\lambda) \propto \frac{C_{\text{bruto}}(\lambda) - D(\lambda)}{t R_{\text{inst}}(\lambda)}.$$

No laboratório, os modos “bruto”, “subtrair dark” e “dark + resposta instrumental” mostram por que calibração não é detalhe burocrático: ela altera a forma do contínuo e, portanto, a temperatura inferida.



(b) o Sol real comparado ao corpo negro ideal

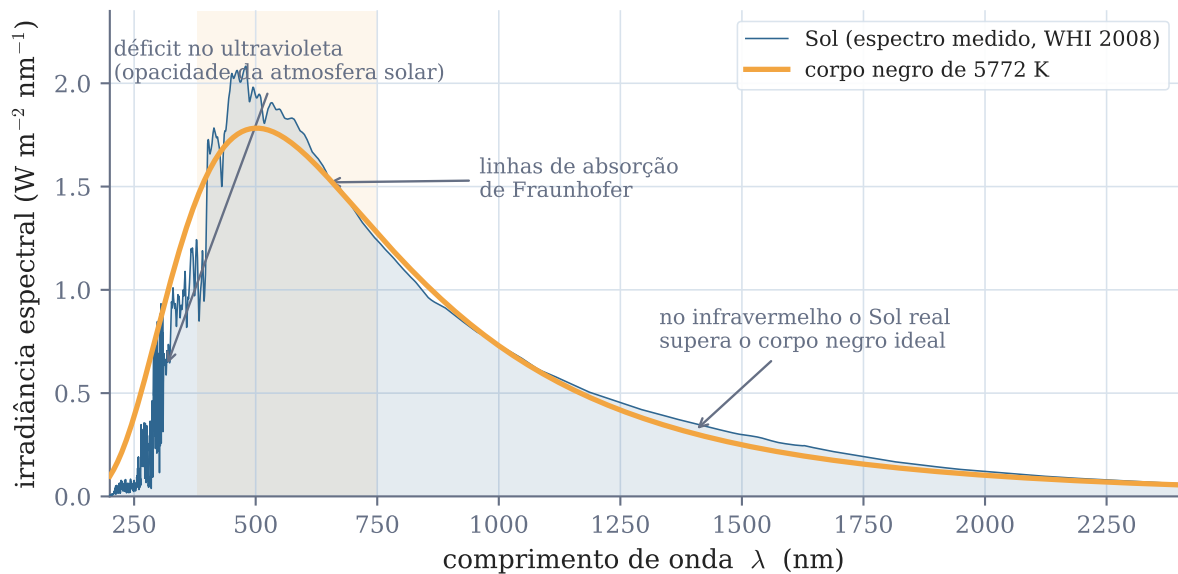


Figura 13: **Corpo negro: o ideal e o real.** (a) Curvas calculadas diretamente da lei de Planck para quatro temperaturas. Em escala log-log o efeito é duplo: o pico se desloca para comprimentos de onda menores (lei de Wien, tracejado ligando os máximos) e toda a curva sobe, porque o fluxo integrado cresce com T^4 (lei de Stefan-Boltzmann). Note que nenhuma curva cruza outra: uma estrela mais quente emite mais em *todo* comprimento de onda, e não apenas no azul. (b) O espectro solar realmente medido acima da atmosfera terrestre, comparado ao corpo negro de 5772 K com o mesmo raio e distância. O envelope é bem reproduzido, mas os desvios são grandes e informativos: entre 200 e 400 nm o Sol emite apenas 65% do previsto, porque a opacidade cresce no ultravioleta e a radiação escapa de camadas mais altas e frias; no visível o espectro é recortado pelas linhas de absorção de Fraunhofer; entre 1400 e 2400 nm a emissão real supera a ideal em cerca de 19%. Corpo negro é um ponto de partida, não uma descrição completa. Dados do painel (b): *Whole Heliosphere Interval reference spectrum* (SORCE/TIMED), LASP/LISIRD, Universidade do Colorado.

Corpo negro e temperatura efetiva

A lei de Planck para radiância espectral pode ser escrita como

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}.$$

Em muitos usos didáticos não precisamos ajustar toda a constante de normalização. A forma do contínuo já informa temperatura. A lei de Wien,

$$\lambda_{\max} T = b, \quad b = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K},$$

leva a

$$T \simeq \frac{2,898 \times 10^6}{\lambda_{\max}(\text{nm})} \text{ K}.$$

A luminosidade emitida por unidade de área de um corpo negro é dada por Stefan–Boltzmann:

$$F = \sigma T^4.$$

Para uma estrela de raio R observada a distância d , o fluxo bolométrico observado escala como

$$f_{\text{bol}} = \sigma T^4 \left(\frac{R}{d} \right)^2.$$

Assim, temperatura vem da forma do espectro, enquanto raio e distância entram na normalização do fluxo.

Exemplo: temperatura por Wien. Se o contínuo calibrado tem pico em $\lambda_{\max} = 520 \text{ nm}$, então

$$T \simeq \frac{2,898 \times 10^6}{520} \simeq 5570 \text{ K}.$$

Se o mesmo espectro bruto, antes da correção instrumental, parecia ter pico em 610 nm , daria

$$T \simeq 4750 \text{ K}.$$

A diferença não significa que a estrela mudou: significa que a resposta instrumental deformou o contínuo observado.

Fotometria em filtros e índice de cor

Um filtro não mede o fluxo em um único comprimento de onda; ele mede uma média ponderada por uma curva de transmissão $S_X(\lambda)$:

$$F_X = \frac{\int F_{\lambda}(\lambda) S_X(\lambda) d\lambda}{\int S_X(\lambda) d\lambda}.$$

Em fotometria astronômica, magnitudes são logarítmicas. Ignorando constantes de ponto zero, a diferença de cor entre duas bandas pode ser estimada por

$$B - V \simeq -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_B}{F_V} \right).$$

Valores menores de $B - V$ indicam objeto relativamente mais azul; valores maiores indicam objeto relativamente mais vermelho. Essa interpretação deve ser feita com cuidado, pois poeira interestelar também avermelha a luz.

Exemplo: cor a partir de fluxos. Se uma observação calibrada fornece $F_B = 0,42$ e $F_V = 0,60$ em unidades relativas,

$$B - V = -2,5 \log_{10}(0,42/0,60) = -2,5 \log_{10}(0,70) \simeq 0,39.$$

Se outra estrela tem $F_B/F_V = 1,20$, então $B - V \simeq -0,20$, indicando espectro mais azul e, em geral, temperatura efetiva maior.

Linhas espectrais e velocidade radial

Uma linha espectral tem um comprimento de onda de repouso λ_0 . Se a linha é observada em λ_{obs} , então

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0.$$

Para velocidades pequenas comparadas a c ,

$$v_r \simeq c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

Se $v_r > 0$, a fonte está se afastando; se $v_r < 0$, está se aproximando. Para a linha $H\alpha$,

$$\lambda_0 = 656,28 \text{ nm}.$$

Um deslocamento de apenas 0,22 nm já corresponde a

$$v_r \simeq 3,0 \times 10^5 \frac{0,22}{656,28} \simeq 100 \text{ km s}^{-1}.$$

Essa sensibilidade é uma das razões pelas quais espectroscopia é tão poderosa.

Exemplo: $H\alpha$ deslocada. Se o laboratório mostra o mínimo de $H\alpha$ em 656,05 nm,

$$\Delta\lambda = -0,23 \text{ nm}.$$

Logo,

$$v_r \simeq 299792 \frac{-0,23}{656,28} \simeq -105 \text{ km s}^{-1}.$$

O sinal negativo indica aproximação. Em uma entrega, sempre informe a linha usada, o comprimento de onda de repouso, o comprimento observado e o sinal da velocidade.

Fluxo integrado e comparação entre objetos

O fluxo bolométrico é a integral do fluxo espectral:

$$f_{\text{bol}} = \int_0^\infty F_\lambda d\lambda.$$

Na prática, com dados discretos em uma faixa limitada, usamos uma soma aproximada:

$$f_{\text{faixa}} \simeq \sum_i F_{\lambda,i} \Delta\lambda_i.$$

Esse valor não é o fluxo bolométrico completo, pois falta radiação fora da faixa observada, mas é útil para comparar objetos observados com o mesmo instrumento e a mesma redução. Estrelas quentes podem emitir muita radiação no ultravioleta, fora da faixa visível; estrelas frias podem emitir parte importante no infravermelho. Portanto, a integral visível deve ser interpretada como fluxo na faixa observada, não como luminosidade total sem correção.

Da imagem ao espectro: abertura e fundo

Antes de obter um espectro útil, o observador precisa decidir de onde vem a luz do objeto e de onde vem o fundo. Em uma imagem real, a estrela não aparece como um ponto matemático: ela é espalhada pela óptica e pelo detector em uma *função de espalhamento pontual* (PSF). Por isso usamos uma abertura circular em torno da estrela. Se a abertura for pequena demais, perdemos parte da luz; se for grande demais, somamos ruído e luz de fundo desnecessários. O sinal líquido de uma estrela pode ser estimado por fotometria de abertura:

$$C_{\text{estrela}} = C_{\text{ap}} - \frac{A_{\text{ap}}}{A_{\text{fundo}}} C_{\text{fundo}},$$

em que C_{ap} é a soma das contagens na abertura da estrela, C_{fundo} é a soma das contagens em uma abertura colocada numa região sem estrelas, e $A_{\text{ap}}/A_{\text{fundo}}$ corrige a diferença de áreas. O mesmo raciocínio vale para cada comprimento de onda quando extraímos um espectro: para cada λ , subtraímos o fundo estimado antes de interpretar o contínuo, as cores e as linhas.

Exemplo. Uma abertura na estrela soma $C_{\text{ap}} = 18500$ contagens. A abertura de fundo soma $C_{\text{fundo}} = 4200$ contagens e tem área quatro vezes maior. O sinal líquido é

$$C_{\text{estrela}} = 18500 - \frac{1}{4}(4200) = 17450.$$

Se o fundo fosse ignorado, o fluxo seria superestimado em aproximadamente $1050/17450 \simeq 6,0\%$. Essa diferença altera temperaturas por cor, fluxos integrados e profundidades de linhas.

Laboratório

O laboratório interativo deste capítulo está disponível em:

<https://rafaelcrdelima.github.io/Astronomia/laboratorio-capitulo-3/>

Neste laboratório você atua como um observador que obtém espectros de estrelas desconhecidas a partir de um campo artificial controlado. A simulação não entrega diretamente temperatura ou velocidade: primeiro você deve escolher uma estrela, desenhar uma abertura sobre ela, desenhar outra abertura em uma região de fundo, iniciar a aquisição de fótons e esperar o detector acumular contagens. O espectro muda dinamicamente durante a observação, como aconteceria em uma exposição real.

Roteiro de experimentos

Experimento 1: aquisição de fótons. Escolha uma estrela brilhante, desenhe uma abertura sobre ela e desenhe uma abertura de fundo em uma região sem estrelas. Antes de iniciar a aquisição, anote que o detector está zerado. Clique em *Iniciar aquisição* e registre como o espectro muda após aproximadamente 5 s, 15 s e 30 s de tempo acumulado. Explique por que o espectro fica menos irregular quando mais fótons são coletados.

Experimento 2: extração por abertura. Para a mesma estrela, use três raios de abertura: pequeno, adequado e grande. Para cada raio, mantenha a mesma abertura de fundo e registre λ_{max} , F_B , F_V , F_R e o fluxo integrado. Use a estimativa

$$C_{\text{estrela}} = C_{\text{ap}} - \frac{A_{\text{ap}}}{A_{\text{fundo}}} C_{\text{fundo}}$$

para interpretar como a escolha da abertura altera o sinal coletado, o fundo subtraído e o ruído.

Experimento 3: subtração de fundo. Mantendo a mesma estrela e a mesma abertura do alvo, coloque a abertura de fundo em uma região limpa e depois em uma região contaminada por uma estrela fraca. Compare os espectros extraídos. Quantifique a diferença percentual no fluxo integrado e explique por que uma escolha ruim de fundo altera o contínuo.

Experimento 4: calibração instrumental. Para uma abertura bem escolhida, compare o espectro bruto, o espectro com dark subtraído e o espectro com dark + resposta instrumental corrigidos. Para cada caso, registre $\lambda_{\max}$ e calcule

$$T = \frac{2,898 \times 10^6}{\lambda_{\max}(\text{nm})} \text{ K}.$$

Compare as temperaturas obtidas e explique por que calibração não é detalhe estético: ela muda a forma física do contínuo.

Experimento 5: temperatura por Wien. Escolha três estrelas com cores visivelmente diferentes. Para cada uma, acumule fótons por tempo semelhante, use o espectro calibrado, determine $\lambda_{\max}$ e calcule T pela lei de Wien. Ordene os alvos por temperatura. A estrela mais azul ficou com maior temperatura? A mais avermelhada ficou com menor temperatura? Há alguma estrela semelhante ao Sol? Justifique numericamente comparando sua temperatura com $T_{\odot} \simeq 5778 \text{ K}$.

Experimento 6: fotometria em bandas. Para os mesmos alvos, registre F_B , F_V e F_R . Calcule

$$B - V = -2,5 \log_{10}(F_B/F_V).$$

Compare $B - V$ com a temperatura estimada por Wien. Explique por que $B - V$ menor indica objeto relativamente mais azul e, em geral, mais quente.

Experimento 7: linhas espectrais e velocidade radial. Escolha uma linha, preferencialmente $H\alpha$, $H\beta$ ou Na D . Registre λ_{obs} e calcule

$$v_r \simeq c \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0}.$$

Informe se o alvo está se aproximando ou se afastando. Repita com outra linha quando possível e compare os valores.

Experimento 8: interpretação física. Escolha duas estrelas e escreva uma cadeia de inferência:

fótons acumulados $\longrightarrow$ espectro reduzido $\longrightarrow$ temperatura, cor e velocidade radial.

Indique o que foi medido diretamente e o que depende de modelo físico.

Formato da entrega

A entrega deve conter o CSV exportado pelo laboratório, uma tabela com pelo menos três alvos, os raios de abertura usados, o tempo acumulado de aquisição, os cálculos de T por Wien, $B - V$, velocidade radial por pelo menos uma linha e uma interpretação curta separando observação direta de inferência física.

Extensão opcional: Laboratório 3b

Uma versão complementar com imagens reais do SDSS está disponível em:

<https://rafaelcrdelima.github.io/Astronomia/laboratorio-capitulo-3b/>

Ela pode ser usada depois do laboratório artificial para comparar uma simulação controlada

com fotometria de abertura em dados reais.

As grandezas do campo de radiação

Antes de qualquer lei, é preciso definir com precisão o que se está medindo. A grandeza fundamental é a **intensidade específica** I_ν : a energia que atravessa uma área dA , em um intervalo de tempo dt , dentro de um ângulo sólido $d\Omega$ em torno de uma direção que faz ângulo θ com a normal, e em um intervalo de frequência $d\nu$:

$$dE = I_\nu \cos \theta dA d\Omega d\nu dt.$$

Sua unidade é $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$. A propriedade decisiva de I_ν é que, na ausência de emissão ou absorção, **ela é constante ao longo de um raio**. Isso parece contradizer a lei do inverso do quadrado, mas não contradiz: à medida que nos afastamos de uma fonte extensa, o fluxo cai com d^{-2} e o ângulo sólido subtendido cai com d^{-2} , e a razão entre os dois — que é a intensidade — permanece a mesma. É por isso que a superfície do Sol tem o mesmo brilho superficial visto da Terra ou de Júpiter, embora entregue fluxos muito diferentes.

Os **momentos** da intensidade produzem as demais grandezas. Integrando sobre todas as direções com peso $\cos \theta$ obtém-se o fluxo:

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega.$$

Sem peso, obtém-se a densidade de energia:

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega.$$

Com peso $\cos^2 \theta$, a pressão de radiação:

$$P_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega.$$

Para um campo isotrópico, as integrais angulares são imediatas: $\int d\Omega = 4\pi$ e $\int \cos^2 \theta d\Omega = 4\pi/3$, de modo que

$$u = \frac{4\pi}{c} I, \quad P = \frac{1}{3} u.$$

A relação $P = u/3$ é a equação de estado da radiação, e ela reaparece na estrutura estelar, na cosmologia do universo primordial e na dinâmica de discos de acreção. Ela vale para qualquer gás de partículas ultrarrelativísticas, não só fótons.

A equação de transporte radiativo

Ao percorrer um caminho ds dentro de um meio, a intensidade perde energia por absorção e ganha por emissão:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu.$$

Aqui κ_ν é a opacidade (em $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$) e j_ν o coeficiente de emissão. Definindo a **profundidade óptica** $d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho ds$ e a **função fonte** $S_\nu = j_\nu / (\kappa_\nu \rho)$, a equação assume sua forma canônica:

$$\boxed{\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu}$$

Esta é uma equação diferencial linear de primeira ordem, com solução formal obtida por fator integrante:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t)e^{-(\tau_\nu-t)} dt.$$

A leitura é direta: o primeiro termo é a radiação de fundo atenuada exponencialmente; o segundo é a contribuição emitida ao longo do caminho, cada elemento também atenuado pelo que resta à sua frente.

Dois regimes importam. Se $\tau_\nu \ll 1$ (meio opticamente fino), $I_\nu \simeq I_\nu(0) + \tau_\nu S_\nu$: vemos através do meio, e a emissão apenas soma. Se $\tau_\nu \gg 1$ (opticamente espesso) e S_ν varia devagar, $I_\nu \rightarrow S_\nu$: a intensidade emergente iguala a função fonte local, independentemente do que havia atrás. Em equilíbrio termodinâmico local, $S_\nu = B_\nu(T)$, a função de Planck — e é *por isso* que corpos opticamente espessos irradiam como corpos negros. A afirmação “estrelas emitem aproximadamente como corpos negros” não é uma coincidência empírica: é consequência de $\tau \gg 1$ na fotosfera.

Uma consequência prática: define-se a fotosfera como a superfície em que $\tau_\nu \simeq 2/3$, valor que sai da aproximação de Eddington para o transporte em atmosferas plano-paralelas. Como κ_ν depende do comprimento de onda, **a fotosfera está em profundidades físicas diferentes em cada cor** — e é exatamente isso que produz o escurecimento de bordo e as linhas de absorção.

Dedução: por que existem linhas de absorção

Considere uma atmosfera em que a temperatura cai para fora. Em uma frequência de linha, a opacidade κ_ν é muito maior que no contínuo. Como a fotosfera fica onde $\tau_\nu \simeq 2/3$, e como τ acumula mais rápido onde κ é grande, na frequência da linha atingimos $\tau = 2/3$ em uma camada *mais alta* da atmosfera.

Camadas mais altas são mais frias. Como a intensidade emergente é $S_\nu \simeq B_\nu(T)$ avaliada nessa camada, e B_ν cresce com T , a linha aparece *mais escura* que o contínuo vizinho. Não há absorção líquida de energia no sentido ingênuo: há emissão de uma camada mais fria. Se a temperatura crescesse para fora — como acontece na cromosfera solar — a mesma lógica produziria linhas em *emissão*. A direção do gradiente de temperatura decide o sinal da linha.

A lei de Planck, deduzida

O resultado central da física da radiação pode ser montado em duas etapas.

Etapa 1: contar modos. Em uma cavidade cúbica de lado L com paredes condutoras, as ondas estacionárias têm vetores de onda $\vec{k} = (\pi/L)(n_x, n_y, n_z)$ com n_i inteiros positivos. O número de modos com módulo de $\vec{k}$ até k é o volume do octante de esfera no espaço (n_x, n_y, n_z) , multiplicado por 2 para as duas polarizações:

$$N(k) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{kL}{\pi} \right)^3 = \frac{k^3 L^3}{3\pi^2}.$$

Com $k = 2\pi\nu/c$, a densidade de modos por unidade de volume e frequência é

$$g(\nu) = \frac{1}{L^3} \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}.$$

Etapa 2: energia média por modo. Aqui está a diferença entre a física clássica e a quântica. Classicamente, a equipartição daria kT por modo, e a densidade de energia seria $u_\nu = 8\pi\nu^2 kT/c^3$ — a lei de Rayleigh-Jeans, que diverge ao integrar em ν : é a catástrofe do ultravioleta. Planck impôs que a energia de um modo só pode assumir valores $E_n = nh\nu$. Com a distribuição de Boltzmann, a energia média é

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}}.$$

Chamando $x = e^{-h\nu/kT}$, o denominador é a série geométrica $1/(1-x)$ e o numerador é $h\nu x/(1-x)^2$. Logo

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu x}{1-x} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Multiplicando pela densidade de modos e convertendo densidade de energia em intensidade ($I_\nu = cu_\nu/4\pi$):

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Os dois limites são instrutivos. Para $h\nu \ll kT$, expandindo a exponencial, $B_\nu \rightarrow 2\nu^2 kT/c^2$: recupera-se Rayleigh-Jeans, e é por isso que radioastronomia mede “temperatura de brilho” diretamente proporcional à intensidade. Para $h\nu \gg kT$, $B_\nu \rightarrow (2h\nu^3/c^2)e^{-h\nu/kT}$: a cauda de Wien, exponencialmente suprimida.

Em comprimento de onda, usando $B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu$ e $|d\nu/d\lambda| = c/\lambda^2$:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Vale notar que B_ν e B_λ têm picos em posições *diferentes* — eles não descrevem a mesma coisa, e sim densidades por unidade de frequência e por unidade de comprimento de onda.

Dedução: as leis de Wien e de Stefan-Boltzmann

Wien. Derivando B_λ em relação a λ e igualando a zero, com $x = hc/\lambda kT$:

$$\frac{d}{d\lambda} [\lambda^{-5} (e^x - 1)^{-1}] = 0 \implies 5(1 - e^{-x}) = x.$$

A raiz não trivial dessa transcendental é $x_{\max} = 4,965$, obtida numericamente. Logo

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,965 k} = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

A constante de Wien não é empírica: ela é $hc/4,965k$, três constantes fundamentais e a raiz de uma equação.

Stefan-Boltzmann. Integrando B_ν sobre todas as frequências e sobre o hemisfério, o fluxo emergente de uma superfície é $F = \pi \int_0^\infty B_\nu d\nu$. Substituindo $x = h\nu/kT$:

$$F = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

A integral vale $\pi^4/15$ (é $\Gamma(4)\zeta(4) = 6 \times \pi^4/90$). Portanto

$$F = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Novamente: a constante de Stefan-Boltzmann é uma combinação de k , h e c , não um parâmetro ajustado. Toda a lei $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4$, usada dezenas de vezes nesta apostila, repousa nessa integral.

Coeficientes de Einstein e a origem das linhas

Considere dois níveis atômicos, 1 e 2, com energias separadas por $h\nu_0$. Einstein identificou três processos: absorção, com taxa $B_{12}n_1\bar{J}$; emissão espontânea, com taxa $A_{21}n_2$; e emissão estimulada,

com taxa $B_{21}n_2\bar{J}$, em que $\bar{J}$ é a intensidade média. Em equilíbrio estatístico,

$$n_1B_{12}\bar{J} = n_2A_{21} + n_2B_{21}\bar{J}.$$

Isolando $\bar{J}$ e impondo que, em equilíbrio termodinâmico, $\bar{J} = B_\nu(T)$ e $n_2/n_1 = (g_2/g_1)e^{-h\nu_0/kT}$, a igualdade só pode valer para todo T se

$$g_1B_{12} = g_2B_{21}, \quad A_{21} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2}B_{21}.$$

Estas são as **relações de Einstein**. Elas têm um conteúdo notável: são propriedades *atômicas*, deduzidas por um argumento termodinâmico, e valem mesmo fora de equilíbrio. E a segunda mostra que a emissão espontânea cresce com ν^3 , razão pela qual transições ópticas decaem em nanossegundos enquanto transições de rádio — como a de 21 cm do hidrogênio — têm tempos de vida de milhões de anos.

Populações: Boltzmann e Saha

A razão de populações entre dois níveis de excitação de um mesmo átomo, em equilíbrio térmico, segue a **equação de Boltzmann**:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2-E_1)/kT}.$$

A razão entre estágios de ionização sucessivos exige incluir o elétron livre, que tem estados de translação disponíveis. Contando esses estados no espaço de fase e integrando, obtém-se a **equação de Saha**:

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

em que χ_i é o potencial de ionização e Z são as funções de partição. O fator $(2\pi m_e kT/h^2)^{3/2}$ é a densidade quântica de estados do elétron livre, e o $1/n_e$ expressa que ionização é favorecida quando há poucos elétrons para recombinar.

Essas duas equações juntas explicam a **sequência espectral** OBAFGKM, que por décadas foi apenas um ordenamento empírico. As linhas de Balmer do hidrogênio, por exemplo, exigem átomos com o elétron no nível $n = 2$. Em estrelas frias, quase nenhum átomo está excitado — Boltzmann suprime a população. Em estrelas quentes, o hidrogênio está quase todo ionizado — Saha remove os átomos neutros. As linhas de Balmer atingem máxima intensidade em torno de 9500 K, nas estrelas de tipo A, por causa da competição entre esses dois efeitos. A força de uma linha não mede abundância diretamente; mede abundância vezes a fração de átomos no estado certo, e essa fração depende exponencialmente da temperatura.

Alargamento de linhas

Nenhuma linha é infinitamente estreita, e a forma do perfil carrega física.

O **alargamento natural** decorre do princípio da incerteza: um nível com tempo de vida Δt tem energia indefinida por $\Delta E \simeq \hbar/\Delta t$, produzindo um perfil lorentziano de largura $\Delta\nu \simeq 1/(2\pi\Delta t)$.

O **alargamento Doppler** vem da distribuição de velocidades térmicas. Com a distribuição de Maxwell-Boltzmann, a largura característica é

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

produzindo um perfil gaussiano. Note a dependência $m^{-1/2}$: linhas de hidrogênio são intrinsecamente mais alargadas que linhas de ferro à mesma temperatura, o que permite separar os dois efeitos.

O **alargamento colisional** ou de pressão vem de perturbações dos níveis por partículas vizinhas; é lorentziano e cresce com a densidade. É por isso que anãs brancas, com gravidades superficiais enormes e atmosferas densas, têm linhas de hidrogênio absurdamente largas — e é assim que se distingue uma anã branca de uma estrela normal apenas pelo espectro, sem conhecer sua distância.

A convolução de um perfil gaussiano com um lorentziano é o **perfil de Voigt**, que descreve linhas reais: núcleo gaussiano dominado por Doppler e asas lorentzianas dominadas por colisões e amortecimento natural. Ajustar um Voigt a uma linha observada e separar as duas contribuições fornece, simultaneamente, temperatura e densidade da camada onde a linha se forma.

Efeito Doppler: a versão que se deve usar

Para velocidades pequenas, $\Delta\lambda/\lambda_0 = v_r/c$. A expressão relativística correta, para movimento puramente radial, é

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

que se reduz à forma simples para $\beta \ll 1$. Há ainda o **Doppler transversal**, $\lambda_{\text{obs}}/\lambda_0 = \gamma$, puramente relativístico e sem análogo clássico, relevante em jatos e em discos de acreção próximos a objetos compactos.

Convém insistir em uma distinção que atravessa o resto da apostila: o desvio para o vermelho cosmológico *não* é efeito Doppler. Ele não decorre de movimento através do espaço, e sim da expansão do próprio espaço enquanto a luz viaja, com $1+z = 1/a(t_{\text{emis}})$. Usar a fórmula Doppler para converter z em velocidade produz resultados sem sentido para $z \gtrsim 0,1$ e é um dos erros conceituais mais comuns da área.

Atmosferas estelares: a aproximação de Eddington

A equação de transporte pode ser resolvida analiticamente em um caso idealizado que, apesar da simplicidade, reproduz surpreendentemente bem a estrutura de uma fotosfera. Considere uma atmosfera plano-paralela, em equilíbrio radiativo, com opacidade independente da frequência — a chamada **atmosfera cinza**.

Escrevendo $\mu = \cos\theta$ e integrando a equação de transporte sobre todos os ângulos, obtêm-se os chamados momentos:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I d\mu, \quad H = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I\mu d\mu, \quad K = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I\mu^2 d\mu.$$

O primeiro momento da equação de transporte fornece $dH/d\tau = J - S$, e em equilíbrio radiativo o fluxo é constante, $H = \text{const}$, o que impõe $J = S$. O segundo momento dá

$$\frac{dK}{d\tau} = H.$$

Esta última é exata. O fecho do sistema exige uma relação entre K e J , e é aí que entra a **aproximação de Eddington**: supõe-se que o campo de radiação seja quase isotrópico, de modo que $K = J/3$ — exatamente a mesma relação $P = u/3$ deduzida antes. Então

$$\frac{dJ}{d\tau} = 3H \implies J(\tau) = 3H\tau + J(0).$$

A condição de contorno na superfície — não há radiação entrando — fornece, após integração, $J(0) = 2H$. Portanto

$$J(\tau) = H(3\tau + 2).$$

Como $J = S = \sigma T^4/\pi$ em equilíbrio termodinâmico local, e $H = \sigma T_{\text{ef}}^4/4\pi$, chega-se ao **perfil de temperatura da atmosfera cinza**:

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{\text{ef}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$$

Três consequências valem ser lidas com atenção. Primeira: $T = T_{\text{ef}}$ exatamente em $\tau = 2/3$ — e é daí que vem a definição operacional da fotosfera usada em todo lugar. Segunda: na superfície ($\tau = 0$), $T = (1/2)^{1/4}T_{\text{ef}} \simeq 0,84 T_{\text{ef}}$; a temperatura de contorno não é zero, e sim cerca de 84% da efetiva. Terceira: a temperatura cresce monotonicamente para dentro, com $T \propto \tau^{1/4}$ em profundidade — resultado que justifica a hipótese usada para explicar linhas de absorção.

Escurecimento de bordo, deduzido

Com o perfil de temperatura acima, a intensidade emergente em uma direção μ sai da solução formal da equação de transporte:

$$I(0, \mu) = \int_0^\infty S(\tau) e^{-\tau/\mu} \frac{d\tau}{\mu}.$$

Com $S(\tau) = a + b\tau$, um resultado conhecido como relação de Eddington-Barbier dá simplesmente $I(0, \mu) = a + b\mu$, ou seja: **a intensidade emergente em uma direção corresponde à função fonte avaliada em $\tau = \mu$** . Substituindo $a = 2H$ e $b = 3H$:

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{2 + 3\mu}{5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mu.$$

Comparando com a lei linear de escurecimento de bordo, $I(\mu)/I(1) = 1 - u(1 - \mu)$, identifica-se $u = 3/5 = 0,6$. O valor solar medido no visível é $u \simeq 0,6-0,7$. Uma aproximação de duas linhas reproduz um fenômeno observado com precisão de dez por cento — e explica por que o disco solar tem borda mais escura, por que o fundo de um trânsito planetário é curvo e por que ignorar o efeito enviesa raios planetários.

As fontes de opacidade

O coeficiente κ que aparece em todas as equações não é um número único, e sim a soma de processos distintos que dominam em regimes diferentes.

Espalhamento por elétrons livres (Thomson). Independente da frequência e da temperatura:

$$\kappa_{\text{es}} = \frac{\sigma T n_e}{\rho} = 0,02 (1 + X) \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}.$$

Domina em interiores quentes e totalmente ionizados, e é por isso que a relação $L \propto M^3$ deduzida por homologia usa κ constante.

Livre-livre (Bremsstrahlung inverso). Um elétron livre passando por um íon absorve um fóton. A dependência é

$$\kappa_{\text{ff}} \propto \rho T^{-7/2},$$

a chamada **lei de Kramers**. Ela também descreve aproximadamente a opacidade ligado-livre (fotoionização). O expoente negativo é crucial: opacidade cresce ao esfriar, o que torna os envelopes estelares opacos e favorece convecção.

Íon negativo de hidrogênio. O H^- tem energia de ligação de apenas 0,75 eV e é facilmente fotodissociado por luz visível. Sua abundância exige hidrogênio neutro e elétrons livres, condição satisfeita em atmosferas de estrelas de tipo solar, onde os metais fornecem os elétrons. É a principal fonte de opacidade na fotosfera solar, e portanto a responsável direta pela forma do espectro contínuo do Sol — aquele mesmo que o laboratório do capítulo integra.

Linhas atômicas e moleculares. Em estrelas frias, milhões de linhas se sobrepõem produzindo o *line blanketing*, que retém radiação e redistribui o fluxo para o infravermelho. Modelar atmosferas de anãs M ou de exoplanetas é, em grande parte, um problema de contabilizar corretamente essas linhas.

Para uso nas equações de estrutura, define-se a **média de Rosseland**, que é uma média harmônica ponderada:

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}.$$

A escolha da média harmônica não é arbitrária: em transporte difusivo, a energia escapa preferencialmente pelas frequências *mais transparentes*, e é a média harmônica que reflete corretamente esse fato. Usar uma média aritmética superestimaria grosseiramente a opacidade efetiva.

Emissão de corpos não térmicos: síncrotron

Nem toda radiação astrofísica é térmica. Um elétron relativístico de fator de Lorentz γ espiralando em um campo magnético B irradia potência

$$P_{\text{sinc}} = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 u_B, \quad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

concentrada em torno da frequência crítica

$$\nu_c \simeq \frac{3}{4\pi} \gamma^2 \frac{eB}{m_e}.$$

A dependência γ^2 nas duas expressões é o que torna o síncrotron tão eficiente: elétrons com $\gamma \sim 10^3$ – 10^4 em campos de microgauss emitem em rádio, enquanto os mesmos elétrons em campos mais intensos emitem em raios X.

Se a população de elétrons segue uma lei de potência em energia, $N(\gamma) \propto \gamma^{-p}$ — como produzido por aceleração em choques —, o espectro integrado também é uma lei de potência:

$$F_\nu \propto \nu^{-(p-1)/2}.$$

Para o valor típico $p \simeq 2,4$ produzido por aceleração de Fermi de primeira ordem, obtém-se $F_\nu \propto \nu^{-0,7}$ — exatamente o índice espectral observado no fundo de rádio galáctico e em rádio-galáxias. A distinção entre emissão térmica (espectro de corpo negro, ou $F_\nu \propto \nu^2$ no regime Rayleigh-Jeans) e não térmica (lei de potência com índice negativo) é feita justamente medindo o espectro em várias frequências, e é o diagnóstico primário para identificar partículas relativísticas em uma fonte.

Laboratório de dados 3 – a temperatura do Sol a partir do espectro medido

Arquivo: 03_espectro_solar.csv — irradiância espectral solar medida acima da atmosfera terrestre, de 200 a 2400 nm.

Física. Três leis independentes, aplicadas ao mesmo arquivo:

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}, \quad F = \int F_{\lambda} d\lambda, \quad F = \left(\frac{R_{\odot}}{d} \right)^2 \sigma T_{\text{ef}}^4.$$

Roteiro.

1. Localize o comprimento de onda de máxima irradiância. No Excel: =ÍNDICE(A:A;CORRESP(MÁXIMO(B:B);B:B;0)). Aplique a lei de Wien e obtenha uma temperatura.
2. Integre a irradiância pela regra do trapézio: some (B2+B3)/2*(A3-A2) ao longo de todas as linhas. O resultado é o fluxo total recebido pela Terra, em W/m².
3. Inverta a lei de Stefan-Boltzmann com $R_{\odot} = 6,957 \times 10^8 \text{ m}$, $d = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ e $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ para obter T_{ef} .
4. Compare as duas temperaturas. Por que a de Wien é diferente?

Entrega. Os dois valores de temperatura, o fluxo integrado e uma explicação da diferença entre eles.

Confira. A integral deve dar em torno de 1310 W/m² — menor que a constante solar de 1361, porque o arquivo termina em 2400 nm e falta o infravermelho distante. Corrigindo por isso, $T_{\text{ef}} \simeq 5772 \text{ K}$. A lei de Wien dá um valor mais alto, porque o Sol não é um corpo negro perfeito.

Capítulo 7 – Telescópios, detectores e observação multi-banda

Telescópios são máquinas de coletar fótons e separar informação. A abertura determina a área coletora e influencia a resolução angular. Em regime limitado por difração, a escala angular mínima é proporcional a λ/D , em que D é o diâmetro do instrumento. Isso explica por que telescópios maiores distinguem detalhes menores e por que observações em rádio exigem antenas ou interferômetros gigantescos. Na prática, a atmosfera, a estabilidade térmica, os detectores e o processamento de dados também limitam o resultado final.

Cada faixa do espectro revela processos diferentes. Rádio traça gás frio, campos magnéticos e linhas como a de 21 cm do hidrogênio neutro. Infravermelho atravessa melhor regiões empoeiradas e revela objetos frios, discos e estrelas jovens. Visível é rico em linhas atômicas e excelente para astrometria e fotometria. Ultravioleta mostra estrelas quentes e gás ionizado. Raios X e gama revelam acreção, choques, plasmas quentes, pulsares, remanescentes de supernovas e eventos extremos. A astrofísica moderna é multiobservacional porque nenhum comprimento de onda conta a história inteira.

A fotometria mede brilho em bandas. Com filtros diferentes, obtemos cores, e cores podem ser ligadas a temperatura, avermelhamento, idade populacional ou composição. A espectroscopia dispersa a luz em comprimento de onda e permite diagnósticos mais ricos. A imagem mostra morfologia e posição. A polarimetria informa orientação de campos magnéticos e geometria de espalhamento. A variabilidade revela escalas de tempo e tamanhos: se um objeto muda em um dia, a região responsável não pode ser muito maior que um dia-luz, pois partes distantes não poderiam coordenar a variação mais rapidamente que a luz.

Exemplo guiado. Uma linha que deveria aparecer em $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ é observada em 501 nm . O deslocamento relativo é $\Delta\lambda/\lambda = 1/500 = 0,002$. A velocidade radial aproximada é $v_r \simeq 0,002c \simeq 600 \text{ km s}^{-1}$. Esse número pode indicar movimento orbital, ejeção de gás, rotação ou recessão, dependendo do objeto. A conta sozinha não decide o cenário; ela precisa de contexto físico.

Perguntas para discussão.

- Por que espectros são mais diagnósticos que imagens bonitas?
- Que limitações surgem ao estimar temperatura apenas pela cor?
- Como distinguir deslocamento Doppler de uma identificação errada de linha?
- Por que telescópios espaciais são decisivos em ultravioleta e raios X?

Para praticar. Compare três espectros esquemáticos: uma estrela fria com bandas moleculares, uma estrela quente com linhas de hidrogênio e uma nebulosa de emissão. Identifique contínuo, linhas, possíveis temperaturas relativas e tipo de objeto. Em seguida, anote o que não pode ser concluído sem calibração, distância ou modelos atmosféricos. Esta prática treina uma habilidade central: separar observação direta de inferência física.

Dedução curta: de energia do fóton à temperatura

A relação $E = h\nu = hc/\lambda$ liga uma grandeza microscópica, a energia de um fóton, a uma grandeza observável, o comprimento de onda. Para um corpo negro, o pico do espectro satisfaz aproximadamente

$$\lambda_{\text{max}} T = 2,9 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Assim, uma estrela cujo pico idealizado estivesse em 500 nm teria

$$T \simeq \frac{2,9 \times 10^{-3}}{5,0 \times 10^{-7}} \simeq 5800 \text{ K}.$$

O número é solar, mas a interpretação exige cuidado: filtros medem bandas largas, atmosferas têm linhas de absorção e poeira pode deslocar a cor observada. A lei de Wien é um primeiro diagnóstico, não uma sentença final.

Exemplo de aplicação: resolução angular

No limite de difração, a resolução angular típica de uma abertura circular é da ordem de

$$\theta \simeq 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Para um telescópio de $D = 2\text{ m}$ observando em $\lambda = 500\text{ nm}$, temos $\theta \simeq 3 \times 10^{-7}\text{ rad}$, cerca de 0,06 segundo de arco. Da superfície terrestre, a turbulência atmosférica frequentemente piora esse valor. Essa comparação explica por que telescópios espaciais e óptica adaptativa mudaram tanto a astronomia observacional.

Os instrumentos que definem a astrofísica atual

A astronomia da década de 2020 é dominada por poucas máquinas muito grandes, e vale conhecer o que cada uma faz de diferente. Não por curiosidade tecnológica: cada instrumento abre uma janela específica, e boa parte dos resultados recentes só existe porque alguém resolveu um problema instrumental concreto.

Panorama instrumental (situação em 2026)

Instalação	Faixa	O que ela torna possível
JWST (espaço)	0,6–28 μm	Galáxias muito distantes, interiores de nuvens moleculares, espectros de atmosferas de exoplanetas
Vera C. Rubin (Chile)	óptico	Varredura repetida de todo o céu austral; transientes e movimento em escala industrial
Gaia (espaço)	óptico	Astrometria de $\sim 1,8$ bilhão de estrelas: paralaxes e movimentos próprios
ALMA (Chile)	mm/submm	Discos protoplanetários e gás frio com resolução de dezenas de mas
Event Horizon Telescope	1,3 mm	Interferometria do tamanho da Terra: sombra de buracos negros
LIGO–Virgo–KAGRA	ondas gravitacionais	Fusões de objetos compactos (Capítulo 11)
IceCube (Antártica)	neutrinos	Fontes astrofísicas de partículas de altíssima energia
Chandra, XMM, NICER	raios X	Acreção, plasmas quentes, raios de estrelas de nêutrons

James Webb: por que infravermelho muda tudo. O JWST tem espelho primário segmentado de 6,5 m (18 hexágonos, 25,4 m² de área coletora, contra 4,0 m² do Hubble) e opera no ponto de Lagrange L_2 , a 1,5 milhão de quilômetros da Terra. A escolha do infravermelho não é estética;

ela resolve dois problemas físicos ao mesmo tempo. Primeiro, o desvio para o vermelho: a luz ultravioleta e visível emitida por uma galáxia em $z = 10$ chega até nós esticada por um fator $1 + z = 11$, caindo no infravermelho próximo. Nenhum telescópio óptico consegue vê-la, por maior que seja. Segundo, a poeira: grãos interestelares espalham luz azul com muito mais eficiência que luz vermelha, de modo que regiões de formação estelar opacas no visível ficam transparentes em $2\ \mu\text{m}$.

O preço é térmico. Um telescópio que observa em $10\ \mu\text{m}$ e está a 300 K enxerga principalmente a própria emissão: pela lei de Wien, 300 K tem pico perto de $10\ \mu\text{m}$. Por isso o JWST carrega um para-sol de cinco camadas do tamanho de uma quadra de tênis, que mantém o lado frio abaixo de 50 K passivamente, e o instrumento MIRI usa ainda um criorefrigerador ativo para chegar perto de 7 K. Toda a arquitetura da missão — órbita, para-sol, espelho dobrável — decorre de uma exigência de física de corpo negro.

Vera C. Rubin: a mudança de escala. O Observatório Vera C. Rubin, no Cerro Pachón, combina um telescópio de 8,4 m com a maior câmera astronômica já construída: 3,2 gigapixels cobrindo 9,6 graus quadrados por exposição, cerca de quarenta vezes a área da Lua cheia. O plano é o *Legacy Survey of Space and Time* (LSST): dez anos varrendo repetidamente o céu austral, com pares de exposições curtas, gerando da ordem de 20 TB por noite e até milhões de alertas automáticos de variação por noite. As primeiras imagens públicas saíram em 2025 e o levantamento longo começa em seguida.

O salto aqui não é de sensibilidade, é de *cadência*. Um telescópio que fotografa o mesmo campo centenas de vezes transforma o céu de um retrato em um filme, e isso muda o tipo de pergunta que se pode fazer: quantas supernovas por ano por galáxia? Quantos asteroides cruzam a órbita da Terra? Como varia um núcleo ativo em escala de dias? Nenhuma dessas perguntas se responde com uma imagem profunda isolada. Voltaremos a esse ponto no Capítulo 18.

Gaia: astrometria como infraestrutura. A missão Gaia mediu posições, paralaxes e movimentos próprios de cerca de 1,8 bilhão de estrelas, com precisão de dezenas de microssegundos de arco para estrelas brilhantes. Isso equivale a medir o diâmetro de um fio de cabelo a mil quilômetros. As observações terminaram em 2025, mas os catálogos continuam sendo publicados e reprocessados. O efeito prático é silencioso e enorme: quase toda distância estelar usada hoje na astrofísica galáctica, e portanto quase toda luminosidade, raio e massa inferidos, apoia-se em algum ponto na calibração do Gaia. Quando um dado desses muda, muda junto uma camada inteira de resultados derivados.

Interferometria: driblando o limite λ/D . A resolução de uma abertura única é $\theta \simeq 1,22\lambda/D$. Em rádio, λ é grande demais para que qualquer prato isolado resolva detalhes finos: uma antena de 100 m em 1,3 mm dá apenas 2,7 segundos de arco. A saída é combinar sinais de antenas separadas por uma distância B , e a resolução passa a valer aproximadamente λ/B . Com B igual ao diâmetro da Terra, o Event Horizon Telescope alcança cerca de 20 microssegundos de arco em 1,3 mm — resolução suficiente para a sombra do buraco negro de M 87 e a de Sagitário A*. O ALMA aplica a mesma ideia em escala menor, com 66 antenas e linhas de base de até 16 km, e foi ele que transformou discos protoplanetários de hipótese em imagem.

Dedução curta: por que sinal-ruído cresce com a raiz do tempo

Se uma fonte entrega $\dot{N}$ fótons por segundo ao detector, uma exposição de duração t acumula $S = \dot{N}t$ contagens. A natureza discreta da luz impõe uma flutuação de Poisson, $\sigma_S = \sqrt{S}$. No regime em que a própria fonte domina o ruído,

$$\frac{S}{\sigma} = \frac{\dot{N}t}{\sqrt{\dot{N}t}} = \sqrt{\dot{N}t}.$$

Dobrar a qualidade de uma medida exige, portanto, quadruplicar o tempo. Incluindo céu,

corrente escura e ruído de leitura, a expressão realista é

$$\frac{S}{\sigma} = \frac{\dot{N}t}{\sqrt{\dot{N}t + n_{\text{pix}} (\dot{B}t + \dot{D}t + R^2)}},$$

com $\dot{B}$ a taxa de fótons do céu por pixel, $\dot{D}$ a corrente escura e R o ruído de leitura. A leitura pedagógica é: em objetos brilhantes vale a pena expor pouco e muitas vezes; em objetos fracos, o termo R^2 penaliza exposições curtas repetidas, e é melhor expor por mais tempo de cada vez. Escolher estratégia observacional é resolver essa competição.

Exemplo de aplicação: quanto o JWST ganha do Hubble

A razão de áreas coletoras é $25,4/4,0 \simeq 6,4$, então o JWST acumula fótons cerca de seis vezes mais rápido. No regime limitado por fóton, o mesmo sinal-ruído é atingido em um tempo 6,4 vezes menor. Em resolução angular, a comparação depende do comprimento de onda: em $2\,\mu\text{m}$, o JWST entrega $\theta \simeq 1,22\lambda/D \simeq 0,08''$, enquanto o Hubble, no mesmo comprimento de onda, ficaria em $0,21''$. Mas em $0,5\,\mu\text{m}$ o Hubble dá $0,05''$ e o JWST simplesmente não observa. Os dois telescópios não competem: eles cobrem regiões diferentes do plano (λ, θ) , e é por isso que os dois continuam sendo usados.

Detectores e o que eles distorcem. No visível, o CCD e, cada vez mais, o CMOS convertem fótons em elétrons com eficiência quântica que pode passar de 90%. No infravermelho, matrizes de HgCdTe cumprem o papel, com a complicação de que precisam ser resfriadas. Em raios X, cada evento é registrado individualmente, com energia e tempo de chegada — um espectro de raios X é literalmente uma lista de fótons. Em rádio, o que se registra é o campo elétrico, com fase, e é isso que torna a interferometria possível.

Nenhum detector é neutro. Ele tem resposta que varia com o comprimento de onda e com a posição no chip, pixels defeituosos, não linearidade perto da saturação, e coleta raios cósmicos. Por isso o dado bruto passa sempre por subtração de *bias* e *dark*, divisão por *flat-field* e rejeição de *outliers* antes de virar ciência. Esse ponto reaparece no Capítulo 19: calibração não é burocracia, é parte do resultado físico.

Óptica adaptativa. A turbulência atmosférica embaralha a frente de onda em escalas de tempo de milissegundos, limitando a resolução ao chamado *seeing*, tipicamente $0,6''$ a $1,5''$ em bons sítios — muito pior que o limite de difração de um telescópio de 8 m. A óptica adaptativa mede a deformação usando uma estrela de referência (às vezes criada artificialmente, excitando sódio na alta atmosfera com um laser) e corrige com um espelho deformável centenas de vezes por segundo. É essa técnica que permitiu acompanhar as órbitas de estrelas em torno de Sagitário A* a partir do solo, resultado que rendeu o Nobel de Física de 2020.

O que vem depois. O Extremely Large Telescope, de 39 m, está em construção no Chile; o SKA constrói arranjos de rádio na África do Sul e na Austrália; o CTAO observará raios gama de altíssima energia; o Roman Space Telescope levará campo amplo ao infravermelho. Uma apostila escrita hoje envelhece rápido nessa seção — e isso é um bom sinal sobre a área.

Difração e o limite físico de resolução

O padrão produzido por uma abertura circular iluminada por uma onda plana é obtido integrando a contribuição de cada elemento da abertura com sua fase relativa — a integral de difração de

Fraunhofer. Para uma abertura circular de diâmetro D , o resultado é o **padrão de Airy**:

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{2J_1(\pi D \sin \theta / \lambda)}{\pi D \sin \theta / \lambda} \right]^2,$$

em que J_1 é a função de Bessel de primeira ordem. O primeiro zero de $J_1(x)$ ocorre em $x = 3,8317$, o que fornece o raio angular do primeiro anel escuro:

$$\sin \theta_{\min} = \frac{3,8317}{\pi} \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

O fator 1,22, que aparece em toda a literatura, é portanto $3,8317/\pi$ — não é uma convenção, é a primeira raiz de uma função de Bessel. O critério de Rayleigh define duas fontes como resolvidas quando o máximo de uma cai sobre o primeiro zero da outra, o que dá

$$\theta_{\text{res}} \simeq 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Cerca de 84% da energia cai dentro do disco central de Airy; o restante espalha-se nos anéis, o que importa muito em imageamento de alto contraste — procurar um planeta ao lado de uma estrela é, em grande medida, um problema de controlar as asas do padrão de difração.

Escala de placa, amostragem e a condição de Nyquist

Um telescópio com distância focal f projeta um ângulo θ em uma distância linear $x = f\theta$ no plano focal. A **escala de placa** é portanto

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{f},$$

usualmente citada em segundos de arco por milímetro: $206265/f$ [mm]. Um detector com pixels de tamanho p amostra o céu com resolução p/f radianos por pixel.

A escolha correta de p segue o teorema da amostragem: para não perder informação espacial, é preciso pelo menos dois pixels por elemento de resolução. Assim,

$$p \lesssim \frac{f\theta_{\text{res}}}{2}.$$

Amostrar com menos que isso (*undersampling*) perde detalhe irre recuperável e produz artefatos; amostrar com muito mais espalha os mesmos fótons por mais pixels, e como cada pixel contribui com ruído de leitura R , isso degrada o sinal-ruído de fontes fracas. Existe, portanto, um ótimo, e ele é o motivo pelo qual câmeras astronômicas profissionais são projetadas junto com o telescópio, e não escolhidas depois.

Interferometria: por que a resolução passa a depender da linha de base

Considere duas aberturas separadas por uma linha de base $\vec{B}$, observando uma fonte na direção $\hat{s}$. A diferença de caminho óptico entre elas é $\vec{B} \cdot \hat{s}$, e a diferença de fase é $2\pi \vec{B} \cdot \hat{s} / \lambda$. Combinando os sinais, a saída varia como o cosseno dessa fase: são as franjas de interferência. Uma variação de direção $\delta\theta$ desloca a franja de um período completo quando

$$\frac{B \delta\theta}{\lambda} = 1 \quad \implies \quad \delta\theta = \frac{\lambda}{B}.$$

A resolução passa a ser fixada pela separação entre antenas, e não pelo diâmetro de cada uma. O que se perde é área coletora — e portanto sensibilidade — e a capacidade de reconstruir a imagem sem processamento.

O teorema de van Cittert-Zernike formaliza o resultado: a **visibilidade complexa** medida por um par de antenas é a transformada de Fourier bidimensional da distribuição de brilho da fonte, avaliada na frequência espacial $\vec{B}/\lambda$. Cada par de antenas amostra um ponto do plano de Fourier; a rotação da Terra faz a linha de base projetada varrer elipses nesse plano, preenchendo-o parcialmente. Reconstruir a imagem é inverter uma transformada de Fourier amostrada de forma incompleta — daí a necessidade de algoritmos de deconvolução como o CLEAN, e daí também o fato de que uma imagem interferométrica é sempre, em parte, uma *reconstrução* sujeita a hipóteses.

Sensibilidade: as duas equações fundamentais

Em regime óptico, o sinal em uma exposição de duração t é $S = \dot{N}t$ fótons, e o ruído combina Poisson da fonte, do céu e da corrente escura com o ruído de leitura:

$$\frac{S}{N} = \frac{\dot{N}t}{\sqrt{\dot{N}t + n_{\text{pix}} (\dot{B}t + \dot{D}t + R^2)}}.$$

Dois regimes assintóticos importam. Para fontes brilhantes, o termo $\dot{N}t$ domina e $S/N \simeq \sqrt{\dot{N}t}$: cresce com a raiz do tempo. Para fontes fracas dominadas por céu, $S/N \simeq \dot{N}\sqrt{t}/\sqrt{n_{\text{pix}}\dot{B}}$: ainda cresce com $\sqrt{t}$, mas com penalidade proporcional à raiz do brilho do céu — e é por isso que observatórios são construídos longe de cidades e que observações no infravermelho térmico exigem instrumentos criogênicos.

Em rádio, a expressão equivalente é a **equação do radiômetro**:

$$\Delta T_{\text{min}} = \frac{T_{\text{sist}}}{\sqrt{\Delta\nu t}},$$

que se obtém do mesmo argumento estatístico: o receptor mede potência em uma banda $\Delta\nu$ durante um tempo t , o que corresponde a $\sim \Delta\nu t$ amostras independentes, e a incerteza relativa cai com a raiz do número de amostras. Convertendo temperatura em densidade de fluxo através da área efetiva A_{ef} ,

$$S_{\text{min}} = \frac{2kT_{\text{sist}}}{A_{\text{ef}}\sqrt{\Delta\nu t}}.$$

Esta é a equação que governa toda a radioastronomia, incluindo as buscas discutidas no Capítulo 22: para detectar sinais mais fracos, aumenta-se área coletora, banda ou tempo — e os dois últimos só ajudam com a raiz quadrada.

Espectrógrafos: poder resolvente e a equação da grade

Uma grade de difração com espaçamento d entre ranhuras produz interferência construtiva quando

$$d(\sin \alpha + \sin \beta) = m\lambda,$$

com α o ângulo de incidência, β o de difração e m a ordem. Derivando em relação a λ obtém-se a dispersão angular $d\beta/d\lambda = m/(d \cos \beta)$: quanto maior a ordem e menor o espaçamento, mais o espectro se abre.

O **poder resolvente** de uma grade com N ranhuras iluminadas é

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN.$$

Espectrógrafos de baixa resolução, com $R \sim 10^2\text{--}10^3$, medem forma do contínuo e classificam objetos. Resoluções de $R \sim 10^4$ separam linhas individuais e medem velocidades radiais de dezenas de km s^{-1} . Instrumentos de $R \sim 10^5$, usados na busca de exoplanetas por velocidade radial, alcançam precisão sub-métrica por segundo — porque a informação está distribuída por milhares de linhas simultaneamente, e o erro estatístico cai com a raiz do número de linhas usadas.

A atmosfera: seeing e óptica adaptativa

A turbulência atmosférica embaralha a frente de onda. A teoria de Kolmogorov descreve a turbulência por um espectro de flutuações de índice de refração, do qual emerge um único parâmetro característico: o **comprimento de Fried** r_0 , definido como o diâmetro sobre o qual a frente de onda permanece aproximadamente plana. Em bons sítios, $r_0 \simeq 10\text{--}20\text{ cm}$ em 500 nm .

A resolução efetiva de um telescópio grande passa a ser

$$\theta_{\text{seeing}} \simeq \frac{\lambda}{r_0},$$

independentemente de D . Um telescópio de 8 m sem correção entrega a mesma resolução angular de um de 15 cm — ganha em coleta de luz, não em detalhe. Duas dependências são decisivas: $r_0 \propto \lambda^{6/5}$, de modo que o seeing melhora no infravermelho, e o tempo de coerência $\tau_0 \simeq r_0/v_{\text{vento}}$, tipicamente alguns milissegundos, que fixa a frequência mínima de correção do sistema adaptativo. O ângulo isoplanático — a separação máxima entre alvo e estrela-guia para que a correção ainda valha — escala como $\theta_0 \simeq r_0/H$, com H a altura da camada turbulenta, dando poucos segundos de arco no visível. Essas três escalas explicam por que óptica adaptativa foi primeiro bem-sucedida no infravermelho, por que exige lasers para criar estrelas-guia artificiais e por que corrige apenas um campo pequeno de cada vez.

Perguntas para discussão.

- Por que aumentar D ajuda duas vezes (área e resolução), mas nem sempre resolve o problema observacional?
- Um telescópio no solo com óptica adaptativa pode superar o Hubble em resolução. Por que, então, ainda se lançam telescópios espaciais?
- Em que situação um levantamento raso e repetido vale mais que uma imagem profunda única?
- O que se perde ao observar um objeto em uma única banda?

Para praticar. Escolha um objeto (uma nebulosa, uma galáxia próxima, um aglomerado) e procure imagens públicas dele em pelo menos três faixas: óptico, infravermelho e raios X ou rádio. Escreva, para cada imagem, uma frase sobre qual componente física está sendo vista — estrelas, poeira aquecida, gás ionizado, plasma quente, elétrons relativísticos. Depois responda: qual das imagens você usaria para estimar massa? Qual usaria para estimar idade? Qual não serve para nenhuma das duas?

Capítulo 8 – Estrutura estelar e diagrama HR

Estrelas são esferas autogravitantes de plasma em equilíbrio dinâmico. A gravidade tende a contrair; a pressão interna resiste. Em uma estrela estável, cada camada sente o peso das camadas externas e precisa de um gradiente de pressão para sustentá-las. Essa condição é expressa pela equação de equilíbrio hidrostático,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}.$$

Embora pareça abstrata, ela resume uma ideia simples: quanto mais fundo entramos na estrela, maior deve ser a pressão, porque há mais material acima pressionando para baixo.

A energia que mantém a luminosidade estelar vem principalmente da fusão nuclear durante a sequência principal. Em estrelas como o Sol, a cadeia próton-próton transforma hidrogênio em hélio e libera energia porque a massa final é ligeiramente menor que a massa inicial. Em estrelas mais massivas, o ciclo CNO torna-se mais importante. A fusão não é apenas uma fonte de calor; ela regula a estrutura. Se a taxa de geração de energia aumenta, a estrela pode expandir e esfriar parcialmente o núcleo; se diminui, a contração eleva temperatura e densidade. Estrelas são sistemas com mecanismos de autorregulação.

O transporte de energia pode ocorrer por radiação, convecção ou condução. Em regiões radiativas, fótons são absorvidos e reemitidos muitas vezes, realizando uma caminhada aleatória para fora. Em regiões convectivas, parcelas de gás transportam energia por movimento macroscópico. A convecção aparece quando o gradiente térmico necessário para transportar energia por radiação se torna muito íngreme. Em matéria degenerada, como em anãs brancas, a condução por elétrons pode ser extremamente eficiente. Saber qual mecanismo domina é essencial para entender interiores, atmosferas e evolução.

O diagrama Hertzsprung-Russell organiza estrelas por luminosidade e temperatura efetiva. A sequência principal não é apenas uma linha empírica: ela representa estrelas em fusão estável de hidrogênio no núcleo. Estrelas massivas ficam no alto e à esquerda, quentes e luminosas; estrelas de baixa massa ficam abaixo e à direita, frias e pouco luminosas. Gigantes vermelhas são luminosas apesar de frias porque possuem raios enormes. Anãs brancas são quentes mas pouco luminosas porque têm raios pequenos. Assim, o HR condensa temperatura, raio, luminosidade e estágio evolutivo.

Bloco Estrelas. Este capítulo conecta espectros, luminosidades, massas e modelos internos em uma leitura física do diagrama HR.

Como estudar este bloco: Ao estudar estrelas, mantenha sempre quatro grandezas em diálogo: M , R , L e T_{eff} . Quase toda interpretação estelar move uma delas e observa a resposta das outras.

O diagrama HR é bonito, mas seu valor real é quantitativo. A relação

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$$

permite transformar posição no HR em uma estimativa de raio. Duas estrelas com a mesma temperatura, mas luminosidades diferentes, têm raios diferentes. Uma gigante vermelha pode ser fria e luminosa porque seu raio é enorme; uma anã branca pode ser quente e fraca porque seu raio é pequeno.

O passo seguinte é perceber que a sequência principal é uma família de soluções de equilíbrio. A estrela precisa satisfazer conservação de massa, equilíbrio hidrostático, transporte de energia e

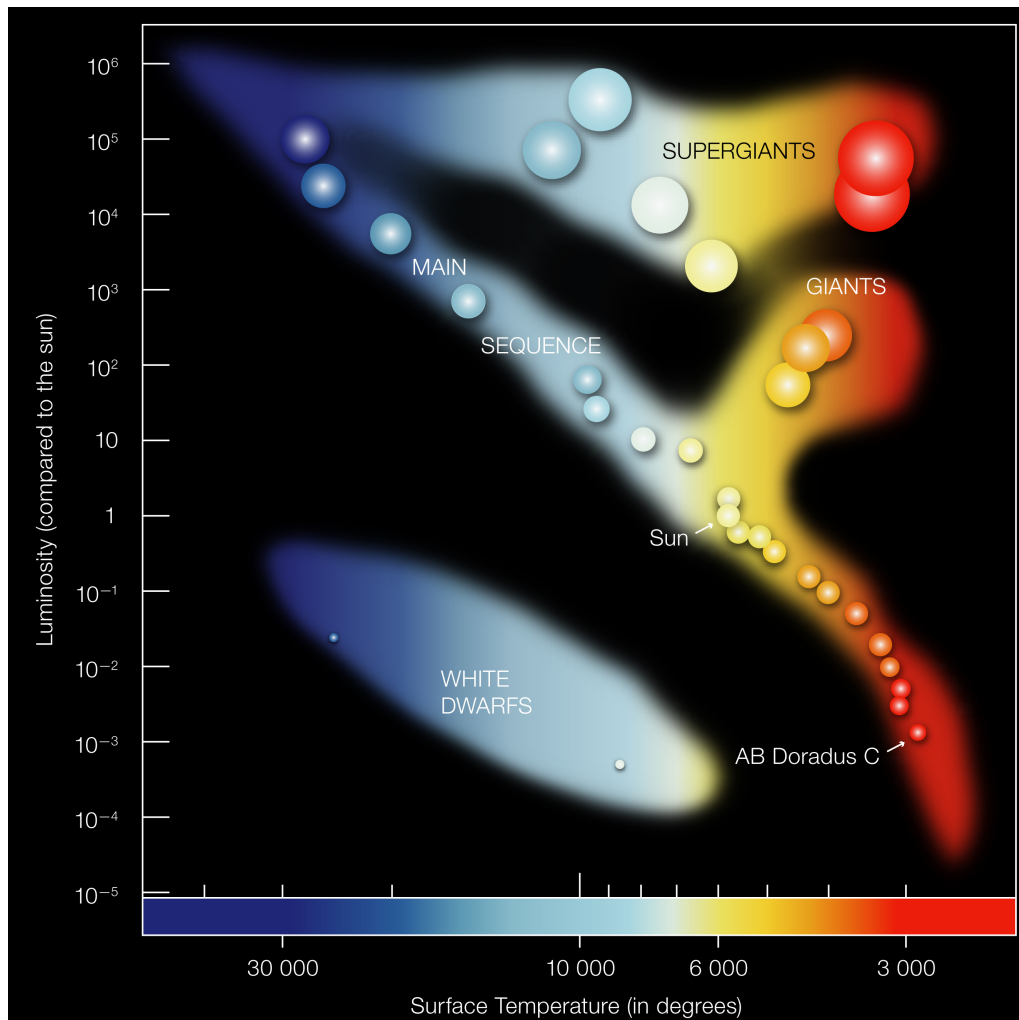


Figura 14: **Diagrama Hertzsprung-Russell.** Luminosidade (em unidades solares) contra temperatura efetiva, com o eixo de temperatura crescendo para a esquerda. A faixa diagonal é a sequência principal (*main sequence*); acima e à direita estão gigantes (*giants*) e supergigantes (*supergiants*), frias mas luminosas por terem raios enormes; abaixo e à esquerda estão as anãs brancas (*white dwarfs*), quentes mas pouco luminosas por terem raios pequenos. O tamanho dos círculos indica o raio relativo das estrelas. A posição de uma estrela combina temperatura, luminosidade, raio e estágio evolutivo. Crédito: ESO, licença CC BY 4.0 (eso0728c).

geração de energia. Em forma conceitual:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon.$$

Mesmo sem resolver numericamente essas equações, elas ensinam como pensar. Se a massa aumenta, a pressão central necessária aumenta; a temperatura central tende a subir; a taxa de fusão cresce; a luminosidade aumenta fortemente; o tempo de vida diminui.

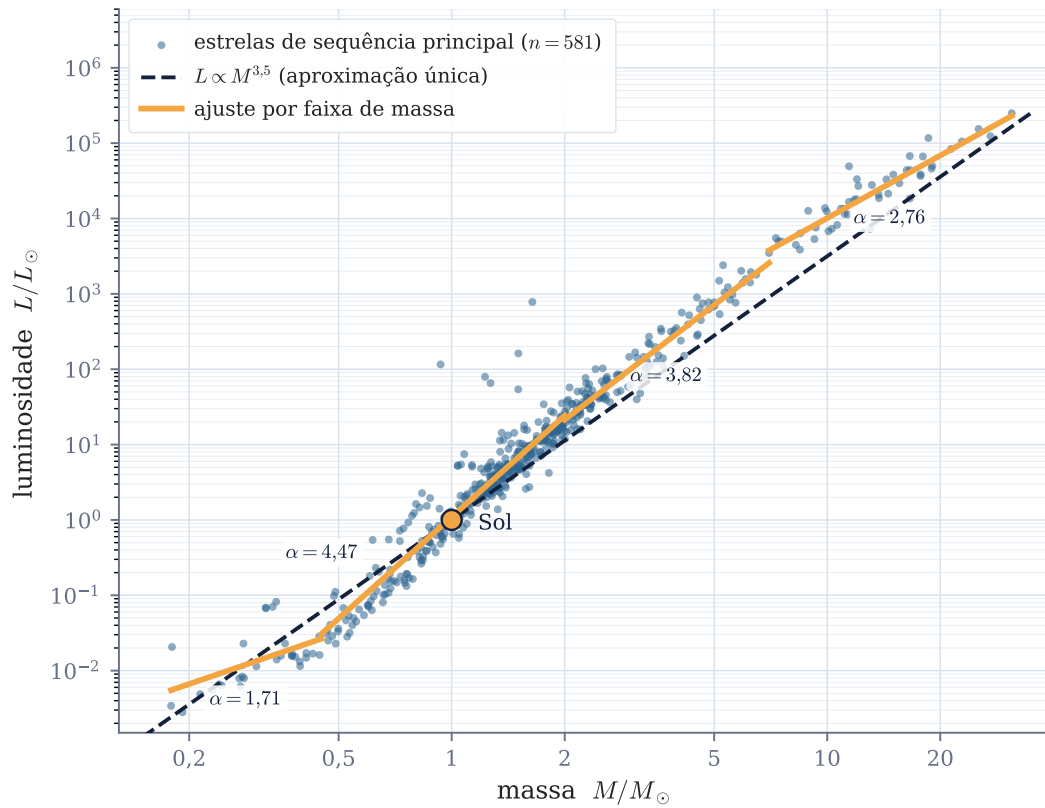


Figura 15: **Relação massa-luminosidade da sequência principal.** Cada ponto é uma componente de binária eclipsante destacada com massa e raio medidos diretamente; a luminosidade vem de $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$. Em escala log-log a relação é quase uma reta, o que significa uma lei de potência $L \propto M^\alpha$: pequenas mudanças de massa produzem grandes mudanças de luminosidade e, portanto, de tempo de vida. O expoente único $\alpha = 3,5$ (tracejado) é uma boa aproximação de trabalho, mas o ajuste por faixas mostra que α varia de $\sim 1,7$ nas anãs vermelhas a $\sim 4,5$ perto da massa solar e volta a cair nas estrelas mais massivas, onde a pressão de radiação domina. Dados: Eker et al. (2018), MNRAS 479, 5491 (via VizierR).

Da observação ao modelo

Observável	Grandeza inferida	Hipótese ou calibração necessária
classe espectral, magnitude, cor, paralaxe	temperatura efetiva, luminosidade, raio, estágio evolutivo	calibração fotométrica, correção de extinção, modelo atmosférico, distância confiável

Pergunta de checagem: A posição no HR foi medida diretamente ou construída a partir de várias inferências?

Exemplo resolvido. Considere uma estrela de sequência principal com $M = 2M_{\odot}$ e use $L \propto M^{3,5}$. Então $L \simeq 2^{3,5}L_{\odot} \simeq 11L_{\odot}$. Se o combustível disponível cresce aproximadamente com M , mas o consumo cresce com L , o tempo de vida relativo escala como $t \propto M/L$. Assim, $t \simeq 2/11 \simeq 0,18$ do tempo solar. Uma estrela mais massiva vive menos não por ter pouco combustível, mas por gastá-lo muito mais rápido.

O que expandir no estudo individual. Leia no Carroll & Ostlie os trechos sobre equações de estrutura, opacidade e modelos estelares como um conjunto. Não tente memorizar cada fórmula isoladamente. Monte uma tabela com: equação, grandeza conservada, hipótese física e consequência observacional.

Dedução curta: tempo de Kelvin-Helmholtz

Antes de se compreender a fusão nuclear, uma hipótese natural era que estrelas brilhassem por contração gravitacional. A energia gravitacional disponível tem ordem

$$E_g \sim \frac{GM^2}{R}.$$

Dividindo pela luminosidade, obtemos uma escala de tempo:

$$t_{\text{KH}} \sim \frac{GM^2}{RL}.$$

Para o Sol, isso dá dezenas de milhões de anos, muito menos que a idade geológica da Terra e que a idade solar conhecida. A discrepância histórica foi uma pista decisiva: a fonte de energia das estrelas precisava ser nuclear, não apenas gravitacional.

Exemplo de aplicação: ponto de saída de aglomerados

Em um aglomerado aberto, todas as estrelas nasceram aproximadamente juntas. Se o ponto de saída da sequência principal está perto de $M \simeq 3M_{\odot}$, e se usamos $t \propto M/L$ com $L \propto M^{3,5}$, então

$$t \propto M^{-2,5}.$$

Comparado ao Sol, $t \simeq 10 \text{ Gyr} \times 3^{-2,5} \simeq 0,6 \text{ Gyr}$. A idade estimada é grosseira, mas mostra por que o diagrama HR de um aglomerado funciona como relógio estelar.

Como a estrela decide qual reação usar

A cadeia próton-próton e o ciclo CNO produzem o mesmo resultado líquido — quatro prótons viram um núcleo de hélio, com liberação de 26,7 MeV — mas dependem da temperatura de maneiras muito diferentes. Perto de $T \simeq 1,5 \times 10^7 \text{ K}$, a taxa da cadeia pp varia aproximadamente como T^4 , enquanto a do ciclo CNO varia como T^{17} ou mais. Essa diferença de expoente decide a arquitetura interna da estrela.

Em uma estrela de baixa massa, com núcleo relativamente frio, a cadeia pp domina e a produção de energia é distribuída em uma região ampla, o que favorece transporte radiativo no núcleo e convecção no envelope. Em uma estrela massiva, o CNO domina, e uma dependência T^{17} concentra brutalmente a geração de energia no centro: o gradiente de temperatura necessário fica tão íngreme que a radiação não dá conta, e o núcleo torna-se convectivo. Duas estrelas da mesma família, portanto, têm estruturas internas invertidas — e isso não é detalhe: núcleo convectivo significa combustível continuamente misturado, o que altera o tempo de vida e o caminho evolutivo.

Dedução curta: por que estrelas massivas vivem tão pouco

O combustível disponível é proporcional à massa, $E \propto M$, e a taxa de consumo é a luminosidade, L . O tempo de vida na sequência principal escala como

$$t \propto \frac{M}{L}.$$

Usando a relação massa-luminosidade da Figura 15, $L \propto M^{3,5}$ na faixa em torno da massa solar,

$$t \propto M^{-2,5}.$$

Com $t_{\odot} \simeq 10^{10}$ anos, uma estrela de $10 M_{\odot}$ vive $10^{10} \times 10^{-2,5} \simeq 3 \times 10^7$ anos, e uma de $0,5 M_{\odot}$ viveria $\sim 6 \times 10^{10}$ anos — mais que a idade do universo, razão pela qual nenhuma anã vermelha jamais morreu por esgotamento de hidrogênio.

Essa única conta organiza boa parte da astrofísica galáctica: estrelas massivas são raras e efêmeras, então onde há estrelas O e B há formação estelar recente; anãs vermelhas se acumulam desde sempre e dominam o inventário numérico da Galáxia.

Opacidade: o que segura o fóton

O transporte radiativo depende de quão difícil é para um fóton atravessar o material, quantificado pela opacidade κ . Vários mecanismos competem: espalhamento por elétrons livres, que é praticamente independente do comprimento de onda e domina em plasmas muito quentes e ionizados; absorção livre-livre e ligado-livre, importantes em temperaturas intermediárias; e, em atmosferas frias como a solar, o íon negativo de hidrogênio H^- , cuja presença é a principal razão pela qual o espectro do Sol tem a forma contínua que tem.

A opacidade entra na equação de transporte radiativo,

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2},$$

que diz o seguinte em linguagem simples: quanto mais opaco o material e maior o fluxo que precisa atravessá-lo, mais íngreme tem de ser o gradiente de temperatura. Quando o gradiente exigido supera o gradiente adiabático, o material se torna instável e começa a convectar — este é o critério de Schwarzschild, e é ele que determina onde estão as zonas convectivas de uma estrela.

Modelos estelares e o teorema de Vogt-Russell

Juntando conservação de massa, equilíbrio hidrostático, transporte de energia e geração de energia, mais uma equação de estado e uma tabela de opacidades, obtém-se um sistema fechado. O enunciado clássico, conhecido como teorema de Vogt-Russell, afirma que massa e composição química determinam essencialmente a estrutura e a evolução de uma estrela. Ele não é um teorema no sentido matemático estrito — rotação, campos magnéticos, perda de massa e binariedade quebram a unicidade —, mas como princípio organizador é notavelmente eficaz: explica por que a sequência principal é uma linha e não uma nuvem.

O Sol como caso de teste

O Sol é a única estrela cujo interior podemos sondar de duas maneiras independentes.

A primeira é a **heliossismologia**. A superfície solar oscila em milhões de modos acústicos superpostos, com períodos em torno de cinco minutos. Cada modo penetra até uma profundidade

diferente, então o conjunto de frequências carrega informação sobre o perfil de velocidade do som — e portanto de temperatura, densidade e composição — em função do raio. A concordância entre os modelos e as frequências medidas chega a frações de por cento. É a melhor validação existente da teoria de estrutura estelar.

A segunda são os **neutrinos solares**. As reações nucleares produzem neutrinos que escapam praticamente sem interagir, entregando informação em tempo real do núcleo, ao contrário dos fótons, que levam dezenas de milhares de anos para difundir até a superfície. Durante décadas, os experimentos detectaram cerca de um terço do fluxo previsto, e a discrepância — o “problema dos neutrinos solares” — foi um dos casos mais instrutivos da física do século XX. A tentativa era corrigir o modelo solar. A resposta, confirmada pelo observatório SNO no início dos anos 2000, veio da física de partículas: neutrinos oscilam entre sabores, e os detectores viam só um deles. O modelo estelar estava certo; a física de partículas é que estava incompleta.

Guarde esse episódio: quando dados e teoria discordam, o erro nem sempre está do lado em que se procura primeiro.

Sismologia estelar além do Sol

A técnica que funcionou no Sol foi estendida a outras estrelas pelos telescópios espaciais Kepler e TESS, que medem brilho com precisão de partes por milhão e cadência de minutos. Milhares de gigantes vermelhas e estrelas de tipo solar têm hoje espectros de oscilação medidos, dos quais se extraem massa, raio e — o mais valioso — idade, com incerteza tipicamente de 10 a 20%. Idades estelares eram, até pouco tempo atrás, a grandeza mais mal determinada da astrofísica estelar; a sismologia mudou isso e, de quebra, permitiu datar populações inteiras do disco e do halo galáctico.

Exemplo de aplicação: idade de um aglomerado pelo ponto de desvio

Todas as estrelas de um aglomerado nasceram praticamente juntas, da mesma nuvem. Como estrelas mais massivas evoluem mais rápido, elas deixam a sequência principal antes. O resultado, no diagrama HR do aglomerado, é um “ponto de desvio” (*turnoff*): acima dele, a sequência principal está vazia.

A massa no ponto de desvio corresponde à massa cuja vida na sequência principal é igual à idade do aglomerado. Usando $t \simeq 10^{10} (M/M_{\odot})^{-2,5}$ anos, um aglomerado cujo desvio ocorre em $M \simeq 2 M_{\odot}$ tem idade

$$t \simeq 10^{10} \times 2^{-2,5} \simeq 1,8 \times 10^9 \text{ anos.}$$

É por isso que uma única fotografia de um aglomerado, transformada em diagrama cor-magnitude, entrega uma idade. Com o Gaia fornecendo distâncias precisas para milhares de aglomerados, esse método virou uma cronologia da Via Láctea.

Perguntas para discussão.

- Por que uma dependência T^{17} da taxa de reação produz núcleo convectivo, enquanto T^4 não?
- O que a heliosismologia mede diretamente, e o que ela infere?
- Se o problema dos neutrinos solares tivesse sido “resolvido” ajustando o modelo solar, que evidência posterior teria denunciado o erro?
- Duas estrelas têm a mesma massa mas metalicidades diferentes. O que muda na estrutura?

As quatro equações da estrutura estelar

Uma estrela em equilíbrio, sem rotação e sem campo magnético, é descrita por quatro equações diferenciais acopladas. Vale escrevê-las juntas, porque é a interação entre elas que define o objeto.

Conservação de massa. Em uma casca esférica de espessura dr ,

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Equilíbrio hidrostático. Considere um elemento de volume de área dA e espessura dr . A força resultante de pressão é $-(dP/dr) dA dr$ e o peso é $-(Gm\rho/r^2) dA dr$. Impondo soma nula:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}.$$

Conservação de energia. Se ϵ é a energia gerada por unidade de massa e tempo,

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon.$$

Transporte de energia. Em regiões radiativas (a dedução vem adiante),

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{4acT^3} \frac{L}{4\pi r^2},$$

e em regiões convectivas o gradiente é aproximadamente o adiabático.

Junto com uma equação de estado $P = P(\rho, T, \text{composição})$, uma lei de opacidade $\kappa(\rho, T)$ e uma taxa de geração nuclear $\epsilon(\rho, T)$, o sistema é fechado. As condições de contorno são $m = 0$ e $L = 0$ no centro, e $P \rightarrow 0$, $T \rightarrow T_{\text{ef}}$ na superfície. **Não há parâmetros livres.** É essa ausência que dá conteúdo ao teorema de Vogt-Russell: fixadas massa e composição, a solução é essencialmente única.

Estimativas de ordem de grandeza a partir do equilíbrio hidrostático

Antes de resolver, vale extrair números. Aproximando $dP/dr \simeq -P_c/R$, $m \simeq M$ e $\rho \simeq \bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$:

$$\frac{P_c}{R} \sim \frac{GM}{R^2} \frac{3M}{4\pi R^3} \implies P_c \sim \frac{3GM^2}{4\pi R^4}.$$

Para o Sol, isso dá $P_c \sim 10^{15}$ Pa, cerca de 10^{10} atmosferas. O valor de modelos detalhados é $2,3 \times 10^{16}$ Pa; a estimativa erra por uma ordem de grandeza, o que é excelente para uma conta de uma linha.

Se o gás é ideal, $P = \rho kT/\mu m_H$, e a mesma manipulação fornece a temperatura central:

$$T_c \sim \frac{\mu m_H}{k} \frac{GM}{R}.$$

Para o Sol, com $\mu \simeq 0,6$, resulta $T_c \sim 1,4 \times 10^7$ K — notavelmente próximo do valor real de $1,57 \times 10^7$ K. Repare no que essa expressão diz: a temperatura central é fixada por M/R , isto é, pelo potencial gravitacional na superfície. Uma estrela não escolhe sua temperatura interna; a gravidade escolhe por ela.

Dedução: o teorema do virial para uma estrela

Multiplique a equação de equilíbrio hidrostático por $4\pi r^3$ e integre de 0 a R :

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = - \int_0^R \frac{Gm}{r} 4\pi r^2 \rho dr = U,$$

onde o lado direito é, por definição, a energia potencial gravitacional total. Integrando o lado esquerdo por partes, com $P(R) = 0$:

$$\left[4\pi r^3 P \right]_0^R - \int_0^R 12\pi r^2 P dr = -3 \int_0^R P dV.$$

Portanto

$$3 \int_0^R P dV = -U$$

Para um gás ideal monoatômico, a densidade de energia térmica é $u = \frac{3}{2}nkT = \frac{3}{2}P$, de modo que $\int P dV = \frac{2}{3}E_{\text{term}}$ e recupera-se $2E_{\text{term}} + U = 0$.

A consequência energética é decisiva. A energia total é

$$E = E_{\text{term}} + U = -E_{\text{term}} = \frac{U}{2}.$$

Uma estrela que irradia perde energia total; como $E = -E_{\text{term}}$, sua energia térmica *aumenta* e ela esquenta. Metade da energia gravitacional liberada na contração vai para aquecer o gás e metade é irradiada — este é o resultado que fixa o fator $1/2$ na escala de tempo de Kelvin-Helmholtz.

Para um gás dominado por radiação, $u = 3P$, e a mesma álgebra dá $E_{\text{term}} + U = 0$, ou seja $E = 0$: o sistema fica marginalmente ligado. É por isso que estrelas muito massivas, nas quais a pressão de radiação domina, são frágeis e perdem massa facilmente.

A equação de estado, termo a termo

A pressão total no interior estelar tem três contribuições relevantes.

Gás ideal. $P_{\text{gas}} = nkT = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$, com o peso molecular médio μ definido por $n = \rho/\mu m_H$. Para hidrogênio totalmente ionizado, cada núcleo fornece duas partículas (próton e elétron) e $\mu = 1/2$. Para uma mistura com frações de massa X de hidrogênio, Y de hélio e Z de metais, totalmente ionizada,

$$\frac{1}{\mu} \simeq 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z,$$

o que dá $\mu \simeq 0,62$ para composição solar. O valor de μ importa muito: como $T_c \propto \mu$, uma estrela que converte hidrogênio em hélio aumenta μ e precisa aquecer o núcleo para manter o suporte. Esse é o motor de toda a evolução pós-sequência principal.

Radiação. Da equação de estado do gás de fótons deduzida no Capítulo 6, $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$, com $a = 4\sigma/c$. A razão entre as duas pressões,

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{gas}}} = \frac{a\mu m_H T^3}{3\rho k},$$

crece com T^3/ρ . Usando as estimativas viriais $T_c \propto M/R$ e $\rho \propto M/R^3$, obtém-se $P_{\text{rad}}/P_{\text{gas}} \propto M^2$: a pressão de radiação torna-se dominante nas estrelas mais massivas, independentemente do raio. Esse escalamento simples já antecipa a existência de um limite superior de massa estelar.

Degenerescência. Quando a densidade é alta o bastante para que os elétrons ocupem todos os estados de menor energia disponíveis, o princípio de exclusão impõe uma pressão que não depende da temperatura. A dedução completa está no Capítulo 10; aqui basta o resultado: $P_e \propto \rho^{5/3}$ no regime não relativístico e $P_e \propto \rho^{4/3}$ no relativístico.

Dedução do gradiente radiativo

Em um interior opticamente espesso, o transporte de radiação é um processo difusivo. O fluxo de energia por difusão de fótons pode ser escrito como

$$F = -D \frac{du}{dr},$$

com $u = aT^4$ a densidade de energia de radiação e $D = \frac{1}{3}c\ell$ o coeficiente de difusão, em que $\ell = 1/\kappa\rho$ é o livre caminho médio do fóton. Substituindo,

$$F = -\frac{c}{3\kappa\rho} \frac{d(aT^4)}{dr} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}.$$

Como $F = L/4\pi r^2$, isola-se o gradiente:

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{4acT^3} \frac{L}{4\pi r^2}}$$

A leitura física é direta: o gradiente térmico necessário é proporcional à opacidade e ao fluxo. Se o material é muito opaco, ou se há muita energia a escoar, a estrela precisa de um gradiente íngreme. É justamente aí que entra a instabilidade convectiva.

Dedução: o critério de Schwarzschild

Considere uma bolha de gás deslocada para cima por uma pequena distância, expandindo adiabaticamente para manter o equilíbrio de pressão com o meio. Se, após o deslocamento, a bolha ficar *menos* densa que o meio, ela continuará subindo: o meio é instável e convecta. Escrevendo em termos de gradientes logarítmicos, $\nabla \equiv d \ln T / d \ln P$, a condição de instabilidade é

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}.$$

O gradiente adiabático sai da relação $PV^\gamma = \text{const.}$ Para um gás ideal, $T \propto P^{(\gamma-1)/\gamma}$, logo

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{5} = 0,4 \quad (\gamma = 5/3).$$

E o gradiente radiativo, obtido dividindo a equação do transporte pela do equilíbrio hidrostático, é

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa LP}{16\pi acGmT^4}.$$

A convecção aparece, portanto, quando κ é grande, quando L/m é grande, ou quando γ se aproxima de 1. Isso explica de uma vez três fatos: envelopes de estrelas frias convectam porque a opacidade do H^- e a ionização parcial (que reduz γ) disparam ∇_{rad} ; núcleos de estrelas massivas convectam porque o ciclo CNO concentra L em pouca massa; e o Sol tem um núcleo radiativo com um envelope convectivo, exatamente como essas condições preveem.

Fusão nuclear: a barreira coulombiana e o pico de Gamow

Dois núcleos de cargas Z_1 e Z_2 precisam vencer a repulsão coulombiana para fundir. A altura da barreira, à distância de contato $r \sim 10^{-15}$ m, é

$$E_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \sim 1 \text{ MeV},$$

que corresponde a $T \sim 10^{10}$ K. O interior do Sol está a $1,6 \times 10^7$ K, isto é, mil vezes mais frio, e a energia térmica típica é de apenas $\sim 1,4$ keV. Classicamente, a fusão seria impossível.

A saída é o tunelamento quântico. A probabilidade de penetração da barreira é aproximadamente

$$P_{\text{tun}} \propto e^{-b/\sqrt{E}}, \quad b = \frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \sqrt{2\mu_{\text{red}}},$$

crecente com a energia. Por outro lado, o número de partículas com energia E segue Maxwell-Boltzmann, $\propto e^{-E/kT}$, decrescente. A taxa de reações é proporcional ao produto:

$$\text{taxa} \propto e^{-E/kT} e^{-b/\sqrt{E}}.$$

Dedução: o pico de Gamow e a sensibilidade à temperatura

O produto de uma exponencial decrescente por uma crescente tem máximo agudo. Derivando o expoente $-E/kT - b/\sqrt{E}$ em relação a E e igualando a zero:

$$-\frac{1}{kT} + \frac{b}{2E^{3/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{2/3}.$$

Este é o **pico de Gamow**: a energia em que as reações efetivamente ocorrem. Para a cadeia pp no Sol, $E_0 \simeq 6$ keV, cerca de quatro vezes a energia térmica média — ou seja, a fusão é feita por uma minoria minúscula de partículas na cauda da distribuição, tunelando.

A dependência da taxa com a temperatura segue de expandir o expoente em torno do pico. Definindo $\nu \equiv d \ln(\text{taxa})/d \ln T$, obtém-se

$$\nu = \frac{E_0}{kT} - \frac{2}{3}.$$

Para a cadeia pp no Sol: $\nu \simeq 6/1,4 - 0,67 \simeq 4$. Para o ciclo CNO, cujos núcleos têm $Z = 6$ a 8, a barreira é muito maior, o pico de Gamow desloca-se para $E_0 \simeq 26$ keV, e $\nu \simeq 18$.

Esses dois números — T^4 e T^{18} — não são ajustes empíricos: saem da competição entre tunelamento e distribuição térmica. E eles determinam a arquitetura interna das estrelas, como discutido antes: um expoente alto concentra a geração de energia no centro e força convecção nuclear.

Relações de homologia: de onde vem $L \propto M^3$

É possível extrair a relação massa-luminosidade das equações de estrutura sem resolvê-las, supondo que estrelas de massas diferentes tenham estruturas semelhantes reescaladas — a hipótese de homologia. Escreva cada grandeza como potência de M e R .

Do equilíbrio hidrostático, $P \sim GM^2/R^4$. Da equação de estado ideal, $T \sim \mu m_H GM/kR$. Da conservação de massa, $\rho \sim M/R^3$.

Substituindo no gradiente radiativo, com $L \sim 4\pi r^2 \cdot \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \cdot \frac{T}{R}$:

$$L \sim \frac{acR^4T^4}{\kappa\rho R} \sim \frac{ac}{\kappa} \frac{R^3}{M/R^3} \left(\frac{GM\mu m_H}{kR} \right)^4 \frac{1}{R}.$$

Agrupando as potências, com κ constante (opacidade de espalhamento por elétrons, boa aproximação em estrelas massivas):

$$L \propto \frac{\mu^4}{\kappa} M^3$$

Este é um resultado forte: a luminosidade de uma estrela na sequência principal é fixada pela massa e pela opacidade, e *não* pela taxa de reações nucleares. As reações se ajustam para fornecer exatamente o que o transporte permite escoar. É a estrela que decide quanto queimar a partir de quanto consegue irradiar — não o contrário.

O expoente 3 é o valor assintótico para estrelas massivas, com opacidade dominada por espalhamento. Para estrelas de massa intermediária, em que a opacidade segue aproximadamente a lei de Kramers $\kappa \propto \rho T^{-3,5}$, refazer a mesma álgebra fornece $L \propto M^{5,5} R^{-0,5}$, e combinando com a relação massa-raio observada chega-se a expoentes próximos de 4 a 5 — que é o que os dados da Figura 15 mostram na faixa em torno da massa solar. A dependência do expoente com a faixa de massa, medida no laboratório do capítulo, é portanto uma assinatura direta de qual mecanismo de opacidade domina.

As três escalas de tempo estelares

Dinâmica. Se a pressão sumisse, a estrela colapsaria em queda livre:

$$t_{\text{din}} \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}.$$

Para o Sol, ~ 30 min. Como não observamos estrelas colapsando, o equilíbrio hidrostático é excelente aproximação.

Kelvin-Helmholtz. Se a fonte de energia fosse apenas contração gravitacional:

$$t_{\text{KH}} \sim \frac{GM^2}{2RL}.$$

Para o Sol, $\sim 1,6 \times 10^7$ anos. Foi esse número, calculado no século XIX, que entrou em conflito irreconciliável com a idade geológica da Terra — e o conflito só se resolveu com a descoberta da fusão nuclear.

Nuclear. Com eficiência $\eta \simeq 0,007$ na conversão de hidrogênio em hélio e uma fração $f \simeq 0,1$ da massa disponível no núcleo:

$$t_{\text{nuc}} \sim \frac{\eta f M c^2}{L}.$$

Para o Sol, $\sim 10^{10}$ anos. A hierarquia $t_{\text{din}} \ll t_{\text{KH}} \ll t_{\text{nuc}}$ — separada por seis e três ordens de grandeza — é o que justifica tratar a estrutura como estática ao estudar evolução, e tratar a evolução como uma sequência de equilíbrios.

Politrópicos e a equação de Lane-Emden

Um modelo estelar simplificado supõe $P = K\rho^{1+1/n}$, com n o índice politrópico. Combinando com o equilíbrio hidrostático e a conservação de massa, obtém-se

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho.$$

Substituindo $\rho = \rho_c \theta^n$ e $r = \alpha \xi$ com $\alpha^2 = (n+1)K\rho_c^{1/n-1}/4\pi G$, chega-se à **equação de Lane-Emden**:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

com condições $\theta(0) = 1$ e $\theta'(0) = 0$. Ela tem solução analítica para $n = 0, 1$ e 5 ; para os demais, integra-se numericamente. O primeiro zero ξ_1 fornece o raio da estrela, $R = \alpha \xi_1$.

Dois casos são fisicamente centrais. Para $n = 3/2$, correspondente a $P \propto \rho^{5/3}$, descrevem-se estrelas totalmente convectivas e anãs brancas não relativísticas. Para $n = 3$, correspondente a $P \propto \rho^{4/3}$, tem-se o “modelo padrão” de Eddington e o caso relativístico das anãs brancas — e aqui aparece um fato notável: para $n = 3$, a massa resultante *não depende* do raio,

$$M = 4\pi\alpha^3\rho_c \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1},$$

com a dependência em ρ_c cancelando exatamente. Essa é a origem matemática do limite de Chandrasekhar, deduzido no Capítulo 10.

O limite de Eddington

A radiação que escapa exerce força sobre o material. Por elétron livre, a força devida ao fluxo F é $\sigma_T F/c$, com σ_T a seção de choque de Thomson. Igualando à atração gravitacional sobre o par próton-elétron:

$$\frac{\sigma_T}{c} \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{GMm_p}{r^2} \implies L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T}$$

Numericamente, $L_{\text{Edd}} \simeq 3,2 \times 10^4 (M/M_\odot) L_\odot$. O raio cancela: o limite vale em qualquer distância. Acima dele, a radiação expele o material em vez de deixá-lo cair ou permanecer ligado.

Combinando com $L \propto M^3$ obtém-se um limite superior natural de massa estelar: como a luminosidade cresce mais rápido que a massa, existe um ponto em que a estrela atinge o próprio limite de Eddington e passa a perder massa violentamente. Isso ocorre por volta de $100\text{--}150 M_\odot$, valor compatível com o topo da distribuição de massas observada. E, no outro extremo, a massa mínima para fusão de hidrogênio — cerca de $0,08 M_\odot$ — decorre de outra competição: abaixo dela, a degenerescência dos elétrons sustenta o objeto *antes* que a contração aqueça o núcleo o suficiente para ignição. Os dois extremos da sequência principal, portanto, são fixados por física de pressão, não por disponibilidade de matéria.

Teoria do comprimento de mistura

Saber *que* uma região convecta não basta: é preciso quantificar quanta energia a convecção transporta. O tratamento padrão, usado em praticamente todos os códigos de evolução estelar, é a teoria do comprimento de mistura, e ela é confessadamente fenomenológica.

Suponha que uma parcela de gás se desloque verticalmente por uma distância característica ℓ_m antes de se dissolver no meio, trocando calor. Escreve-se $\ell_m = \alpha H_P$, com $H_P = -dr/d \ln P$ a escala de altura de pressão e α um parâmetro livre de ordem unitária. O excesso de temperatura da parcela ao final do percurso é

$$\Delta T \simeq \left(\left| \frac{dT}{dr} \right| - \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} \right) \ell_m,$$

e a velocidade típica sai do trabalho realizado pelo empuxo:

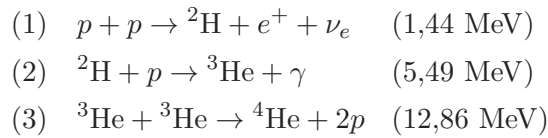
$$v^2 \simeq g \frac{\Delta T}{T} \ell_m.$$

O fluxo convectivo é então

$$F_{\text{conv}} \simeq \rho c_P v \Delta T \simeq \rho c_P \left(\frac{g}{T} \right)^{1/2} \ell_m^2 (\nabla - \nabla_{\text{ad}})^{3/2} \left(\frac{T}{H_P} \right)^{3/2}.$$

O ponto quantitativo importante é a potência $3/2$: o fluxo é extremamente sensível ao excesso de gradiente. Nos interiores estelares densos, transportar toda a luminosidade exige apenas $\nabla - \nabla_{\text{ad}} \sim 10^{-6}$, de modo que o gradiente real é *indistinguível* do adiabático — e é isso que justifica usar $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ nas equações de estrutura para o interior convectivo. Já nas camadas superficiais, com densidade baixíssima, a convecção é ineficiente e o gradiente real fica bem acima do adiabático: é a chamada convecção superadiabática, e é exatamente ali que o parâmetro α importa. Ele é calibrado exigindo que um modelo solar reproduza o raio do Sol na idade correta, e o valor resultante, $\alpha \simeq 1,8$, é depois aplicado a outras estrelas — uma extrapolação que continua sendo uma das maiores fontes de incerteza sistemática em modelos estelares.

A cadeia próton-próton, passo a passo



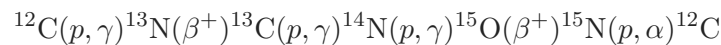
A primeira reação é o gargalo, e por uma razão profunda: ela exige que um dos prótons se converta em nêutron por interação fraca *durante* a colisão. A seção de choque é tão pequena que jamais foi medida em laboratório — é calculada teoricamente. O tempo médio para que um próton no centro do Sol sofra essa reação é de cerca de 10^{10} anos. É esse número, e não a disponibilidade de combustível, que fixa o tempo de vida solar. Se a interação fraca fosse um pouco mais forte, o Sol teria queimado há muito.

O saldo energético total é $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$, com $Q = 26,73 \text{ MeV}$, dos quais cerca de 0,6 MeV escapam com os neutrinos. A eficiência de conversão de massa é

$$\eta = \frac{Q}{4m_p c^2} = \frac{26,73}{3752} = 0,0071,$$

os famosos 0,7%. Toda a estimativa do tempo de vida nuclear do Capítulo anterior usa esse número.

O ciclo CNO



O carbono age como catalisador: entra e sai inalterado, e o resultado líquido é novamente $4p \rightarrow {}^4\text{He}$. A etapa mais lenta é ${}^{14}\text{N}(p, \gamma){}^{15}\text{O}$, o que tem uma consequência observacional direta: em equilíbrio, o ciclo acumula nitrogênio às custas de carbono. Estrelas que passaram por queima CNO e depois dragaram material para a superfície mostram razão C/N reduzida — assinatura usada rotineiramente para identificar estrelas evoluídas.

A comparação entre os dois mecanismos é resolvida pela temperatura. As duas taxas se igualam em torno de $T \simeq 1,8 \times 10^7 \text{ K}$, correspondente a estrelas de $\sim 1,3 M_\odot$. Abaixo disso domina a cadeia pp; acima, o CNO. Como o CNO depende dos metais como catalisadores, estrelas da primeira geração — sem metais — não podiam usá-lo, e precisaram atingir temperaturas centrais mais altas para queimar hidrogênio. Esse detalhe altera toda a estrutura das primeiras estrelas e é parte da discussão sobre por que elas teriam sido muito mais massivas.

Neutrinos como sonda direta

Cada uma das cadeias produz neutrinos com espectros de energia distintos: os neutrinos pp, abundantes mas de baixa energia (até 0,42 MeV); os do ${}^7\text{Be}$, monoenergéticos em 0,86 MeV; e os do ${}^8\text{B}$, raros mas energéticos (até 15 MeV). Como cada ramo depende da temperatura de modo diferente — o fluxo de ${}^8\text{B}$ varia com T_c^{24} — medir os fluxos relativos é uma medida direta da temperatura central do Sol.

O tempo de escape dos neutrinos é $R_\odot/c \simeq 2,3\text{ s}$. Já os fótons produzidos no centro difundem por caminhada aleatória, com número de passos $N \simeq (R_\odot/\ell)^2$ e livre caminho médio $\ell \sim 1\text{ cm}$:

$$t_{\text{dif}} \simeq \frac{R_\odot^2}{\ell c} \simeq \frac{(7 \times 10^8)^2}{10^{-2} \times 3 \times 10^8} \simeq 1,6 \times 10^{12}\text{ s} \simeq 5 \times 10^4\text{ anos}.$$

Estimativas mais cuidadosas, com ℓ variável, dão de 10^4 a 10^5 anos. A luz que vemos hoje foi gerada quando havia mamutes na Terra; os neutrinos que atravessam o corpo agora saíram do núcleo há oito minutos. É essa diferença que torna os neutrinos a única sonda em tempo real do interior estelar.

A relação massa-raio na sequência principal

A homologia também fornece a relação massa-raio, embora com mais dependência dos detalhes. Combinando a condição de que a energia gerada iguale a transportada, com $\epsilon \propto \rho T^\nu$ e opacidade de Kramers, a álgebra fornece

$$R \propto M^{(\nu+3)/(\nu+15)} \text{ aproximadamente.}$$

Para a cadeia pp ($\nu \simeq 4$), $R \propto M^{0,37}$; para o CNO ($\nu \simeq 18$), $R \propto M^{0,64}$. Os valores observados são $R \propto M^{0,8}$ para $M < 1 M_\odot$ e $R \propto M^{0,57}$ acima — a concordância é apenas qualitativa, porque a hipótese de homologia é grosseira, mas a tendência é capturada: estrelas mais massivas são maiores, e o expoente muda quando o mecanismo nuclear muda.

Combinando $L \propto M^{3,5}$ com $R \propto M^{0,6}$ e $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4$:

$$T_{\text{ef}} \propto \left(\frac{L}{R^2} \right)^{1/4} \propto M^{(3,5-1,2)/4} = M^{0,58}.$$

Ou seja, ao longo da sequência principal, $L \propto T_{\text{ef}}^6$ aproximadamente. **A sequência principal é uma linha no diagrama HR porque massa é o único parâmetro livre**, e cada massa fixa simultaneamente L , R e T_{ef} . A inclinação observada da sequência principal é uma consequência aritmética das relações deduzidas aqui.

O limite inferior de massa estelar

Uma protoestrela contrai e aquece segundo $T_c \propto M/R$ enquanto o gás é ideal. Mas se a degenerescência dos elétrons se instala antes de T_c atingir $\sim 3 \times 10^6\text{ K}$, a contração para e a temperatura estaciona — o objeto nunca acende.

A condição para degenerescência é que a energia de Fermi supere a térmica:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} \gtrsim kT.$$

Combinando com $T_c \propto M/R$ e $n_e \propto M/R^3$, encontra-se que a temperatura central máxima atingível por um objeto de massa M escala como

$$T_{c,\text{max}} \propto M^{4/3}.$$

Impondo $T_{c,\max} \geq 3 \times 10^6$ K obtém-se $M \gtrsim 0,08 M_{\odot}$ para composição solar. Abaixo disso, o objeto é uma anã marrom: contrai, aquece parcialmente, queima deutério por alguns milhões de anos (o deutério tem barreira menor e acende em $\sim 10^6$ K, o que ocorre acima de $\sim 13 M_{\text{Jup}}$) e depois esfria indefinidamente. A fronteira entre estrela e planeta, portanto, não é convencional: é fixada pela competição entre degenerescência e ignição nuclear.

Caminhos evolutivos no diagrama HR

A trajetória de uma estrela no diagrama HR não é arbitrária: ela é ditada pelas mesmas equações de estrutura, resolvidas em sequência à medida que a composição muda. Vale entender as fases pré-sequência principal, porque elas revelam limites físicos que valem para qualquer estrela.

A linha de Hayashi. Uma protoestrela totalmente convectiva tem o gradiente de temperatura fixado pelo valor adiabático, e sua estrutura fica quase inteiramente determinada pela massa e pelo raio. Impondo que a superfície esteja em equilíbrio, encontra-se que a temperatura efetiva não pode ser menor que um valor limite, aproximadamente

$$T_{\text{ef}} \propto M^{1/7} R^{-1/49},$$

uma dependência tão fraca em R que a linha resultante é praticamente vertical no diagrama HR. Essa é a **linha de Hayashi**, e à direita dela — temperaturas menores — *não existe* solução de equilíbrio hidrostático. É uma região proibida do diagrama HR, e o fato observacional de que nenhuma estrela é encontrada ali é uma confirmação direta da teoria de convecção.

Uma protoestrela em contração desce ao longo dessa linha, mantendo T_{ef} quase constante e reduzindo L com R^2 . Quando o núcleo se torna suficientemente quente e opaco para transportar energia por radiação, ela deixa a linha vertical e passa a evoluir quase horizontalmente para a esquerda — o **trecho de Henyey** — até acender o hidrogênio e chegar à sequência principal de idade zero.

A escala de tempo dessa fase é a de Kelvin-Helmholtz, $t_{\text{KH}} \propto M^2/RL$. Para $1 M_{\odot}$, cerca de 3×10^7 anos; para $10 M_{\odot}$, apenas 3×10^4 anos. Estrelas massivas chegam à sequência principal tão rápido que ainda estão envoltas no material de que se formaram — razão pela qual são observadas quase sempre no infravermelho, e não no visível.

Isócronas e a datação de populações

Uma isócrona é o lugar geométrico, no diagrama HR, de estrelas de mesma idade e mesma composição, mas massas diferentes. Construí-la exige calcular trajetórias evolutivas para um conjunto de massas e cortar todas em um mesmo instante.

A forma da isócrona muda de maneira sistemática com a idade, e isso a torna um cronômetro. O ponto de desvio move-se para massas menores com $t^{-0,4}$, aproximadamente, e o ramo das gigantes torna-se mais povoado. Dois cuidados dominam a incerteza:

- **Degenerescência idade-metalicidade.** Aumentar a metalicidade avermelha e escurece a isócrona quase da mesma forma que aumentar a idade. Sem uma medida espectroscópica independente de $[\text{Fe}/\text{H}]$, as duas não se separam — e essa é a origem de boa parte das discrepâncias entre idades publicadas para os mesmos aglomerados.
- **Overshooting convectivo.** Parcelas de gás que atingem a borda do núcleo convectivo têm inércia e penetram um pouco na região estável, misturando combustível adicional. O alcance é parametrizado como uma fração α_{ov} da escala de altura de pressão, e um valor maior prolonga a sequência principal em até 20%. Como α_{ov} é calibrado empiricamente, ele é uma fonte sistemática de incerteza em todas as idades derivadas de isócronas.

A faixa de instabilidade e o mecanismo κ

Estrelas em uma faixa estreita e quase vertical do diagrama HR pulsam radialmente. O motor é o **mecanismo κ** , e sua lógica é a de uma máquina térmica.

Em uma camada de ionização parcial — de hélio, tipicamente, em torno de 4×10^4 K — a opacidade *aumenta* com a compressão, ao contrário do comportamento usual dado pela lei de Kramers. Quando a estrela contrai, essa camada bloqueia mais radiação, acumula energia e aumenta a pressão, empurrando a estrela de volta para fora com atraso de fase. O trabalho realizado por ciclo é positivo, e a oscilação é amplificada em vez de amortecida.

Para que isso funcione, a camada de ionização precisa estar na profundidade certa: rasa demais e há pouca massa para armazenar energia; profunda demais e a escala de tempo térmica local é longa demais para acompanhar a pulsação. Essa condição de profundidade traduz-se diretamente em uma faixa estreita de temperatura efetiva — e é por isso que a faixa de instabilidade é quase vertical no HR, cruzando desde as Cefeidas luminosas até as anãs brancas pulsantes.

A relação período-densidade sai de um argumento dimensional: o período de pulsação é comparável ao tempo dinâmico,

$$P \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \implies P\sqrt{\rho} \simeq \text{constante}.$$

Combinando com a relação massa-luminosidade e com $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4$, obtém-se a relação período-luminosidade das Cefeidas: estrelas mais luminosas são maiores, menos densas e pulsam mais devagar. A relação empírica de Leavitt, base de toda a escada de distâncias, é consequência de uma identidade dimensional combinada com as relações estruturais deduzidas antes.

Perda de massa e ventos estelares

Estrelas massivas perdem massa por ventos impulsionados por radiação. O mecanismo é a transferência de momento de fótons para íons metálicos através de milhares de linhas de absorção. A taxa escala aproximadamente como

$$\dot{M} \propto L^{1,7} Z^{0,7},$$

com a dependência em metalicidade sendo decisiva: o vento é impulsionado por linhas de metais, e uma estrela pobre em metais perde muito menos massa.

A consequência evolutiva é grande. Uma estrela de $60 M_{\odot}$ de composição solar pode perder mais da metade de sua massa antes de explodir, terminando como uma estrela de Wolf-Rayet despida de hidrogênio. A mesma estrela na primeira geração, sem metais, chegaria ao colapso quase íntegra — e produziria um buraco negro muito mais massivo. Esse raciocínio é usado diretamente para interpretar as massas dos buracos negros detectados por ondas gravitacionais: eventos como GW150914, com $\sim 30 M_{\odot}$ cada, apontam para progenitores de baixa metalicidade.

Para estrelas evoluídas frias, o mecanismo é outro: pulsação levanta material até raios onde a poeira condensa, e a pressão de radiação sobre os grãos arrasta o gás. As taxas chegam a $10^{-4} M_{\odot}$ por ano na fase de *superwind*, e é assim que uma estrela de massa intermediária se desfaz do envelope e expõe o núcleo que virará anã branca.

O limite superior de massa e a instabilidade de pares

Acima de aproximadamente $100 M_{\odot}$, a pressão de radiação domina e a estrela aproxima-se do limite de Eddington, tornando-se instável a perturbações — as chamadas instabilidades de Eddington e ϵ . Mas há um regime ainda mais dramático.

Em núcleos com $T \gtrsim 10^9 \text{ K}$ e densidade moderada, fótons energéticos produzem pares elétron-pósitron. Cada par criado remove dois fótons do campo de radiação, reduzindo a pressão exatamente quando ela é mais necessária. O índice adiabático efetivo cai abaixo de $4/3$ — o limiar de estabilidade dinâmica para uma esfera autogravitante — e o núcleo colapsa. A contração acende explosivamente a queima de oxigênio, e o resultado pode ser a desintegração completa da estrela, sem deixar remanescente.

O cálculo prevê que estrelas com núcleos de hélio entre ~ 65 e $\sim 135 M_\odot$ terminam assim, produzindo uma **lacuna de massa** entre ~ 50 e $\sim 120 M_\odot$ na distribuição de buracos negros. Testar essa previsão exige medir massas de buracos negros em quantidade — e é exatamente o que os catálogos de ondas gravitacionais começaram a permitir. A física nuclear de criação de pares deixa, assim, uma assinatura mensurável em um histograma construído a partir de deformações do espaço-tempo.

Laboratório de dados 4 – a relação massa-luminosidade com estrelas reais

Arquivo: 05_estrelas_massa_raio_teff.csv — 581 componentes de binárias eclipsantes destacadas, com massa, raio e temperatura efetiva medidos diretamente.

Física. A luminosidade sai da geometria mais Stefan-Boltzmann, e a relação massa-luminosidade sai do gráfico:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^2 \left(\frac{T_{\text{ef}}}{5772 \text{ K}} \right)^4, \quad L \propto M^\alpha.$$

Roteiro.

1. Calcule $L/L_\odot$ para cada estrela. No Excel: =D2^2*(E2/5772)^4.
2. Faça o gráfico de $\log_{10} L$ contra $\log_{10} M$. Ajuste uma reta e leia a inclinação: ela é o expoente α .
3. Repita o ajuste separadamente para $M < 2 M_\odot$ e para $M > 2 M_\odot$. O expoente é o mesmo?
4. Estime o tempo de vida na sequência principal com $t \simeq 10^{10} (M/L)$ anos, usando M e L em unidades solares. Faça o gráfico de $\log t$ contra $\log M$.

Entrega. O diagrama massa-luminosidade com o ajuste, o valor de α em cada faixa e o tempo de vida estimado para uma estrela de $10 M_\odot$ e para uma de $0,5 M_\odot$.

Confira. Você deve encontrar $\alpha \simeq 4,5$ perto da massa solar e $\alpha \simeq 3,8$ acima de $2 M_\odot$ — compare com a Figura 15, que foi feita com este mesmo arquivo.

Capítulo 9 – Meio interestelar, formação e evolução estelar



Figura 16: **Região de formação estelar.** Nuvens de gás e poeira na Nebulosa de Carina mostram o ambiente onde novas estrelas nascem e interagem com radiação intensa. Crédito: NASA, ESA, N. Smith e Hubble Heritage Team, via Wikimedia Commons.

A massa é o parâmetro dominante da evolução estelar. Uma estrela mais massiva tem mais combustível, mas consome esse combustível de forma muito mais rápida. Por isso vive menos. Uma estrela de baixa massa pode permanecer na sequência principal por dezenas ou centenas de bilhões de anos; uma estrela massiva pode evoluir em poucos milhões de anos. Essa diferença transforma aglomerados estelares em relógios: estrelas nascidas quase ao mesmo tempo, mas com massas diferentes, deixam a sequência principal em momentos diferentes. O ponto de saída fornece estimativas de idade.

Quando o hidrogênio central se esgota, a estrela precisa se reajustar. O núcleo contrai, camadas externas podem expandir e a estrela pode tornar-se gigante. Em massas adequadas, inicia-se queima de hélio em carbono e oxigênio. Estrelas de baixa e massa intermediária terminam como anãs brancas após perda de massa e formação de nebulosas planetárias. Estrelas massivas avançam por estágios sucessivos de fusão até formar núcleos ricos em ferro. Como fusão de ferro não libera energia em condições estelares usuais, o núcleo perde sustentação e pode colapsar, originando supernova e remanescente compacto.

Remanescentes compactos mostram regimes extremos da matéria. Anãs brancas são sustentadas por pressão de degenerescência dos elétrons. Estrelas de nêutrons envolvem densidades nucleares, campos magnéticos intensos e rotação rápida. Buracos negros aparecem quando nenhuma pressão conhecida impede a formação de um horizonte de eventos. Esses objetos conectam astrofísica estelar, relatividade, física nuclear e observações de altas energias. Eles também enriquecem a Galáxia: supernovas e ventos estelares devolvem elementos ao meio interestelar, preparando material para

novas gerações de estrelas e planetas.

Exemplo guiado. Se duas estrelas têm a mesma temperatura efetiva, mas uma é 100 vezes mais luminosa, a relação $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ indica que a luminosidade cresce com R^2 quando T é igual. Logo, a estrela mais luminosa tem raio 10 vezes maior. Esse raciocínio simples explica por que gigantes podem ser tão brilhantes mesmo com temperaturas superficiais relativamente baixas.

Perguntas para discussão.

- Por que massa inicial organiza tanto a vida de uma estrela?
- Como o HR permite distinguir temperatura, luminosidade e tamanho?
- O que significa uma estrela estar em equilíbrio se seu interior está em movimento?
- Por que remanescentes compactos são laboratórios de física extrema?

Para praticar. Crie uma pequena lista de estrelas fictícias com temperatura, luminosidade e massa aproximada. Posicione cada estrela em um diagrama HR esquemático e proponha seu estágio evolutivo. Em seguida, considere incertezas como poeira, distância mal medida e binaridade. Essa segunda leitura é mais realista e mostra por que classificação astrofísica depende de várias linhas de evidência.

Dedução curta: equilíbrio hidrostático

Considere uma casca esférica de raio r , espessura dr , densidade ρ e massa interna $m(r)$. A força gravitacional por unidade de volume é aproximadamente $\rho Gm(r)/r^2$, apontando para dentro. Para que a casca não acelere, a diferença de pressão entre a face interna e a externa precisa equilibrar esse peso:

$$P(r) - P(r + dr) \simeq \rho \frac{Gm(r)}{r^2} dr.$$

Dividindo por dr e tomando o limite diferencial,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}.$$

O sinal negativo apenas registra que a pressão diminui quando caminhamos para fora. A equação é local: ela vale camada por camada, não apenas para a estrela inteira.

Exemplo de aplicação: raio a partir de L e T

Use a forma relativa da lei de Stefan-Boltzmann:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4.$$

Uma estrela gigante tem $L = 100L_{\odot}$ e $T \simeq T_{\odot}/2$. Então

$$100 = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

e $R/R_{\odot} = \sqrt{1600} = 40$. A estrela é fria na superfície, mas muito luminosa porque a área emissora é enorme. Esse é o tipo de leitura física que o diagrama HR deve provocar.

As fases do meio interestelar

O gás entre as estrelas não é homogêneo; ele se organiza em fases com densidades e temperaturas que diferem por muitas ordens de grandeza, mas com pressões comparáveis — o que faz sentido, já que fases em contato tendem ao equilíbrio de pressão, não de temperatura.

Fases do meio interestelar

Fase	T (K)	n (cm ⁻³)	Como é observada
Nuvens moleculares	10–50	10^2 – 10^6	CO em rádio/mm, poeira em submm
Gás neutro frio	~ 100	~ 30	Linha de 21 cm em absorção
Gás neutro morno	~ 8000	$\sim 0,3$	Linha de 21 cm em emissão
Gás ionizado morno	$\sim 10^4$	$0,1$ – 10^4	Linhas de recombinação, H α
Gás coronal quente	$\sim 10^6$	$\sim 10^{-3}$	Raios X moles, absorção no UV

A poeira representa cerca de 1% da massa do gás, mas domina a aparência: grãos de silicato e carbono com tamanhos de décimos de micrômetro espalham luz azul com muito mais eficiência que vermelha. Daí a extinção seletiva — objetos atrás de poeira parecem mais fracos e mais vermelhos —, quantificada pelo excesso de cor $E(B-V)$ e pela razão $R_V = A_V/E(B-V)$, tipicamente próxima de 3,1 na Galáxia. Confundir avermelhamento por poeira com temperatura baixa intrínseca é um dos erros clássicos da área, e é por isso que estimativas de temperatura por cor precisam sempre ser corrigidas por extinção.

Os grãos não são apenas obstáculo. Eles são superfície de catálise — é neles que o hidrogênio molecular se forma — e são refrigerantes: absorvem luz estelar ultravioleta e reemitem no infravermelho distante, retirando energia da nuvem e permitindo que ela esfrie o suficiente para colapsar.

Dedução curta: o critério de Jeans

Uma nuvem colapsa quando a gravidade vence a pressão térmica. Comparando as duas energias para uma esfera de massa M , raio R , temperatura T e massa média por partícula μm_H :

$$|E_{\text{grav}}| \sim \frac{GM^2}{R}, \quad E_{\text{term}} \sim \frac{3}{2} \frac{M}{\mu m_H} kT.$$

Impondo $|E_{\text{grav}}| > 2E_{\text{term}}$ (teorema do virial) e eliminando R em favor da densidade, obtém-se a massa mínima para colapso:

$$M_J \simeq \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}.$$

O que importa é a dependência: $M_J \propto T^{3/2} \rho^{-1/2}$. Gás frio e denso colapsa facilmente; gás quente e rarefeito, não. Para uma nuvem molecular típica, com $T \simeq 10$ K e $n \simeq 10^4$ cm⁻³, a massa de Jeans é de poucas massas solares — e é por isso que nuvens moleculares gigantes, com $10^5 M_\odot$, não formam uma estrela gigantesca, e sim milhares de estrelas: elas se fragmentam, porque cada sub-região já excede sua própria massa de Jeans local.

Do colapso ao disco

O colapso não é uma queda livre limpa. Duas grandezas conservadas atrapalham: momento angular e fluxo magnético. Uma nuvem com rotação lentíssima, ao encolher por várias ordens de grandeza em raio, gira rápido demais para colapsar diretamente — e por isso o material se organiza em um **disco de acreção**, que redistribui momento angular para fora enquanto a massa cai para dentro. É essa geometria imposta pela física de rotação que torna discos protoplanetários uma consequência necessária, e não um acidente, da formação estelar.

A protoestrela em formação também expelle material em jatos colimados ao longo do eixo de rotação, visíveis como objetos Herbig-Haro. Esse feedback — junto com a radiação ultravioleta e os ventos das estrelas mais massivas recém-formadas — limita a eficiência do processo: apenas alguns por cento da massa de uma nuvem molecular vira estrela antes que ela seja dispersada.

O ALMA transformou esse assunto ao produzir imagens diretas de discos protoplanetários com resolução de dezenas de milissegundos de arco, revelando anéis, lacunas e espirais que provavelmente marcam a presença de planetas em formação. O JWST complementou olhando a química: gelo, água e moléculas orgânicas nas regiões internas dos mesmos discos. A formação planetária deixou de ser inferida a partir do resultado final e passou a ser observada em andamento.

A função de massa inicial

Nem todas as massas são igualmente prováveis. A distribuição de massas com que as estrelas nascem, a função de massa inicial (IMF), é aproximadamente uma lei de potência para massas acima de uma massa solar,

$$\frac{dN}{dM} \propto M^{-2,35},$$

a forma de Salpeter, achatando-se abaixo disso. A consequência quantitativa é forte: para cada estrela de $20 M_{\odot}$ nascem centenas de estrelas de tipo solar e milhares de anãs vermelhas. Massa, porém, não é luminosidade — as poucas estrelas massivas dominam a luz emitida e a produção de elementos pesados, enquanto as anãs dominam a contagem e a massa estelar total. Quase toda inferência sobre populações estelares distantes depende de assumir uma IMF, e essa é uma das hipóteses mais frequentemente citadas quando resultados extragalácticos precisam ser revistos.

Depois da sequência principal

Quando o hidrogênio central acaba, o núcleo de hélio inerte contrai e aquece, a queima passa a ocorrer em uma camada em torno dele, e o envelope se expande enormemente: a estrela vira gigante vermelha. Em estrelas de massa intermediária, segue-se a queima de hélio em carbono e oxigênio pelo processo triplo-alfa, iniciada de forma explosiva (o *flash* do hélio) quando o núcleo está degenerado.

Na fase final, no ramo assintótico das gigantes, duas camadas queimam alternadamente em pulsos térmicos, e a convecção profunda draga para a superfície elementos recém-sintetizados — é ali que se produz boa parte do carbono e dos elementos do processo *s* do universo. A estrela então ejeta o envelope, formando uma nebulosa planetária, e o que resta do núcleo esfria como anã branca.

Estrelas acima de aproximadamente $8 M_{\odot}$ seguem outro caminho: conseguem queimar carbono, néon, oxigênio e silício em camadas sucessivas, montando uma estrutura em cebola com um núcleo de ferro. Como o ferro é o ponto mais fundo da curva de energia de ligação nuclear, fundi-lo consome energia em vez de liberar. O núcleo perde suporte, colapsa em frações de segundo e a estrela explode como supernova de colapso de núcleo, deixando uma estrela de nêutrons ou um buraco negro.

Exemplo de aplicação: de onde vêm os elementos

Vale ter presente a divisão de trabalho da nucleossíntese, porque ela conecta capítulos distantes desta apostila:

- **Hidrogênio, hélio e um pouco de lítio:** nucleossíntese primordial, nos primeiros minutos (Capítulo 17).
- **Carbono, nitrogênio, oxigênio:** queima em estrelas e dragagem em gigantes do ramo assintótico.
- **Elementos até o ferro:** queima em camadas de estrelas massivas e supernovas de colapso de núcleo.
- **Ferro em grande quantidade:** supernovas termonucleares de tipo Ia.
- **Ouro, platina, lantanídeos e outros do processo r :** fusões de estrelas de nêutrons, confirmadas observacionalmente em GW170817 (Capítulo 11).

A frase feita de que “somos poeira de estrelas” tem, portanto, endereços diferentes para cada átomo — e um deles só foi confirmado em 2017.

Tempo de queda livre e a escala do colapso

Considere uma esfera de densidade uniforme ρ na qual a pressão é subitamente removida. Uma casca inicialmente em r_0 cai sob a gravidade da massa interior, $M = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho$. A equação de movimento é

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Multiplicando por $\dot{r}$ e integrando com $\dot{r}(r_0) = 0$:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Separando variáveis e integrando de r_0 até 0, com a substituição $r = r_0 \cos^2 \xi$, obtém-se

$$t_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}$$

O resultado tem duas propriedades notáveis. Primeira: r_0 desapareceu — todas as cascas chegam ao centro simultaneamente, de modo que o colapso homólogo preserva a densidade uniforme. Segunda: o tempo depende *apenas* da densidade. Para uma nuvem molecular com $n \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$, isto é $\rho \simeq 4 \times 10^{-17} \text{ kg m}^{-3}$, resulta $t_{\text{ff}} \simeq 3 \times 10^5$ anos. Como as nuvens moleculares observadas sobrevivem por dezenas de milhões de anos, algo as sustenta contra o colapso — turbulência, campos magnéticos ou realimentação de estrelas jovens. A discrepância entre t_{ff} e a vida observada das nuvens é, por si só, uma das evidências centrais de que a formação estelar é ineficiente.

Massa de Jeans, comprimento de Jeans e fragmentação

A dedução energética da massa de Jeans já foi apresentada. Vale complementá-la com a análise de estabilidade, que é mais precisa e revela a escala espacial.

Perturbe um meio homogêneo com $\delta\rho \propto e^{i(kx - \omega t)}$. Linearizando as equações da hidrodinâmica com autogravidade, obtém-se a relação de dispersão

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho,$$

com c_s a velocidade do som. Para $\omega^2 > 0$, a perturbação oscila — é uma onda sonora. Para $\omega^2 < 0$, ela cresce exponencialmente: colapso. A fronteira define o **comprimento de Jeans**:

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}$$

Perturbações maiores que λ_J colapsam; menores, oscilam. A interpretação física é uma competição de tempos: uma perturbação de tamanho λ leva λ/c_s para que a pressão se comunique através dela, e t_{ff} para colapsar. Se a informação de pressão não chega a tempo, a gravidade vence.

A **fragmentação** segue disso. Durante o colapso, se o gás consegue irradiar e permanecer aproximadamente isotérmico, então c_s permanece constante enquanto ρ cresce, e $M_J \propto \rho^{-1/2}$ *diminui*. Sub-regiões que antes eram estáveis passam a exceder sua própria massa de Jeans, e a nuvem se quebra em pedaços cada vez menores. O processo só para quando a densidade fica alta o bastante para o gás se tornar opticamente espesso à própria radiação: a partir daí o colapso é adiabático, T sobe, c_s cresce e M_J volta a aumentar. Essa transição define a menor massa fragmentável, da ordem de alguns centésimos de massa solar — e é ela que fixa o limite inferior da função de massa inicial.

Esferas de Strömgren: a física de uma região HII

Uma estrela quente emite fótons capazes de ionizar hidrogênio ($E > 13,6$ eV). Em regime estacionário, a taxa total de ionizações deve igualar a taxa de recombinações no volume ionizado. Se N_{ion} é o número de fótons ionizantes emitidos por segundo, $n_e \simeq n_p \simeq n$ e α_B é o coeficiente de recombinação,

$$N_{\text{ion}} = \frac{4}{3} \pi R_S^3 n^2 \alpha_B,$$

donde o **raio de Strömgren**:

$$R_S = \left(\frac{3N_{\text{ion}}}{4\pi n^2 \alpha_B} \right)^{1/3}$$

A dependência $n^{-2/3}$ é o ponto principal: em meio denso, a região ionizada é pequena e brilhante; em meio rarefeito, é enorme e difusa. A transição entre gás ionizado e neutro é extremamente fina — da ordem de um livre caminho médio de fóton ionizante — porque a opacidade do hidrogênio neutro é altíssima. Regiões HII têm bordas nítidas por essa razão, e não por acidente de geometria.

Extinção: teoria por trás da curva

Um grão esférico de raio a tem seção de choque geométrica πa^2 , mas a seção de choque efetiva de extinção é $\sigma_{\text{ext}} = Q_{\text{ext}}(a, \lambda) \pi a^2$, com Q_{ext} o fator de eficiência calculado pela teoria de Mie. O comportamento tem três regimes:

- $a \ll \lambda$ (Rayleigh): $Q_{\text{ext}} \propto (a/\lambda)^4$, espalhamento fortemente azul.
- $a \sim \lambda$: $Q_{\text{ext}} \sim 1$ a 2 , com estrutura ressonante.
- $a \gg \lambda$: $Q_{\text{ext}} \rightarrow 2$, independente de λ — extinção cinza.

A curva de extinção interestelar observada, aproximadamente $A_\lambda \propto \lambda^{-1}$ no visível, indica que os grãos dominantes têm tamanhos comparáveis ao comprimento de onda óptico, isto é, décimos de micrômetro. A saliência em 217,5 nm é atribuída a carbono grafítico ou a hidrocarbonetos aromáticos, e sua ubiquidade é uma das restrições mais fortes sobre a composição dos grãos.

A profundidade óptica relaciona-se à extinção em magnitudes por

$$A_\lambda = -2,5 \log_{10} e^{-\tau_\lambda} = 1,086 \tau_\lambda,$$

relação que se usa constantemente e que decorre apenas da definição de magnitude.

A curva de crescimento

Como se converte a intensidade de uma linha de absorção em abundância? A grandeza medida é a **largura equivalente**

$$W_\lambda = \int \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} d\lambda,$$

a largura de um retângulo de absorção total que removeria a mesma energia. Sua relação com a densidade de coluna N dos absorvedores tem três regimes, e o gráfico de W_λ contra N é a **curva de crescimento**:

1. **Regime linear** ($\tau_0 \ll 1$): cada átomo adicionado absorve independentemente, e $W_\lambda \propto N$. Aqui a abundância sai diretamente.
2. **Regime saturado**: o centro da linha atinge $\tau \gg 1$ e não pode ficar mais escuro; a linha só cresce pelas asas Doppler, e $W_\lambda \propto \sqrt{\ln N}$. Uma variação de ordens de grandeza em N mal muda W_λ — é o pior regime possível para medir abundância.
3. **Regime de amortecimento**: as asas lorentzianas tornam-se importantes e $W_\lambda \propto \sqrt{N}$, restaurando sensibilidade.

Saber em que regime uma linha está é obrigatório antes de citar qualquer abundância, e é por isso que análises espectroscópicas sérias usam sempre múltiplas linhas do mesmo elemento com forças diferentes.

O interior das estrelas evoluídas: o princípio do espelho

Quando o hidrogênio central se esgota, forma-se um núcleo de hélio inerte cercado por uma camada em queima. O comportamento seguinte parece paradoxal e tem nome: **princípio do espelho**. Quando o núcleo contrai, o envelope expande; quando o núcleo expande, o envelope contrai.

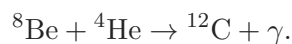
A razão está na camada de queima, que funciona como pivô. A contração do núcleo aumenta a temperatura na base da camada; como a taxa de queima do hidrogênio pelo ciclo CNO varia com T^{18} , a produção de energia na camada dispara. O excesso de fluxo não pode ser transportado pelo envelope sem que o gradiente se ajuste, e o resultado é a expansão — que, por sua vez, resfria a superfície. A estrela move-se para a direita no diagrama HR, tornando-se uma gigante vermelha, com raio dezenas ou centenas de vezes maior e temperatura efetiva menor, apesar de a luminosidade ter aumentado.

O núcleo de hélio, enquanto isso, torna-se degenerado em estrelas de baixa massa. Aqui aparece uma instabilidade específica: como a pressão de um gás degenerado não depende da temperatura, o núcleo não pode se expandir para se resfriar quando a queima de hélio começa. A energia liberada aumenta T , o que acelera o processo triplo-alfa — cuja taxa varia aproximadamente com T^{40} — em um ciclo descontrolado. Este é o **flash do hélio**, que libera em segundos uma potência comparável à de uma galáxia, sem que nada disso apareça na superfície: a energia é consumida em levantar a degenerescência do núcleo. Em estrelas acima de $\sim 2 M_\odot$, o núcleo não chega a degenerar e a ignição do hélio é suave.

O processo triplo-alfa

A fusão de hélio enfrenta um obstáculo peculiar: não existe núcleo estável com massa 5 nem com massa 8. A reação ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$ é endotérmica e o ${}^8\text{Be}$ decai de volta em $\sim 10^{-16}$ s. O caminho é estatístico: em densidades altíssimas, mantém-se uma população minúscula de ${}^8\text{Be}$ em equilíbrio,

e ocasionalmente um terceiro ${}^4\text{He}$ é capturado antes do decaimento:



Como a reação exige efetivamente três corpos, a taxa depende de ρ^2 e a sensibilidade térmica é extrema, $\epsilon_{3\alpha} \propto \rho^2 T^{40}$ em torno de 10^8 K. Hoyle previu, a partir da simples existência de carbono no universo, que deveria haver um estado ressonante do ${}^{12}\text{C}$ próximo à energia de ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He}$ — previsão confirmada experimentalmente depois. É um dos raros casos em que um argumento astrofísico determinou uma propriedade nuclear antes da medida em laboratório.

Nucleossíntese em camadas e o fim da linha

Estrelas massivas queimam sucessivamente hidrogênio, hélio, carbono, néon, oxigênio e silício. Cada estágio requer temperatura maior, porque a barreira coulombiana cresce com $Z_1 Z_2$, e cada um dura muito menos que o anterior — não porque haja menos combustível, mas porque a energia liberada por unidade de massa cai enquanto a luminosidade de neutrinos cresce explosivamente. Para uma estrela de $25 M_\odot$: hidrogênio por ~ 7 milhões de anos, hélio por ~ 700 mil, carbono por ~ 600 anos, oxigênio por ~ 6 meses, silício por ~ 1 dia.

A queima de silício produz núcleos do grupo do ferro, e ali o processo para. A curva de energia de ligação por núcleon tem máximo em ${}^{56}\text{Fe}$: fundir ferro consome energia em vez de liberá-la. O núcleo estelar torna-se uma esfera degenerada de ferro que cresce até exceder a massa de Chandrasekhar e colapsa.

O colapso libera energia gravitacional da ordem de

$$\Delta E \sim \frac{GM^2}{R_{\text{ns}}} - \frac{GM^2}{R_{\text{núcleo}}} \sim 3 \times 10^{46} \text{ J},$$

para $M \simeq 1,4 M_\odot$ e $R_{\text{ns}} \simeq 12$ km. Desse total, cerca de 99% escapa em neutrinos, $\sim 1\%$ vai para a energia cinética da ejeção e apenas $\sim 0,01\%$ aparece como luz. A supernova mais brilhante que uma galáxia inteira é, energeticamente, uma nota de rodapé do evento — fato que só foi confirmado observacionalmente com os neutrinos da SN 1987A.

Curvas de luz e o níquel radioativo

A luz de uma supernova nos primeiros meses não vem da explosão em si, mas do decaimento radioativo do níquel sintetizado:



A luminosidade segue a taxa de decaimento, e o formato da curva de luz — subida em semanas, declínio exponencial com escala de ~ 77 dias na cauda — é uma assinatura direta da meia-vida do cobalto. Ajustando a curva observada, obtém-se a massa de ${}^{56}\text{Ni}$ produzida: tipicamente $0,6 M_\odot$ em supernovas de tipo Ia e $0,05\text{--}0,1 M_\odot$ nas de colapso de núcleo. É assim que se mede, à distância de bilhões de anos-luz, quanto de um isótopo específico uma explosão fabricou.

A relação largura-luminosidade das SNe Ia, que as torna velas padrão, tem origem física aqui: mais níquel significa mais energia depositada, envelope mais quente, opacidade maior, difusão mais lenta — portanto maior brilho e declínio mais lento, simultaneamente. A correlação empírica de Phillips não é coincidência; é consequência de a mesma quantidade controlar as duas grandezas.

Choques e a solução de Sedov-Taylor

Uma explosão que injeta energia E em um meio de densidade ρ_0 produz uma onda de choque cuja evolução pode ser obtida por análise dimensional pura, sem resolver as equações da hidrodinâmica. As únicas grandezas disponíveis são E , ρ_0 e t . A combinação com dimensão de comprimento é única:

$$R(t) = \xi_0 \left(\frac{Et^2}{\rho_0} \right)^{1/5}$$

com $\xi_0 \simeq 1,15$ para um gás monoatômico. A velocidade do choque segue por derivação:

$$v_s = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5} \frac{R}{t} \propto t^{-3/5}.$$

Aplicando a um remanescente de supernova com $E = 10^{44}$ J em um meio com $n = 1 \text{ cm}^{-3}$ ($\rho_0 = 1,7 \times 10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$), após mil anos:

$$R \simeq 1,15 \left(\frac{10^{44} \times (3,15 \times 10^{10})^2}{1,7 \times 10^{-21}} \right)^{1/5} \simeq 1,8 \times 10^{17} \text{ m} \simeq 6 \text{ pc},$$

com $v_s \simeq 2300 \text{ km s}^{-1}$. Valores compatíveis com remanescentes jovens observados. Uma lei de escala obtida por contagem de dimensões descreve quantitativamente objetos de parsecs de tamanho.

As condições de salto através do choque (relações de Rankine-Hugoniot) fornecem, para um choque forte com $\gamma = 5/3$:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 4, \quad T_2 = \frac{3}{16} \frac{\mu m_H v_s^2}{k}.$$

A compressão máxima é apenas um fator 4 — resultado que surpreende quem espera compressões arbitrárias — e a temperatura pós-choque cresce com v_s^2 . Para $v_s = 2300 \text{ km s}^{-1}$, $T_2 \simeq 7 \times 10^7 \text{ K}$: daí remanescentes de supernova serem fontes brilhantes de raios X.

A fase de Sedov-Taylor termina quando o resfriamento radiativo se torna importante, e o remanescente entra na fase de **conservação de momento** (*snowplow*), com $R \propto t^{1/4}$. Somando o momento total injetado no meio ao longo da vida do remanescente, obtém-se a estimativa da energia que supernovas devolvem ao meio interestelar — número central em modelos de formação de galáxias, porque é ele que regula a *feedback* estelar.

Aceleração de partículas em choques

O mecanismo de Fermi de primeira ordem explica por que choques produzem espectros de lei de potência. Uma partícula que atravessa o choque, é espalhada por irregularidades magnéticas a jusante e retorna, ganha energia proporcional à sua energia atual em cada ciclo:

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{4}{3} \frac{v_s}{c} \equiv \beta_g.$$

Se a probabilidade de escapar por ciclo é P_{esc} , então após k ciclos a energia é $E = E_0(1 + \beta_g)^k$ e o número de partículas restantes é $N = N_0(1 - P_{\text{esc}})^k$. Eliminando k :

$$\frac{\ln(N/N_0)}{\ln(E/E_0)} = \frac{\ln(1 - P_{\text{esc}})}{\ln(1 + \beta_g)} \equiv -(p - 1),$$

ou seja $N(> E) \propto E^{-(p-1)}$, uma lei de potência. Para um choque forte não relativístico, o cálculo detalhado dá $p = 2$ exatamente — independentemente da velocidade do choque e das propriedades do meio. Esse valor universal, corrigido por propagação e escape, produz o índice observado dos raios cósmicos galácticos e o índice síncrotron discutido no Capítulo 6.

Resfriamento do gás e a função de resfriamento

Gás quente perde energia por processos radiativos cuja eficiência depende fortemente da temperatura e da composição. Define-se a função de resfriamento $\Lambda(T)$ por

$$\frac{dE}{dt dV} = -n^2 \Lambda(T).$$

A dependência n^2 é geral: qualquer processo de dois corpos — colisão entre elétron e íon — escala assim. O tempo de resfriamento é

$$t_{\text{cool}} = \frac{3nkT/2}{n^2 \Lambda(T)} = \frac{3kT}{2n \Lambda(T)}.$$

A forma de $\Lambda(T)$ tem três regiões. Abaixo de 10^4 K, o resfriamento é ineficiente, porque não há energia suficiente para excitar transições eletrônicas — só linhas finas e moléculas. Entre 10^4 e 10^7 K, linhas de metais dominam e Λ tem um pico pronunciado. Acima de 10^7 K, o gás está totalmente ionizado e resta apenas Bremsstrahlung, com $\Lambda \propto T^{1/2}$.

Comparar t_{cool} com o tempo de queda livre define quais halos conseguem formar galáxias: se $t_{\text{cool}} < t_{\text{ff}}$, o gás resfria e colapsa; caso contrário, permanece como atmosfera quente. Essa comparação, feita em função da massa do halo, produz duas escalas críticas que correspondem aproximadamente às massas mínima e máxima das galáxias observadas — e é a base do argumento clássico de White e Rees sobre por que galáxias têm o tamanho que têm.

Poeira: aquecimento e emissão

Um grão de raio a em equilíbrio absorve a radiação estelar incidente e reemite no infravermelho. O balanço é

$$\pi a^2 Q_{\text{abs}} \frac{L_{\star}}{4\pi d^2} = 4\pi a^2 Q_{\text{em}} \sigma T_g^4,$$

donde

$$T_g = \left(\frac{Q_{\text{abs}}}{Q_{\text{em}}} \frac{L_{\star}}{16\pi\sigma d^2} \right)^{1/4}.$$

Como $Q_{\text{abs}} \simeq 1$ no ultravioleta e visível, mas $Q_{\text{em}} < 1$ no infravermelho longo (grãos são emissores ineficientes em comprimentos de onda maiores que seu tamanho), a razão $Q_{\text{abs}}/Q_{\text{em}} > 1$ e os grãos ficam *mais quentes* que a temperatura de equilíbrio de um corpo negro. Tipicamente $T_g \simeq 15\text{--}100$ K no meio interestelar, com pico de emissão entre 30 e 200 μm — exatamente a faixa observada por telescópios como Herschel e pelo instrumento MIRI do JWST.

A massa de poeira de uma fonte pode ser estimada diretamente da emissão no submilimétrico, onde o meio é opticamente fino e vale o limite de Rayleigh-Jeans:

$$M_d = \frac{F_{\nu} d^2}{\kappa_{\nu} B_{\nu}(T_d)}.$$

Esta é uma das poucas medidas de massa em astrofísica que não depende de dinâmica — e é por isso que levantamentos submilimétricos se tornaram a maneira padrão de medir conteúdo de poeira em galáxias distantes.

Perguntas para discussão.

- Por que nuvens moleculares gigantes formam milhares de estrelas em vez de uma só?
- Que evidência observacional apoia a existência de discos em torno de estrelas jovens?
- Se a IMF fosse diferente em galáxias distantes, que conclusões extragalácticas mudariam?
- Por que a queima de ferro não sustenta uma estrela, mesmo com ferro em abundância no núcleo?

Capítulo 10 – Remanescentes compactos e altas energias

Bloco Altas energias. O fio condutor deste capítulo é a pergunta: o que acontece quando a gravidade força a matéria para regimes em que pressão térmica comum não basta?

Como estudar este bloco: Acompanhe sempre três escalas: densidade, velocidade de escape e tempo de variabilidade. Elas dizem se o objeto é comum, compacto ou extremo.

Anãs brancas, estrelas de nêutrons e buracos negros são finais possíveis de evolução estelar, mas também são laboratórios de Física. Em uma anã branca, a sustentação vem da pressão de degenerescência dos elétrons. Em uma estrela de nêutrons, densidades nucleares tornam a equação de estado um problema profundo. Em buracos negros, o horizonte de eventos marca uma fronteira causal.

A escala relativística mais simples é o raio de Schwarzschild:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

Para uma massa solar, $R_s \simeq 3$ km. Essa aproximação é uma âncora útil: um buraco negro de $10M_\odot$ tem raio de Schwarzschild de ordem 30 km; um buraco negro supermassivo de $4 \times 10^6 M_\odot$ tem escala de milhões de quilômetros.

Da observação ao modelo

Observável	Grandeza inferida	Hipótese ou calibração necessária
raios X, pulsos periódicos, variabilidade rápida, órbitas de companheiras	massa compacta, raio máximo da região emissora, campo magnético, taxa de acrecção	modelo de emissão, inclinação orbital, distância, identificação do objeto companheiro

Pergunta de checagem: A luminosidade vem da superfície, de um disco de acreção ou de uma região relativística?

Exemplo resolvido. Se uma fonte varia significativamente em $\Delta t = 1$ ms, a região que coordena essa variação não pode ter tamanho muito maior que $c\Delta t \approx 3 \times 10^5$ m = 300 km. Isso não prova sozinho que há uma estrela de nêutrons ou buraco negro, mas coloca a fonte no regime compacto. Variabilidade é uma régua causal.

Conexão com supernovas. Supernovas não são apenas explosões bonitas. Elas conectam nucleossíntese, ondas de choque, neutrinos, poeira, enriquecimento químico e formação de remanescentes. Ao estudar uma supernova, pergunte: que estrela explodiu? Qual fonte de energia alimentou a luz? Que elementos foram produzidos? Que remanescente sobrou?

Dedução curta: raio de Schwarzschild por argumento de escape

Uma forma newtoniana de motivar a escala de Schwarzschild é perguntar em que raio a velocidade de escape seria igual à velocidade da luz:

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c.$$



Figura 17: **O regime compacto em ação: fusão de duas estrelas de nêutrons.** Concepção artística do evento GW170817, detectado em 17 de agosto de 2017 simultaneamente em ondas gravitacionais (LIGO–Virgo) e em raios gama (Fermi/INTEGRAL), e depois acompanhado em todo o espectro eletromagnético. Cada uma das duas estrelas concentra mais de uma massa solar em um raio de cerca de 10 km: a mesma massa do Sol comprimida do tamanho de uma cidade. É essa compactação extrema — de $R \sim R_{\oplus}$ nas anãs brancas, a $R \sim 10$ km nas estrelas de nêutrons, até $R_s = 2GM/c^2 \simeq 3$ km por massa solar no horizonte de um buraco negro — que torna acessíveis densidades nucleares, campos gravitacionais relativísticos e a nucleossíntese de elementos pesados observada na quilonova. Crédito: University of Warwick/Mark Garlick, via ESO, licença CC BY 4.0 (eso1733s).

Daí,

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

Relatividade geral é necessária para interpretar corretamente o horizonte, mas o argumento dimensional revela a escala certa. Para $M = M_{\odot}$, $R_s \simeq 3$ km; para $10M_{\odot}$, $R_s \simeq 30$ km.

Exemplo de aplicação: luminosidade de acreção

Uma massa m caindo até raio R libera energia gravitacional de ordem GMm/R . Por unidade de tempo, para uma taxa de acreção $\dot{M}$,

$$L_{\text{acc}} \sim \frac{GM\dot{M}}{R}.$$

Como R é pequeno em objetos compactos, a acreção pode ser muito eficiente. Essa é a razão física para discos de acreção em anãs brancas, estrelas de nêutrons e buracos negros brilharem em ultravioleta e raios X. A luz não vem de fusão nuclear comum, mas da conversão de energia gravitacional em radiação.

Anãs brancas e o limite de Chandrasekhar

Uma anã branca não é sustentada por pressão térmica, e sim pela pressão de degenerescência dos elétrons — uma consequência direta do princípio de exclusão de Pauli, que impede dois elétrons de ocuparem o mesmo estado quântico. O resultado é contraintuitivo: quanto *maior* a massa, *menor* o raio, porque a gravidade extra precisa ser equilibrada por elétrons empacotados mais densamente.

Levando o raciocínio ao limite, quando os elétrons se tornam relativísticos a pressão deixa de crescer rápido o bastante e existe uma massa máxima, o limite de Chandrasekhar, próximo de $1,4 M_{\odot}$. Esse número não é um ajuste empírico: sai da combinação de mecânica quântica, relatividade especial e gravitação newtoniana. E ele tem consequência observacional imediata — é o gatilho das supernovas de tipo Ia, que ocorrem quando uma anã branca em sistema binário se aproxima desse limite. A uniformidade relativa dessas explosões é o que as torna velas padrão e sustenta a medida da aceleração cósmica (Capítulo 16).

Pulsares: relógios naturais

Estrelas de nêutrons magnetizadas e em rotação rápida emitem feixes que varrem o espaço; se o feixe cruza a Terra, vemos pulsos periódicos. Os pulsares mais rápidos, chamados de milissegundo, giram centenas de vezes por segundo e mantêm estabilidade de período comparável à de relógios atômicos.

Essa estabilidade é o que os torna instrumentos. O pulsar binário de Hulse e Taylor teve seu período orbital medido decrescendo exatamente na taxa prevista pela relatividade geral para perda de energia por ondas gravitacionais — primeira evidência, ainda que indireta, dessas ondas, e Nobel de 1993. Conjuntos de pulsares espalhados pela Galáxia formam hoje detectores de ondas gravitacionais de baixíssima frequência (Capítulo 11), e o retardo dependente da frequência dos pulsos mede o plasma no caminho (Capítulo 18).

Magnetares. Uma subclasse tem campos magnéticos de 10^{14} a 10^{15} G, os mais intensos conhecidos no universo. Reconfigurações desses campos produzem surtos de raios X e gama, e pelo menos um magnetar galáctico já foi flagrado emitindo uma rápida rajada de rádio, conectando dois campos que pareciam separados.

Medindo o raio de uma estrela de nêutrons

Massas de estrelas de nêutrons são medidas há décadas em sistemas binários, e alguns pulsares chegam a $\sim 2 M_{\odot}$ — o que por si só descarta equações de estado nucleares que não suportariam tanto. O raio é bem mais difícil. Duas técnicas modernas atacaram o problema: o telescópio NICER, instalado na Estação Espacial Internacional, modela o perfil temporal e espectral de manchas quentes na superfície de pulsares, cuja forma depende da curvatura do espaço-tempo e portanto da razão massa-raio; e a deformabilidade de maré extraída da forma de onda de GW170817, que mede o quanto cada estrela é distorcida pela companheira antes da fusão.

As duas rotas, partindo de física completamente diferente, convergem para raios em torno de 12 km para estrelas de $1,4 M_{\odot}$. É um resultado bonito de consistência: astrofísica de raios X e astronomia de ondas gravitacionais restringindo, juntas, a física nuclear de altíssima densidade.

Acreção, discos e jatos

Em binárias próximas, matéria transferida de uma companheira forma um disco em torno do objeto compacto. A luminosidade de acreção é

$$L_{\text{acc}} \sim \frac{GM\dot{M}}{R},$$

e a eficiência — energia liberada por unidade de massa acretada — vale aproximadamente GM/Rc^2 . Para uma estrela de nêutrons, isso dá cerca de 10 a 20% de mc^2 , quase uma ordem de grandeza acima da eficiência da fusão nuclear, que é de 0,7%. Acreção sobre objetos compactos é o processo mais eficiente de conversão de massa em energia conhecido na natureza, e é por isso que binárias de raios X e núcleos ativos brilham tanto com tão pouca matéria.

Há um teto natural: quando a pressão de radiação sobre o gás em queda iguala a atração gravitacional, a acreção se auto-limita. Essa é a **luminosidade de Eddington**,

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \simeq 1,3 \times 10^{31} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ W},$$

um número que reaparece em contextos muito distantes: limita o brilho de binárias de raios X, o crescimento de buracos negros supermassivos no universo jovem e a interpretação de fontes ultraluminosas.

Ver o horizonte: imagens e órbitas

Duas linhas observacionais recentes tornaram buracos negros objetos de imagem, não só de inferência.

A primeira é o **Event Horizon Telescope**, que combinou radiotelescópios de vários continentes em 1,3 mm e produziu, em 2019, a imagem do anel de emissão em torno do buraco negro de M87, e em 2022 a de Sagitário A*, no centro da nossa Galáxia. O que se vê não é o horizonte — ele é escuro por definição — mas a sombra que ele projeta sobre o plasma quente ao redor, com tamanho previsto pela relatividade geral a partir da massa.

A segunda é o acompanhamento de **órbitas estelares individuais** no centro galáctico. Duas equipes seguiram por décadas, com óptica adaptativa, estrelas que orbitam Sagitário A* — a estrela S2 completa uma volta em cerca de 16 anos — e mediram a massa central em torno de $4 \times 10^6 M_{\odot}$ concentrada em uma região menor que o Sistema Solar. O trabalho rendeu metade do Nobel de Física de 2020 e forneceu testes diretos de relatividade geral: o avanço do periastro de S2 e o desvio gravitacional para o vermelho de sua luz na passagem mais próxima foram medidos e batem com a previsão.

Exemplo resolvido: a sombra de Sagitário A*

O raio de Schwarzschild de $4,3 \times 10^6 M_\odot$ é

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \simeq 1,3 \times 10^{10} \text{ m.}$$

A sombra prevista tem diâmetro angular de aproximadamente $5,2R_s$ dividido pela distância de $8,3 \text{ kpc} = 2,6 \times 10^{20} \text{ m}$:

$$\theta \simeq \frac{5,2 \times 1,3 \times 10^{10}}{2,6 \times 10^{20}} \simeq 2,6 \times 10^{-10} \text{ rad} \simeq 54 \mu\text{as.}$$

Resolver isso em $1,3 \text{ mm}$ exige, por $\theta \simeq \lambda/B$, uma linha de base

$$B \simeq \frac{1,3 \times 10^{-3}}{2,6 \times 10^{-10}} \simeq 5 \times 10^6 \text{ m,}$$

ou seja, cinco mil quilômetros — da ordem do raio da Terra. A conta explica em uma linha por que a imagem só foi possível com um interferômetro de escala planetária, e por que não havia atalho.

Perguntas para discussão.

- Por que o raio de uma anã branca diminui quando sua massa aumenta?
- Acreção é mais eficiente que fusão nuclear. Por que, então, estrelas usam fusão?
- O EHT fotografa a sombra, não o horizonte. Que diferença física há entre as duas coisas?
- Que hipóteses entram ao converter o movimento de S2 em uma massa central?
- Duas técnicas independentes dão raio $\simeq 12 \text{ km}$ para estrelas de nêutrons. Por que a concordância vale mais que qualquer uma delas isolada?

Pressão de degenerescência, deduzida

O princípio de exclusão de Pauli permite no máximo dois elétrons (spins opostos) por célula de volume h^3 do espaço de fase. A altíssimas densidades, os elétrons preenchem todos os estados até um momento máximo p_F , o momento de Fermi. Contando estados,

$$n_e = \frac{2}{h^3} \cdot \frac{4}{3} \pi p_F^3 \implies p_F = \left(\frac{3h^3 n_e}{8\pi} \right)^{1/3}.$$

A pressão de um gás de partículas é $P = \frac{1}{3} n \langle pv \rangle$. No regime **não relativístico**, $v = p/m_e$, e integrando sobre a esfera de Fermi:

$$P_e = \frac{8\pi}{15m_e h^3} p_F^5 = \frac{h^2}{20m_e} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} n_e^{5/3}.$$

Escrevendo $n_e = \rho/(\mu_e m_H)$, com $\mu_e \simeq 2$ para material sem hidrogênio,

$$P_e = K_1 \rho^{5/3}$$

No regime **ultrarrelativístico**, $v \rightarrow c$ e a mesma integral fornece

$$P_e = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4 = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n_e^{4/3} \implies P_e = K_2 \rho^{4/3}$$

A troca de expoente de $5/3$ para $4/3$ é a origem de tudo o que segue. Note que em nenhum dos dois casos a temperatura aparece: a pressão de degenerescência é puramente quântica e sobrevive ao resfriamento. É isso que permite a uma anã branca esfriar por bilhões de anos sem colapsar.

A relação massa-raio das anãs brancas

Combine a estimativa hidrostática $P_c \sim GM^2/R^4$ com a equação de estado não relativística e $\rho \sim M/R^3$:

$$\frac{GM^2}{R^4} \sim K_1 \left(\frac{M}{R^3} \right)^{5/3} \implies \boxed{R \propto M^{-1/3}}$$

Anãs brancas mais massivas são *menores*. O volume escala como M^{-1} , de modo que a densidade cresce com M^2 . Para uma anã branca de $0,6 M_\odot$, $R \simeq 8900$ km, comparável ao raio da Terra, com densidade média de $\sim 10^9 \text{ kg m}^{-3}$: uma colher de chá pesaria toneladas.

Dedução: o limite de Chandrasekhar

À medida que a massa cresce, a densidade cresce e o momento de Fermi aumenta. Quando $p_F \gtrsim m_e c$, os elétrons tornam-se relativísticos e a equação de estado amolece para $P \propto \rho^{4/3}$. Repita então o balanço hidrostático com esse expoente:

$$\frac{GM^2}{R^4} \sim K_2 \left(\frac{M}{R^3} \right)^{4/3} = K_2 \frac{M^{4/3}}{R^4}.$$

O raio cancela dos dois lados. Sobra uma condição *só* sobre a massa:

$$GM^2 \sim K_2 M^{4/3} \implies M^{2/3} \sim \frac{K_2}{G} \implies M_{\text{Ch}} \sim \left(\frac{K_2}{G} \right)^{3/2}.$$

Substituindo $K_2 = \frac{\hbar c}{8} (3/\pi)^{1/3} (\mu_e m_H)^{-4/3}$:

$$\boxed{M_{\text{Ch}} \simeq \frac{1}{\mu_e^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m_H^2} \times (\text{fator numérico}) \simeq 1,44 M_\odot}$$

O cálculo rigoroso, integrando a equação de Lane-Emden com $n = 3$, dá $M_{\text{Ch}} = 5,83 \mu_e^{-2} M_\odot$, ou seja $1,46 M_\odot$ para $\mu_e = 2$.

Vale absorver a estrutura do resultado: a massa máxima é essencialmente $(\hbar c/G)^{3/2}/m_H^2$, uma combinação de três constantes fundamentais dividida pelo quadrado da massa do próton. É uma *massa de Planck ao cubo dividida pela massa do próton ao quadrado*. Nenhum parâmetro astrofísico entra. O fato de que uma escala de massa estelar emerge apenas de $\hbar$, c , G e m_H é um dos resultados mais bonitos da física do século XX — e é por isso que supernovas de tipo Ia, que explodem ao atingir esse limite, têm brilho tão uniforme.

Estrelas de nêutrons e a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Acima do limite de Chandrasekhar, os elétrons são forçados a se combinar com prótons via captura eletrônica, $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$, e o objeto passa a ser sustentado por degenerescência de nêutrons. Repetir o cálculo trocando m_e por m_n na equação de estado sugere ingenuamente $R \propto M^{-1/3}$ com raio $\sim (m_e/m_n)$ vezes menor, ou seja alguns quilômetros — ordem de grandeza correta.

Mas a estrela de nêutrons é relativística: $GM/Rc^2 \simeq 0,2$, e o equilíbrio hidrostático newtoniano deixa de valer. A versão correta, obtida da relatividade geral para uma esfera estática, é a **equação**

TOV:

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G(\rho + P/c^2)(m + 4\pi r^3 P/c^2)}{r^2(1 - 2Gm/rc^2)}.$$

Compare termo a termo com a versão newtoniana. Três correções aparecem: a pressão contribui como fonte de gravidade (o fator $\rho + P/c^2$), a pressão integrada também contribui ($4\pi r^3 P/c^2$), e o denominador diverge quando $r \rightarrow 2Gm/c^2$, o raio de Schwarzschild.

O efeito de todas elas é o mesmo: na relatividade geral, **pressão gera gravidade**. Aumentar a pressão para resistir ao colapso aumenta também a força que causa o colapso. Isso implica que existe massa máxima para *qualquer* equação de estado, por mais rígida que seja — e que essa massa não pode ultrapassar cerca de $3 M_\odot$ sem violar causalidade ($v_{\text{som}} \leq c$). O valor efetivo, restringido por pulsares de $\sim 2 M_\odot$ e pela deformabilidade de maré de GW170817, fica entre 2 e $2,3 M_\odot$.

A métrica de Schwarzschild e suas consequências mensuráveis

Para uma massa esférica não rotante, a solução exata das equações de Einstein no vácuo é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_s/r} + r^2 d\Omega^2, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

Três resultados observáveis saem diretamente dela.

Desvio gravitacional para o vermelho. O tempo próprio de um observador estático a raio r relaciona-se ao tempo coordenado por $d\tau = \sqrt{1 - r_s/r} dt$. Um fóton emitido com frequência ν_{em} em r e recebido no infinito chega com

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_{\text{em}}} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}.$$

Para a superfície do Sol, $r_s/R_\odot \simeq 4,2 \times 10^{-6}$, e o desvio é de 2×10^{-6} — medido e confirmado. Para uma anã branca, é mil vezes maior, o que permite medir M/R espectroscopicamente.

Última órbita circular estável. Analisando o potencial efetivo para partículas massivas na métrica de Schwarzschild,

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{c^2 r^3},$$

o terceiro termo é puramente relativístico e não tem análogo newtoniano. Ele domina em pequenos raios e destrói a barreira centrífuga: abaixo de um raio crítico não existem órbitas circulares estáveis. Impondo $V' = V'' = 0$ obtém-se

$$r_{\text{ISCO}} = \frac{6GM}{c^2} = 3r_s.$$

Essa é a fronteira interna dos discos de acreção em torno de buracos negros não rotantes, e a eficiência de conversão de massa em energia até a ISCO é de 5,7% — oito vezes a eficiência da fusão nuclear. Para buracos negros em rotação máxima, a ISCO aproxima-se do horizonte e a eficiência sobe a 42%.

Precessão do periastro. O mesmo termo extra faz as órbitas elípticas precessarem. Por período,

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)},$$

o que dá $43''$ por século para Mercúrio — exatamente a discrepância que a mecânica newtoniana não explicava — e valores muito maiores para a estrela S2 em torno de Sagitário A*, onde o efeito foi medido diretamente.

Discos de acreção: a solução de Shakura-Sunyaev

Considere matéria em órbitas quase circulares em torno de um objeto de massa M , perdendo momento angular por viscosidade e espiralando para dentro a uma taxa constante $\dot{M}$. Em regime estacionário, a energia dissipada por unidade de área em cada anel é obtida do balanço entre a energia orbital perdida e o trabalho dos torques viscosos:

$$D(r) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi r^3} \left[1 - \sqrt{\frac{r_{\text{in}}}{r}} \right].$$

Se cada anel irradia como corpo negro, $D(r) = \sigma T^4$, e portanto

$$T(r) \propto r^{-3/4} \quad \text{para } r \gg r_{\text{in}}$$

Esta é a assinatura observacional do modelo. Somando as contribuições de corpo negro de todos os anéis, o espectro integrado tem uma região central com $F_\nu \propto \nu^{1/3}$ — lei de potência característica que decorre unicamente do expoente $-3/4$ do perfil de temperatura.

A temperatura característica escala como $T \sim (GM\dot{M}/\sigma r_{\text{in}}^3)^{1/4}$ com $r_{\text{in}} \propto M$, o que dá $T \propto M^{-1/4}$ para acreção próxima ao limite de Eddington. Discos em torno de buracos negros estelares atingem 10^7 K e emitem em raios X; discos em torno de buracos negros supermassivos, um milhão de vezes mais massivos, ficam em 10^5 K e emitem no ultravioleta. A diferença de banda entre binárias de raios X e quasares é, portanto, previsão direta do modelo — e é uma das confirmações mais limpas de que os dois fenômenos são o mesmo processo em escalas distintas.

Pulsares: frenagem por dipolo magnético

Um dipolo magnético de momento m girando com velocidade angular Ω e ângulo α entre eixos irradia potência

$$\dot{E}_{\text{dip}} = \frac{2}{3} \frac{m^2 \Omega^4 \sin^2 \alpha}{c^3}.$$

Igualando essa perda à taxa de variação da energia rotacional, $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \Omega^2$:

$$I \Omega \dot{\Omega} = -\frac{2m^2 \sin^2 \alpha}{3c^3} \Omega^4 \quad \Rightarrow \quad \dot{\Omega} \propto -\Omega^3.$$

Escrevendo em termos do período $P = 2\pi/\Omega$, obtém-se $\dot{P} \propto 1/P$, e integrando de P_0 até P :

$$t = \frac{P}{2\dot{P}} \left[1 - \left(\frac{P_0}{P} \right)^2 \right] \simeq \frac{P}{2\dot{P}},$$

para $P_0 \ll P$. Esta é a **idade característica**, usada no laboratório deste capítulo. Ela superestima a idade se o pulsar nasceu girando devagar, e é apenas uma estimativa — mas para o Caranguejo dá 1257 anos contra os 972 anos reais desde 1054, concordância notável para um argumento tão simples.

Invertendo a mesma equação para o momento de dipolo e escrevendo em termos do campo na superfície:

$$B_{\text{sup}} \simeq 3,2 \times 10^{19} \sqrt{P\dot{P}} \text{ G},$$

com P em segundos. É essa expressão que transforma duas quantidades cronometradas — período e sua derivada — em uma medida de campo magnético de 10^{12} G, valor inacessível a qualquer laboratório terrestre.

Acreção esférica: o raio de Bondi

Antes de discos, vale entender o caso mais simples: acreção esfericamente simétrica de um gás com velocidade do som c_s sobre um objeto de massa M . O material é capturado quando sua energia térmica não basta para escapar do poço gravitacional, isto é, dentro do **raio de Bondi**:

$$R_B \simeq \frac{2GM}{c_s^2}.$$

A taxa de acreção é o fluxo de massa através dessa superfície,

$$\dot{M}_B \simeq 4\pi R_B^2 \rho_\infty c_s = \frac{16\pi G^2 M^2 \rho_\infty}{c_s^3}.$$

Duas dependências merecem destaque: $\dot{M} \propto M^2$, que produz crescimento explosivo, e $\dot{M} \propto c_s^{-3}$, que torna o processo extremamente sensível à temperatura do gás. Aquecer o meio por um fator 4 reduz a acreção por um fator 8 — e é exatamente esse mecanismo que permite ao *feedback* de núcleos ativos regular o próprio crescimento do buraco negro, como discutido no Capítulo 15.

O modelo esférico, porém, subestima drasticamente a luminosidade real na maioria dos casos: material com qualquer momento angular não cai diretamente, e forma disco. A comparação entre a taxa de Bondi e a observada é usada como diagnóstico de quão eficiente é o transporte de momento angular em cada sistema.

Viscosidade e o parâmetro α

Um disco só acreta se conseguir transportar momento angular para fora. Viscosidade molecular é ordens de grandeza pequena demais para isso — o número de Reynolds em discos astrofísicos é de 10^{14} . A solução usual é parametrizar a viscosidade turbulenta efetiva:

$$\nu = \alpha c_s H,$$

com H a escala de altura do disco e $\alpha < 1$. A justificativa é dimensional: turbulência não pode ter velocidade característica maior que a do som (senão dissiparia em choques) nem escala maior que a espessura do disco.

Com essa prescrição, a escala de tempo viscosa é

$$t_\nu \simeq \frac{R^2}{\nu} = \frac{R^2}{\alpha c_s H} = \frac{1}{\alpha \Omega} \left(\frac{R}{H} \right)^2,$$

que para discos finos ($H/R \sim 0,01$) e $\alpha \sim 0,01$ – $0,1$ dá tempos de semanas a anos em binárias de raios X — compatível com as escalas de variação observadas em surtos. A origem física da turbulência é hoje atribuída à instabilidade magnetorrotacional, que opera em qualquer disco fracamente magnetizado com $d\Omega/dR < 0$ — ou seja, praticamente todos.

Emissão da coluna de acreção e o pulso de raios X

Em estrelas de nêutrons magnetizadas, o campo interrompe o disco onde a pressão magnética iguala a pressão do material em queda. Igualando $B^2/2\mu_0$ à pressão ram ρv_{ff}^2 , com $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v_{\text{ff}}$ e $v_{\text{ff}} = \sqrt{2GM/r}$, obtém-se o **raio de Alfvén**:

$$r_A \propto \left(\frac{\mu^4}{2GM\dot{M}^2} \right)^{1/7},$$

com $\mu = BR^3$ o momento magnético. A dependência é fraca, com expoente $1/7$, o que é conveniente: mesmo estimativas grosseiras de $\dot{M}$ dão r_A com precisão razoável. Dentro de r_A , o material é forçado a seguir as linhas de campo e cai sobre as calotas magnéticas, formando colunas de acreção que emitem raios X. Como as calotas giram com a estrela, o observador vê pulsações — e é assim que se identificam pulsares de raios X.

Se r_A excede o raio de corotação, onde a velocidade kepleriana iguala a de rotação da estrela, o material é expelido em vez de acretado: é o regime de hélice (*propeller*), que explica transições abruptas entre estados brilhantes e apagados em algumas fontes.

Radiação de corpos em campo gravitacional forte

Para um observador distante, a superfície de uma estrela de nêutrons apresenta dois efeitos relativísticos combinados. O desvio gravitacional para o vermelho reduz a temperatura aparente:

$$T_\infty = T_{\text{sup}} \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}},$$

e o raio aparente é maior que o físico, porque a luz é curvada:

$$R_\infty = \frac{R}{\sqrt{1 - r_s/R}}.$$

A luminosidade medida no infinito é então $L_\infty = 4\pi R_\infty^2 \sigma T_\infty^4 = L_{\text{sup}}(1 - r_s/R)$. Para $R = 12$ km e $M = 1,4 M_\odot$, $r_s/R = 0,34$ e a correção é de 34% — não é um detalhe.

A curvatura da luz tem consequência ainda mais interessante: em torno de um objeto com $r_s/R > 2/3$, um observador distante enxerga *mais de metade* da superfície, porque fótons emitidos do lado oposto são desviados na sua direção. É esse efeito que o telescópio NICER modela ao ajustar o perfil de pulso de manchas quentes: a amplitude e a forma do pulso dependem sensivelmente de M/R , e é assim que raio e massa são medidos simultaneamente.

Extração de energia rotacional: o mecanismo de Blandford-Znajek

Buracos negros em rotação carregam energia rotacional extraível. Na métrica de Kerr, a região entre o horizonte e o limite estático — a ergosfera — tem a propriedade de que nenhum observador pode permanecer em repouso: o arrasto do referencial é total. Isso permite processos que extraem energia da rotação.

O mecanismo relevante astrofisicamente usa campos magnéticos ancorados no disco e enfiados pelo horizonte. A potência extraída escala como

$$P_{\text{BZ}} \sim \frac{\kappa}{\mu_0 c} \Phi_{\text{BH}}^2 \Omega_H^2,$$

com Φ_{BH} o fluxo magnético através do horizonte e Ω_H a velocidade angular do horizonte. A dependência quadrática em ambos significa que jatos relativísticos poderosos exigem simultaneamente rotação rápida e campo intenso. Simulações magnetohidrodinâmicas em relatividade geral confirmam que esse processo pode superar a luminosidade de acreção em discos espessos e magneticamente saturados — e é hoje a explicação padrão para os jatos de rádio-galáxias e de surtos de raios gama.

Objetos compactos como laboratórios de física fundamental

Vale organizar o que cada classe de objeto testa e com que precisão:

- **Anãs brancas** testam a equação de estado de matéria degenerada não relativística e a física de cristalização em plasmas fortemente acoplados. Suas sequências de resfriamento fornecem cronômetros independentes para datar populações estelares.
- **Estrelas de nêutrons** testam a matéria acima da densidade de saturação nuclear, regime inacessível a aceleradores. Massa máxima, raio e deformabilidade de maré são as três observáveis que restringem a equação de estado.
- **Pulsares binários** testam a relatividade geral no regime de campo forte. O sistema duplo PSR J0737–3039 fornece cinco testes independentes simultâneos, todos consistentes com a relatividade geral em melhor que 0,05%.
- **Buracos negros** testam a geometria do espaço-tempo: a forma da sombra observada pelo EHT, o espectro de ondas gravitacionais do *ringdown* e as órbitas de estrelas próximas testam, cada um, aspectos diferentes da métrica de Kerr.

Laboratório de dados 5 – pulsares como laboratórios de rotação

Arquivo: 07_pulsares_atnf.csv — 2052 pulsares reais com período P e derivada $\dot{P}$ medidos.
Física. Um pulsar perde energia rotacional e desacelera. Com momento de inércia $I \simeq 10^{38} \text{ kg m}^2$:

$$\dot{E} = 4\pi^2 I \frac{\dot{P}}{P^3}, \quad \tau = \frac{P}{2\dot{P}}, \quad B_{\text{sup}} \simeq 3,2 \times 10^{19} \sqrt{P\dot{P}} \text{ G}.$$

A primeira é a luminosidade de desaceleração, a segunda é a idade característica e a terceira estima o campo magnético na superfície.

Roteiro.

1. Calcule $\dot{E}$, τ e B_{sup} para todos os pulsares. Em Excel, três colunas de fórmula.
2. Construa o **diagrama** P – $\dot{P}$: $\log \dot{P}$ contra $\log P$. Este é o diagrama HR da astronomia de pulsares.
3. Marque as linhas de B constante e de τ constante — elas são retas neste diagrama. Deduza por quê.
4. Identifique os dois agrupamentos: pulsares jovens no alto e pulsares de milissegundo no canto inferior esquerdo. Compare idades características e campos magnéticos dos dois grupos.

Entrega. O diagrama P – $\dot{P}$ anotado, os valores das três grandezas para o pulsar do Caranguejo ($P \simeq 0,0334 \text{ s}$) e uma discussão: por que pulsares de milissegundo têm idade característica de bilhões de anos e campo fraco?

Confira. Para o Caranguejo você deve obter $\dot{E} \sim 4 \times 10^{31} \text{ W}$ e $\tau \sim 1,2 \times 10^3$ anos — a supernova que o gerou foi registrada por astrônomos chineses em 1054, ou seja, há cerca de mil anos.

Capítulo 11 – Ondas gravitacionais e astronomia multimessageira

Até 2015, toda a astronomia era feita com radiação eletromagnética, com duas exceções pontuais: raios cósmicos e um punhado de neutrinos da supernova SN 1987A. Em 14 de setembro de 2015, os detectores LIGO registraram a passagem de uma onda gravitacional produzida pela fusão de dois buracos negros, e a área ganhou um canal de informação que não depende de fótons. Este capítulo trata desse canal e do que acontece quando ele é combinado com os demais.

O que é uma onda gravitacional

Na relatividade geral, massa e energia curvam o espaço-tempo. Quando uma distribuição de massa se reorganiza de forma assimétrica e acelerada, essa curvatura se propaga como uma onda, à velocidade da luz. A onda não é uma perturbação *no* espaço: ela é uma perturbação *do* espaço. O efeito observável é que distâncias entre corpos livres oscilam. Se dois espelhos estão separados por L , a passagem de uma onda de amplitude h produz

$$\frac{\Delta L}{L} \simeq \frac{h}{2}.$$

A grandeza h é adimensional — é uma deformação relativa, uma *strain*. E é minúscula: para as fontes mais intensas já detectadas, $h \sim 10^{-21}$.

Há uma diferença estrutural em relação ao eletromagnetismo que vale registrar. Não existe radiação gravitacional de dipolo, porque a conservação do momento a proíbe; a emissão mais baixa possível é de quadrupolo. Por isso um objeto perfeitamente esférico, mesmo colapsando, não emite ondas gravitacionais: é preciso assimetria. Uma estrela de nêutrons girando com uma montanha de poucos centímetros emite; a mesma estrela perfeitamente lisa, não.

Dedução curta: por que só objetos compactos aparecem na banda do LIGO

Duas massas m em órbita circular de raio R têm frequência orbital dada pela terceira lei de Kepler,

$$f_{\text{orb}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G(2m)}{R^3}}.$$

A onda gravitacional sai com o dobro dessa frequência, $f_{\text{GW}} = 2f_{\text{orb}}$, porque o padrão de quadrupolo se repete a cada meia volta. A frequência máxima ocorre quando os corpos praticamente se tocam, ou seja, quando R se aproxima do próprio tamanho dos objetos.

Para duas estrelas como o Sol, R não pode ser menor que $\sim R_{\odot} = 7 \times 10^8 \text{ m}$, o que dá $f_{\text{GW}} \lesssim 10^{-4} \text{ Hz}$: fora da banda de qualquer detector terrestre. Para dois buracos negros de $30 M_{\odot}$, o raio de Schwarzschild é $\sim 90 \text{ km}$, e tomando $R \simeq 4R_s \simeq 360 \text{ km}$ obtemos f_{GW} de algumas centenas de hertz — exatamente a faixa em que o LIGO é sensível.

A conclusão é forte e vem só de Kepler: *a banda de frequência de um detector seleciona a compacidade das fontes que ele pode ver*. Detectores terrestres veem objetos de massa estelar; detectores espaciais, com braços milhões de vezes maiores, verão binárias supermassivas.

Como se mede uma deformação de 10^{-21}

O LIGO é um interferômetro de Michelson com braços de 4 km. Uma onda com $h = 10^{-21}$ altera o comprimento de cada braço em

$$\Delta L \simeq \frac{h}{2} L \simeq 2 \times 10^{-18} \text{ m},$$

cerca de um milésimo do diâmetro de um próton. Medir isso exige empilhar várias soluções: cavidades ópticas que fazem a luz percorrer os braços centenas de vezes, dezenas de quilowatts de potência óptica circulante para reduzir o ruído de contagem de fótons, espelhos de 40 kg suspensos em pêndulos múltiplos para isolar vibração sísmica, ultra-alto vácuo em tubos de quatro quilômetros e, mais recentemente, luz comprimida (*squeezed light*) para burlar parcialmente o limite quântico.

Um único detector não basta. Como o instrumento responde a deformações e não a direções, é preciso ao menos dois — e de preferência três ou quatro — para (i) rejeitar artefatos locais por coincidência temporal e (ii) triangular a posição da fonte pelo atraso de chegada. Hoje a rede tem os dois LIGO (Estados Unidos), o Virgo (Itália) e o KAGRA (Japão).

Da observação ao modelo

Observável	Grandeza inferida	Hipótese ou calibração necessária
forma de onda $h(t)$, frequência e sua derivada, amplitude, atraso entre detectores	massa de chirp, razão de massas, spins, distância de luminosidade, posição no céu	modelo de forma de onda da relatividade geral, calibração absoluta do detector, rede com três ou mais estações
Pergunta de checagem: A distância obtida veio da amplitude do sinal ou de alguma calibração eletromagnética independente?		

O sinal: um *chirp*

Uma binária compacta perde energia por emissão gravitacional, então a órbita encolhe, a frequência sobe e a amplitude cresce — até a fusão. O resultado é um sinal característico, de frequência e amplitude crescentes, chamado *chirp*. A taxa de subida da frequência não é livre: a relatividade geral prevê, em primeira aproximação,

$$\frac{df}{dt} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{G\mathcal{M}}{c^3} \right)^{5/3} f^{11/3},$$

em que

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}$$

é a **massa de chirp**. Essa é a grandeza mais bem medida em qualquer detecção: basta acompanhar como a frequência varia com o tempo para obtê-la, sem precisar conhecer a distância. Massas individuais, razão de massas e spins entram depois, com incerteza maior.

Há uma consequência elegante: a amplitude do sinal depende de $\mathcal{M}$ e da distância. Como $\mathcal{M}$ sai da frequência, a distância sai da amplitude. Uma binária compacta é uma **sirene padrão** — um análogo gravitacional das velas padrão, com a vantagem de não depender de nenhuma escada de calibração astronômica.

Exemplo resolvido: GW150914 em números

O primeiro evento detectado teve frequência subindo de 35 para 250 Hz em cerca de 0,2 s. A análise devolveu $m_1 \simeq 36 M_\odot$ e $m_2 \simeq 29 M_\odot$, com massa de chirp $\mathcal{M} \simeq 28 M_\odot$, a uma distância de aproximadamente 410 Mpc.

O buraco negro final tem cerca de $62 M_\odot$. Fazendo a conta,

$$36 + 29 - 62 = 3 M_\odot,$$

ou seja, três massas solares foram convertidas em energia gravitacional em fração de segundo. Em joules, $3M_{\odot}c^2 \simeq 5 \times 10^{47}$ J. Distribuída em $\sim 0,1$ s, a potência de pico supera 10^{49} W — mais do que a luz emitida por todas as estrelas do universo observável somadas, no mesmo intervalo. E nada disso foi visto por nenhum telescópio: a energia saiu inteiramente em espaço-tempo deformado.

GW170817: quando os canais se juntam

Em 17 de agosto de 2017, a rede LIGO–Virgo registrou um sinal com massa de chirp compatível com duas estrelas de nêutrons ($\sim 1,2$ e $\sim 1,6 M_{\odot}$), a 40 Mpc. Cerca de 1,7 s depois, os satélites Fermi e INTEGRAL detectaram um surto curto de raios gama. Nas horas seguintes, telescópios ópticos localizaram a contraparte na galáxia NGC 4993, e o objeto foi acompanhado por semanas em todo o espectro. É o evento da Figura 17.

Esse único evento fechou vários problemas de uma vez:

- **Origem dos surtos curtos de raios gama.** A associação temporal e espacial confirmou que pelo menos parte deles vem de fusões de estrelas de nêutrons, hipótese que existia havia décadas sem prova direta.
- **Nucleossíntese de elementos pesados.** O brilho e a evolução da cor da contraparte — a *quilonova* — correspondem ao decaimento radioativo de material rico em nêutrons ejetado na fusão. Boa parte do ouro, da platina e dos lantanídeos do universo é produzida assim, pelo processo *r*.
- **Velocidade das ondas gravitacionais.** Um atraso de 1,7 s após 130 milhões de anos de viagem impõe $|v_{\text{GW}} - c|/c \lesssim 10^{-15}$, o que eliminou classes inteiras de teorias alternativas de gravidade.
- **Uma medida independente de H_0 .** Combinando a distância obtida da amplitude gravitacional com a velocidade de recessão da galáxia hospedeira, obteve-se $H_0 \simeq 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, com barra de erro ainda grande. Esse método não usa Cefeidas nem supernovas: é uma terceira via para a tensão de Hubble discutida no Capítulo 16.

Os outros mensageiros

Neutrinos. Interação tão pouco que escapam de regiões opticamente espessas, o que os torna sondas de interiores. Da SN 1987A chegaram cerca de duas dezenas de neutrinos, detectados algumas horas antes da luz — confirmação direta de que o colapso do núcleo antecede a explosão visível. O detector IceCube, um quilômetro cúbico de gelo antártico instrumentado, identificou fontes de neutrinos de altíssima energia, entre elas o blazar TXS 0506+056 e a galáxia ativa NGC 1068, além de uma emissão difusa do plano da Via Láctea.

Raios cósmicos. Prótons e núcleos acelerados a energias que nenhum acelerador terrestre alcança. O problema é que são carregados: campos magnéticos galácticos embaralham suas trajetórias e a informação de direção se perde, exceto nas energias mais extremas.

Ondas gravitacionais de baixíssima frequência. Conjuntos de pulsares milissegundo funcionam como uma rede de relógios espalhados pela Galáxia. Uma onda gravitacional de período de anos altera minutamente os tempos de chegada dos pulsos, de forma correlacionada entre pares de pulsares segundo um padrão angular específico. Em 2023, colaborações de *pulsar timing* — entre elas o NANOGrav — reportaram evidência desse padrão, interpretado como um fundo estocástico produzido pela população de binárias de buracos negros supermassivos em núcleos de galáxias em fusão.

O espectro gravitacional, banda por banda

Instrumento	Frequência	Fontes esperadas
Pulsar timing arrays	nHz	Binárias de buracos negros supermassivos
LISA (previsto para a década de 2030)	mHz	Fusões supermassivas, binárias galácticas, captura de objetos compactos
LIGO–Virgo–KAGRA	10–10 ³ Hz	Fusões de buracos negros e estrelas de nêutrons de massa estelar
Einstein Telescope, Cosmic Explorer (projetos)	1–10 ⁴ Hz	As mesmas fontes, até desvios para o vermelho muito maiores

Vale notar a analogia com o eletromagnetismo: assim como rádio e raios gama contam histórias diferentes, cada banda gravitacional corresponde a uma classe distinta de objetos, pela razão deduzida acima.

Onde estamos em 2026

Depois de três corridas de observação e de uma quarta iniciada em 2023, o número de candidatos acumulados passou de duas centenas, e detecções deixaram de ser notícia individual para virar estatística: distribuição de massas dos buracos negros estelares, existência de objetos na chamada lacuna de massa, taxas de fusão por volume e por ano. A missão espacial LISA foi adotada pela ESA em 2024, com lançamento previsto para a década de 2030, e detectores terrestres de terceira geração estão em projeto.

Exemplo guiado. Uma binária de duas estrelas de nêutrons de $1,4 M_{\odot}$ tem massa de chirp

$$\mathcal{M} = \frac{(1,4 \times 1,4)^{3/5}}{(2,8)^{1/5}} M_{\odot} \simeq 1,22 M_{\odot},$$

mais de vinte vezes menor que a de GW150914. Como a amplitude do sinal cresce com $\mathcal{M}^{5/3}$, o alcance do detector para esse tipo de fonte é muito menor — daí GW170817 ter sido detectado a 40 Mpc, enquanto fusões de buracos negros são vistas a gigaparsecs. O viés é instrumental, não astrofísico: fusões de estrelas de nêutrons não são raras, elas são fracas.

Perguntas para discussão.

- Por que uma explosão perfeitamente esférica não emite ondas gravitacionais, mesmo liberando enorme energia?
- O que se ganha ao detectar o mesmo evento em ondas gravitacionais e em luz? Dê dois exemplos concretos do caso GW170817.
- Por que a massa de chirp é medida com precisão muito maior que as massas individuais?
- Sirenes padrão são independentes da escada de distâncias cosmológicas. Que vantagem isso traz para a tensão de Hubble?
- Se um detector fosse sensível apenas em 10^{-4} Hz, que tipo de sistema ele veria?

Para praticar. Os dados do LIGO são públicos no *Gravitational Wave Open Science Center*. Baixe a série temporal de GW150914, aplique um filtro passa-faixa entre 35 e 350 Hz e sobreponha os sinais dos detectores de Hanford e Livingston, deslocando um deles em 7 ms (o atraso de propagação entre os sítios). A coincidência das duas curvas é o argumento observacional central da descoberta, e

ele é reproduzível em um notebook de meia página. Depois, estime a massa de chirp acompanhando a variação de frequência ao longo do sinal e compare com o valor publicado.

O que expandir no estudo individual. No Carroll & Ostlie, releia o capítulo de relatividade geral com a pergunta específica: que aproximação permite falar em “onda” num espaço-tempo curvo? A resposta — perturbação linear sobre um fundo plano — é o que torna toda esta discussão tratável, e também o que deixa de valer perto do momento da fusão, onde só simulação numérica resolve.

Da equação de Einstein à onda

Escreva a métrica como um fundo plano mais uma perturbação pequena, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Linearizando as equações de campo de Einstein e escolhendo o calibre transversal sem traço (TT), elas se reduzem a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad \square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

No vácuo, isso é literalmente a equação de onda: perturbações da métrica propagam-se a c . No calibre TT restam apenas duas componentes independentes, as polarizações h_+ e $h_\times$, defasadas de 45° entre si — e não de 90° como no eletromagnetismo, porque a radiação gravitacional é de spin 2.

O efeito físico é o que os detectores medem. Duas massas livres separadas por L ao longo de x sofrem, com a passagem de uma onda h_+ ,

$$\frac{\delta L_x}{L} = \frac{1}{2} h_+, \quad \frac{\delta L_y}{L} = -\frac{1}{2} h_+.$$

Um braço estica enquanto o outro encolhe — e é exatamente por isso que um interferômetro de Michelson, que compara dois braços perpendiculares, é o instrumento natural para essa medida.

A fórmula do quadrupolo

Resolvendo a equação de onda com a fonte, a solução no limite de campo fraco e movimento lento é

$$\bar{h}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}^{\text{TT}}, \quad Q_{ij} = \int \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \right) d^3x,$$

e a potência total emitida é a **fórmula do quadrupolo de Einstein**:

$$P_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle$$

Duas observações estruturais. Primeira: o termo de monopolo é a massa total, conservada, e o de dipolo é o momento de massa, cuja segunda derivada é a derivada do momento linear total — também zero. A radiação gravitacional começa, portanto, no quadrupolo. Segunda: o fator c^5/G tem dimensão de potência e vale $3,6 \times 10^{52} \text{ W}$. Toda potência gravitacional é essa constante multiplicada por um número adimensional menor que 1 — e é por isso que fusões de buracos negros atingem 10^{49} W enquanto qualquer fonte de laboratório é indetectável.

Uma binária circular, em detalhe

Para duas massas m_1 e m_2 em órbita circular de separação a , o tensor de quadrupolo oscila com o dobro da frequência orbital. Calculando as derivadas e substituindo na fórmula acima:

$$P_{\text{GW}} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{(m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2)}{a^5}.$$

A dependência a^{-5} é brutal: reduzir a separação pela metade multiplica a emissão por 32.

A energia orbital é $E = -Gm_1m_2/2a$. Igualando $\dot{E} = -P_{\text{GW}}$:

$$\frac{Gm_1m_2}{2a^2}\dot{a} = -\frac{32}{5}\frac{G^4(m_1m_2)^2(m_1+m_2)}{c^5a^5} \implies \dot{a} = -\frac{64}{5}\frac{G^3m_1m_2(m_1+m_2)}{c^5a^3}.$$

Integrando de a_0 até zero, obtém-se o **tempo de coalescência**:

$$t_{\text{coal}} = \frac{5}{256}\frac{c^5a_0^4}{G^3m_1m_2(m_1+m_2)}$$

Aplique ao par Terra-Sol: $t_{\text{coal}} \sim 10^{23}$ anos, treze ordens de grandeza acima da idade do universo — daí não haver preocupação. Aplique a duas estrelas de nêutrons de $1,4 M_{\odot}$ separadas por 10^6 km: $t_{\text{coal}} \sim 10^7$ anos, e a fusão acontece dentro do tempo de Hubble. O critério que separa binárias que fundem das que não fundem é inteiramente contido nessa fórmula.

Dedução: a massa de chirp e por que ela é a grandeza medida

Use a terceira lei de Kepler para eliminar a em favor da frequência da onda, $f = 2f_{\text{orb}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{G(m_1+m_2)/a^3}$. Substituindo em $\dot{a}$ e convertendo para $\dot{f}$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{96}{5}\pi^{8/3}\left(\frac{GM}{c^3}\right)^{5/3}f^{11/3},$$

em que *toda* a dependência nas massas colapsou em uma única combinação:

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}}.$$

Este é o ponto central. A evolução da frequência — que é o que o detector cronometra com precisão — depende apenas de $\mathcal{M}$. Massas individuais só entram em correções de ordem superior na expansão pós-newtoniana, e por isso são medidas com incerteza muito maior.

Integrando a expressão acima obtém-se a lei do *chirp*:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{256}\frac{1}{t_c - t}\right)^{3/8}\left(\frac{GM}{c^3}\right)^{-5/8},$$

com t_c o instante da fusão. A frequência diverge como $(t_c - t)^{-3/8}$: é essa a curva que se vê nos dados de GW150914.

A amplitude, por sua vez, vale

$$h \sim \frac{4}{d}\left(\frac{GM}{c^2}\right)^{5/3}\left(\frac{\pi f}{c}\right)^{2/3},$$

de modo que, conhecida $\mathcal{M}$ pela frequência, a distância d sai da amplitude. Não há calibrador astronômico envolvido em lugar nenhum — daí o nome sirene padrão, e daí a relevância do método para a tensão de Hubble.

Ordem de grandeza da amplitude

Vale montar a estimativa que mostra por que o problema é tão difícil. Para uma fonte de massa M , tamanho R e velocidade interna v , a amplitude à distância d é aproximadamente

$$h \sim \frac{G}{c^4}\frac{\ddot{Q}}{d} \sim \frac{G}{c^4}\frac{Mv^2}{d} = \frac{r_s}{d}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \times \mathcal{O}(1).$$

Para dois buracos negros de $30 M_{\odot}$ pouco antes da fusão, $r_s \simeq 90 \text{ km}$, $v \sim c/2$, e a $410 \text{ Mpc} = 1,3 \times 10^{25} \text{ m}$:

$$h \sim \frac{9 \times 10^4}{1,3 \times 10^{25}} \times 0,25 \simeq 2 \times 10^{-21}.$$

Ordem de grandeza correta, obtida em uma linha. Repare no fator r_s/d : para uma amplitude detectável é preciso que a fonte seja *relativística* ($v \sim c$) e *compacta* ($R \sim r_s$) simultaneamente. Nenhum sistema estelar comum satisfaz ambas.

O que limita um detector

A curva de sensibilidade de um interferômetro terrestre é fixada por três ruídos, cada um dominante em uma faixa.

Ruído sísmico, abaixo de $\sim 10 \text{ Hz}$: vibrações do solo, atenuadas por pêndulos multiestágio, cuja resposta cai como f^{-2} por estágio acima da frequência de ressonância. É essa parede que impede detecção de binárias em fases iniciais e que motiva detectores espaciais.

Ruído térmico, entre ~ 10 e $\sim 100 \text{ Hz}$: flutuações brownianas nos revestimentos dos espelhos e nas suspensões, ligadas por teorema flutuação-dissipação à dissipação mecânica dos materiais. Reduzi-lo é problema de ciência de materiais, não de óptica.

Ruído de fótons, acima de $\sim 100 \text{ Hz}$: a contagem de fótons na saída flutua como $\sqrt{N}$, e a incerteza de fase resultante é $\delta\phi \sim 1/\sqrt{N}$. Aumentar a potência do laser reduz esse ruído com $\sqrt{P}$, mas aumenta a pressão de radiação sobre os espelhos, que é outra fonte de ruído crescente com $\sqrt{P}$ em baixa frequência. A soma das duas define o **limite quântico padrão**, contornado parcialmente com estados de luz comprimida, que redistribuem a incerteza entre fase e amplitude sem violar a relação de Heisenberg.

As três fases de uma coalescência

O sinal de uma fusão de objetos compactos divide-se em três regimes, cada um exigindo um método teórico distinto.

A **espiralada** é descrita pela expansão pós-newtoniana, uma série em potências de v/c . A fase da onda, que é o que se mede com precisão, escreve-se

$$\Psi(f) = 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128} \left(\frac{GM\pi f}{c^3} \right)^{-5/3} \left[1 + \sum_{n \geq 2} \alpha_n v^n \right],$$

com $v = (\pi GM f / c^3)^{1/3}$. O termo dominante depende só de $\mathcal{M}$, como deduzido antes. Os coeficientes α_n das ordens seguintes introduzem a razão de massas e os spins — e é por isso que essas grandezas são medidas com incerteza crescente: elas entram apenas em correções.

A **fusão** propriamente dita ocorre em campo forte e velocidades relativísticas; nenhuma expansão converge. Só relatividade numérica resolve, e foi o avanço computacional de 2005 nessa área que tornou possível construir os bancos de formas de onda usados na detecção.

O **ringdown** é o relaxamento do buraco negro final, descrito por modos quase normais — oscilações amortecidas cujas frequências e tempos de decaimento dependem *apenas* da massa e do spin finais. Para o modo fundamental,

$$f_{\text{QNM}} \simeq \frac{c^3}{2\pi GM} \left[1,5251 - 1,1568(1 - a_*)^{0,1292} \right],$$

com a_* o spin adimensional. Medir duas ou mais frequências independentes permite verificar se elas são mutuamente consistentes com a mesma (M, a_*) — é a chamada **espectroscopia de buracos negros**, e constitui um teste direto do teorema de ausência de cabelo: um buraco negro de Kerr é completamente descrito por dois números, e qualquer terceira medida discrepante indicaria física além da relatividade geral.

Antena e localização no céu

Um interferômetro não é isotrópico. Sua resposta a uma onda vinda da direção (θ, φ) com polarizações h_+ e $h_\times$ é

$$h(t) = F_+(\theta, \varphi, \psi)h_+(t) + F_\times(\theta, \varphi, \psi)h_\times(t),$$

com os padrões de antena

$$F_+ = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\varphi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\varphi \sin 2\psi,$$

e expressão análoga para $F_\times$. O padrão resultante tem forma de quadrúpolo com quatro lóbulos e quatro direções cegas — um detector isolado é surdo em certas direções, e não tem nenhuma capacidade de localização.

A posição no céu vem da **triangulação por atraso**. Dois detectores separados por D fornecem um anel de posições possíveis, com resolução angular

$$\Delta\theta \simeq \frac{c \sigma_t}{D},$$

com σ_t a incerteza no tempo de chegada, tipicamente algumas centenas de microssegundos para sinais fortes. Para a linha de base LIGO-Hanford–LIGO-Livingston, $D = 3000$ km, e $\Delta\theta$ é de alguns graus na melhor das hipóteses — mas o anel só se fecha em uma região com três ou mais detectores. Foi por isso que GW170817, detectado por três instrumentos, teve área de localização de 28 graus quadrados, pequena o bastante para busca óptica, enquanto eventos vistos por dois detectores têm áreas de centenas de graus quadrados. A astronomia multimensageira depende criticamente do número de estações ativas simultaneamente.

Distância, inclinação e a degenerescência que atrapalha

A amplitude medida combina distância e orientação:

$$h_+ \propto \frac{1 + \cos^2 \iota}{2}, \quad h_\times \propto \cos \iota,$$

com ι o ângulo entre o eixo orbital e a linha de visada. Um sistema distante e visto de frente ($\iota \simeq 0$, amplitude máxima) produz o mesmo sinal que um sistema próximo e visto de perfil. Essa **degenerescência distância-inclinação** é o principal fator que limita a precisão das sirenes padrão.

Quebrá-la exige medir as duas polarizações independentemente — o que exige detectores com orientações diferentes — ou informação externa. Em GW170817, a observação do jato em rádio ao longo de meses forneceu a inclinação por outro caminho, reduzindo a incerteza em H_0 substancialmente. É um exemplo concreto de por que combinar mensageiros vale mais que somar detecções do mesmo tipo.

Conjuntos de pulsares: a curva de Hellings-Downs

Um fundo estocástico de ondas gravitacionais de baixíssima frequência afeta os tempos de chegada dos pulsos de pulsares distribuídos pelo céu. O sinal em um único pulsar é indistinguível de ruído próprio. A assinatura está na *correlação* entre pares.

Para um fundo isotrópico e não polarizado, a correlação esperada entre dois pulsares separados por um ângulo ζ é

$$\Gamma(\zeta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}x \ln x, \quad x = \frac{1 - \cos \zeta}{2},$$

a chamada **curva de Hellings-Downs**. Sua forma é fixada pela natureza de spin 2 da radiação gravitacional: pares próximos correlacionam positivamente, pares separados por $\sim 82^\circ$ anticorrelacionam, e pares antipodais voltam a correlacionar. Nenhuma outra fonte de ruído — erro de relógio, erro de efeméride do Sistema Solar, meio interestelar — produz esse padrão angular específico. É a detecção dessa assinatura, e não do sinal em si, que constitui a evidência reportada pelas colaborações de *timing*.

A amplitude esperada de um fundo produzido por binárias supermassivas em órbita quase circular tem forma espectral prevista:

$$h_c(f) = A \left(\frac{f}{1 \text{ ano}^{-1}} \right)^{-2/3},$$

com o expoente $-2/3$ decorrendo diretamente da lei de evolução da órbita por emissão gravitacional deduzida antes. Desvios desse expoente indicariam que outros processos — interação com estrelas ou gás, ou excentricidade residual — dominam a evolução das binárias, e essa é uma das medidas mais aguardadas do campo.

Laboratório de dados 6 – ver GW150914 com as próprias mãos

Arquivo: 08_gw150914_strain.csv — 2,8 s de tensão medida pelos detectores de Hanford (H1) e Livingston (L1), a 4096 amostras por segundo, em torno do evento de 14 de setembro de 2015.

Física. A deformação relativa produzida pela onda é $h = \Delta L/L$, e a frequência do sinal cresce até a fusão segundo

$$\frac{df}{dt} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{GM}{c^3} \right)^{5/3} f^{11/3}.$$

Roteiro.

1. Faça o gráfico de `strain_H1` contra o tempo. Você não verá nada: o ruído de baixa frequência é mil vezes maior que o sinal. Este passo é o ponto do laboratório.
2. Aplique um filtro passa-alta simples: subtraia de cada ponto a média móvel dos ± 200 pontos vizinhos. No Excel isso é uma coluna com `=B202-MÉDIA(B2:B402)`. Em Python, use `scipy.signal.butter` entre 35 e 350 Hz.
3. Repita para L1 e sobreponha as duas curvas filtradas, deslocando L1 em +6,9 ms e invertendo o sinal (os detectores têm orientação distinta).
4. Meça a frequência instantânea contando intervalos entre cruzamentos por zero nos últimos 0,2 s antes do pico, e verifique que ela sobe.

Entrega. O gráfico dos dois detectores sobrepostos com o *chirp* visível, a amplitude máxima de h e a frequência medida no início e no fim do trecho.

Confira. No dado bruto o desvio padrão é $\sim 2 \times 10^{-19}$; depois do filtro, o pico fica na casa de 2×10^{-21} , sendo cerca de metade disso o sinal e o resto ruído residual. Com $h \simeq 10^{-21}$ em braços de 4 km, $\Delta L \simeq 2 \times 10^{-18}$ m. A frequência deve subir de cerca de 35 para 250 Hz.

Capítulo 12 – Formação planetária e Sistema Solar

Sistemas planetários são produtos secundários, mas fundamentais, da formação estelar. Quando uma nuvem molecular colapsa, a conservação do momento angular favorece a formação de um disco ao redor da protoestrela. Nesse disco, grãos de poeira colidem, aderem, fragmentam e crescem; corpos maiores atraem material gravitacionalmente; gás e gelo participam de processos dependentes da distância à estrela. A arquitetura final de um sistema planetário preserva parte dessa história, mas também carrega marcas de migração, impactos, ressonâncias e perda atmosférica.

O Sistema Solar oferece um laboratório comparativo. Planetas terrestres são rochosos, densos e próximos do Sol. Gigantes gasosos possuem grandes envelopes de hidrogênio e hélio. Urano e Netuno têm maior fração de compostos voláteis pesados. Corpos menores, como asteroides, cometas e objetos transnetunianos, preservam materiais menos processados e ajudam a reconstruir a evolução inicial. A linha de gelo é uma ideia central: além de certa distância, compostos voláteis podem condensar, aumentando a quantidade de material sólido disponível para formar núcleos planetários.

A temperatura de equilíbrio de um planeta depende de luminosidade estelar, distância orbital, albedo e redistribuição de calor. Atmosferas complicam muito o quadro. Vênus é mais quente que Mercúrio na superfície, apesar de estar mais distante do Sol, porque seu efeito estufa é extremo. Marte perdeu grande parte de sua atmosfera e água superficial estável. A Terra mantém condições superficiais específicas por uma combinação de distância, atmosfera, água líquida, campo magnético, tectônica e história química. Habitabilidade, portanto, nunca deve ser reduzida a uma única distância orbital.

Marés são outro processo essencial. Elas surgem porque a força gravitacional varia ao longo do corpo. Marés explicam travamento síncrono da Lua, aquecimento interno em satélites como Io e Europa, evolução orbital e deformações em planetas próximos de suas estrelas. Em exoplanetas de período curto, marés podem circularizar órbitas, sincronizar rotação e afetar atmosferas. Um planeta não é apenas um corpo isolado: ele responde dinamicamente ao ambiente gravitacional.

Leitura física da imagem: Júpiter

Na imagem de Júpiter, as faixas claras e escuras não são decoração: elas indicam circulação atmosférica organizada por rotação rápida, convecção, composição e cisalhamento de ventos. A Grande Mancha Vermelha é uma estrutura vorticial persistente. Para transformar a imagem em física, pergunte: qual é a escala espacial? qual é a escala temporal? que fonte de energia mantém a dinâmica? que medições espectrais separariam nuvens altas, composição e temperatura?

Corpos menores também merecem destaque. Asteroides e meteoritos registram diferenciação, impactos e composição primitiva. Cometas preservam voláteis e desenvolvem coma e caudas quando se aproximam do Sol. Objetos do cinturão de Kuiper e da nuvem de Oort informam sobre a região externa e perturbações dinâmicas. Em outros sistemas, discos de detritos revelam colisões entre planetesimais e possíveis planetas ainda não observados diretamente. Assim, planetas e pequenos corpos formam um sistema integrado.

Bloco Sistemas planetários. A pergunta organizadora deste capítulo é: por que mundos formados no mesmo disco podem ter destinos tão diferentes?

Como estudar este bloco: Compare planetas por pares. A diferença entre Vênus e Terra, ou entre Io e Europa, ensina mais do que uma lista isolada de propriedades.

Planetologia comparada usa os corpos do Sistema Solar como experimentos naturais. Mercúrio testa exposição solar e perda de voláteis; Vênus mostra efeito estufa extremo; Terra combina água



Figura 18: **Júpiter como laboratório planetário.** Bandas atmosféricas e a Grande Mancha Vermelha ilustram dinâmica de fluidos, rotação rápida e meteorologia em gigantes gasosos. Crédito: NASA, ESA e equipe Hubble, via Wikimedia Commons.

líquida, tectônica e biosfera; Marte registra perda atmosférica e água passada. Nos gigantes, a física muda de escala: rotação rápida, convecção profunda, atmosferas espessas, campos magnéticos e luas ativas dominam o cenário.

Tabela 2: **Comparação planetária mínima.** Use tabelas como esta para separar propriedades medidas de interpretações históricas.

Mundo	Observação marcante	Interpretação física	Pergunta aberta
Vênus	superfície muito quente	efeito estufa intenso e atmosfera densa	como a história inicial divergiu da Terra?
Marte	vales e minerais hidratados	água líquida passada e perda atmosférica	por quanto tempo houve ambientes habitáveis?
Europa	superfície gelada fraturada	oceano interno provável por aquecimento de maré	há troca química entre oceano e superfície?
Titã	atmosfera rica em nitrogênio	química orgânica em ambiente frio	que ciclos químicos imitam ciclos hidrológicos?

Da nuvem ao sistema planetário

O Sistema Solar nasceu do colapso de um fragmento de nuvem molecular, e a sequência de eventos deixou marcas que ainda podem ser lidas hoje. A conservação do momento angular impôs um disco (Capítulo 9), e é por isso que os planetas orbitam praticamente no mesmo plano e no mesmo sentido — um fato que qualquer teoria de formação precisa reproduzir, e que já derrubava as hipóteses de captura no século XIX.

Dentro do disco, a temperatura caía com a distância, e isso separou quimicamente o sistema. Perto do Sol, apenas materiais refratários — silicatos e metais — podiam condensar. Além da chamada **linha de gelo**, em torno de 3 unidades astronômicas na nebulosa primitiva, a água congelava, e a densidade de material sólido disponível saltava por um fator de vários. Essa fronteira química explica a divisão mais óbvia do Sistema Solar: planetas rochosos pequenos dentro, gigantes ricos em voláteis fora.

O crescimento seguiu por etapas: grãos de poeira colidem e aderem, formam agregados centimétricos, depois quilométricos — os planetesimais —, que passam a crescer por gravitação mútua. Núcleos que atingiram algo como $10 M_{\oplus}$ antes de o gás do disco se dissipar conseguiram capturar envelopes de hidrogênio e hélio e viraram gigantes gasosos; os que não conseguiram ficaram como planetas terrestres ou como gigantes de gelo. Há um problema conhecido nessa história, a chamada barreira do metro: objetos desse tamanho tendem a espiralar rapidamente para dentro por atrito com o gás, e como o crescimento atravessa essa faixa tão rápido continua sendo assunto de pesquisa ativa.

Migração: as órbitas não ficaram onde nasceram

Durante décadas assumiu-se que os planetas se formaram aproximadamente onde estão. A descoberta dos Júpiteres quentes (Capítulo 13) tornou isso insustentável: nenhum planeta gigante se forma a 0,05 UA de sua estrela, onde não há material sólido nem gás frio suficiente. Ele precisa ter migrado.

Para o próprio Sistema Solar, modelos de evolução dinâmica — o mais conhecido é o chamado modelo de Nice — propõem que Júpiter, Saturno, Urano e Netuno trocaram momento angular com um disco residual de planetesimais e mudaram significativamente de posição, com Urano e Netuno possivelmente invertendo ordem. Essa reorganização espalharia planetesimais em todas as direções, explicando de uma só vez a estrutura do cinturão de asteroides, a captura dos troianos de Júpiter, o povoamento do cinturão de Kuiper e possivelmente um período de bombardeamento intenso registrado nas crateras lunares.

A lição metodológica é forte: a arquitetura atual de um sistema planetário não é um retrato da sua formação, é o resultado de bilhões de anos de dinâmica posterior.

Planetas terrestres: os mesmos ingredientes, destinos diferentes

Mercúrio, Vênus, Terra e Marte formaram-se da mesma região do disco e hoje são radicalmente distintos. As diferenças vêm de poucos parâmetros físicos.

Massa controla quanto calor interno o planeta retém — corpos pequenos esfriam mais rápido, porque a razão superfície-volume é maior — e se ele consegue segurar uma atmosfera contra o escape térmico. Marte perdeu a maior parte da sua; Mercúrio nunca teve.

Distância ao Sol fixa a temperatura de equilíbrio e, com ela, quais voláteis permanecem. Mas apenas isso não explica Vênus: sua temperatura superficial de $\sim 737\text{ K}$ é muito maior do que o balanço radiativo simples prevê, porque uma atmosfera densa de CO_2 produz um efeito estufa desenfreado. Vênus é o exemplo de que atmosfera importa mais que insolação.

Atividade geológica recicla material entre interior e superfície. Na Terra, a tectônica de placas participa de um ciclo de longo prazo do carbono que estabiliza o clima em escalas de centenas de milhões de anos. Marte tem vulcanismo extinto e nenhuma tectônica ativa; Vênus parece ter passado por ressurgimento global.

Campo magnético, gerado por dínamo em núcleo condutor fluido, protege parcialmente a atmosfera do vento solar. A correlação entre perda de campo magnético e perda de atmosfera em Marte é uma das linhas de evidência mais discutidas em ciência planetária.

Gigantes, luas e anéis

Júpiter e Saturno são majoritariamente hidrogênio e hélio, com interiores em que o hidrogênio se torna metálico sob pressões de megabares — é essa camada condutora em rotação rápida que gera campos magnéticos enormes. Urano e Netuno, os gigantes de gelo, têm composição dominada por água, amônia e metano, com campos magnéticos estranhamente desalinhados e não centrados, indicando dínamos em camadas rasas.

As luas mostram que a zona habitável clássica é um conceito estreito. Europa, Ganimedes e Encélado abrigam oceanos de água líquida sob camadas de gelo, mantidos não por luz solar, mas por **aquecimento de maré**: a deformação periódica causada pela órbita excêntrica em torno de um planeta massivo dissipa energia no interior. Encélado ejeta plumas de vapor pelo polo sul, e sondas atravessaram essas plumas medindo composição — amostragem de um oceano subsuperficial sem pousar. Missões dedicadas a esses mundos, como a JUICE e a Europa Clipper, estão a caminho.

Anéis são discos de partículas dentro do limite de Roche, região em que forças de maré impedem a agregação gravitacional. Não são estruturas permanentes: os anéis de Saturno parecem ser jovens em escala astronômica e estão sendo lentamente perdidos para o planeta.

Dedução curta: o limite de Roche

Um satélite de densidade ρ_s mantido apenas pela própria gravidade se desfaz quando a diferença de maré supera sua autogravidade. Igualando as duas contribuições para um corpo de raio r a uma distância d de um planeta de massa M e densidade ρ_p , obtém-se

$$d_{\text{Roche}} \simeq 2,44 R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3}.$$

Para densidades comparáveis, o limite fica em torno de 2,5 raios planetários — exatamente onde estão os anéis principais de Saturno. Dentro dessa distância, material não se agrega em luas; fora dela, agrega. Uma conta de duas linhas separa as duas populações.

Corpos menores: o arquivo do Sistema Solar

Asteroides, cometas e objetos transnetunianos são o material que sobrou — e, por isso, o mais informativo sobre as condições iniciais. Meteoritos primitivos, os condritos carbonáceos, contêm inclusões refratárias cuja datação radiométrica fornece a idade do Sistema Solar: 4,567 bilhões de anos, com precisão de menos de um milhão de anos. Esse número, obtido em laboratório a partir de razões isotópicas, é uma das medidas mais precisas de toda a astrofísica.

A exploração recente mudou de escala. As missões Hayabusa2 e OSIRIS-REx trouxeram amostras de asteroides diretamente à Terra, encontrando compostos orgânicos e minerais hidratados; a missão DART alterou deliberadamente a órbita de um pequeno asteroide, demonstrando defesa planetária; a New Horizons visitou Plutão e depois um objeto do cinturão de Kuiper.

E apareceu uma categoria inteiramente nova: **objetos interestelares**, corpos em órbitas hiperbólicas que atravessam o Sistema Solar vindos de fora. O primeiro, 1I/'Oumuamua, foi detectado em 2017; o segundo, 2I/Borisov, em 2019 e claramente cometário; um terceiro foi identificado em 2025. Como cada detecção depende de o objeto passar perto e de haver um levantamento olhando na hora certa, a taxa observada implica uma densidade enorme desses corpos na Galáxia. O Rubin deve transformar essa amostra de três em dezenas.

Exemplo de aplicação: temperatura de equilíbrio de um planeta

Igualando a potência absorvida à emitida, para um planeta de albedo A à distância d de uma estrela de luminosidade L :

$$(1 - A) \frac{L}{4\pi d^2} \pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eq}}^4 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{eq}} = \left[\frac{(1 - A)L}{16\pi\sigma d^2} \right]^{1/4}.$$

Note que R desaparece: o tamanho do planeta não importa. Para a Terra, com $A = 0,3$, resulta $T_{\text{eq}} \simeq 255 \text{ K}$, ou -18°C — bem abaixo da média real de 288 K . A diferença de 33 K é o efeito estufa natural. Para Vênus, o mesmo cálculo dá $\sim 227 \text{ K}$, contra 737 K medidos: mais de 500 K de discrepância. A fórmula não está errada; ela apenas não inclui atmosfera, e a comparação entre os dois planetas mostra o tamanho do que ela deixa de fora.

Perguntas para discussão.

- Por que a linha de gelo é uma fronteira química com consequências dinâmicas?
- Que evidências indicam que os planetas gigantes migraram?
- Vênus e Terra têm massa parecida. Por que os climas divergiram tanto?

- Um oceano sob gelo em Europa é mantido por qual fonte de energia? Que observação a comprovaria?
- Se apenas três objetos interestelares foram detectados, como se estima a densidade deles na Galáxia?

A dinâmica das marés, além da força diferencial

A força de maré foi obtida no Capítulo 5 por expansão binomial. Vale agora extrair o potencial completo, porque é dele que saem os efeitos seculares.

O potencial gravitacional de uma massa M a distância d , avaliado em um ponto a distância r do centro do corpo perturbado e a um ângulo ψ da linha que une os centros, expande-se em polinômios de Legendre:

$$\Phi = -\frac{GM}{|\vec{d} - \vec{r}|} = -\frac{GM}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos \psi).$$

O termo $n = 0$ é constante e não gera força; o termo $n = 1$ é exatamente cancelado pela aceleração orbital do centro de massa. O primeiro termo fisicamente relevante é o quadrupolar:

$$\Phi_{\text{maré}} = -\frac{GM r^2}{d^3} P_2(\cos \psi) = -\frac{GM r^2}{2d^3} (3 \cos^2 \psi - 1).$$

A dependência d^{-3} reaparece, agora deduzida em vez de estimada. A forma de P_2 explica por que há *duas* marés altas por dia: o potencial tem máximos em $\psi = 0$ e $\psi = \pi$, isto é, nos dois lados opostos do planeta.

A deformação resultante da superfície é

$$\zeta \simeq h_2 \frac{M}{M_p} \left(\frac{R_p}{d}\right)^3 R_p,$$

com h_2 o número de Love, que mede a rigidez do corpo. Para a Terra, com a Lua, isso dá dezenas de centímetros na maré de equilíbrio dos oceanos — valores muito maiores em regiões costeiras decorrem de ressonância de bacias, não da física básica.

Dissipação de maré, sincronização e migração

Se o corpo fosse perfeitamente elástico, a deformação estaria alinhada com o perturbador e não haveria torque. A dissipação interna atrasa a resposta, deslocando o bojo de maré de um ângulo δ . Esse desalinhamento produz torque, com três consequências acopladas:

- **Aquecimento interno**, à taxa proporcional a e^2 e a $(R/d)^5$ — é a fonte de energia do vulcanismo de Io e dos oceanos de Europa e Encélado.
- **Sincronização da rotação**, com escala de tempo $\tau_{\text{sinc}} \propto Q a^6$, em que Q é o fator de qualidade dissipativo. A dependência a^6 é extrema: para um planeta na zona habitável de uma anã M, a 0,05 UA, a sincronização ocorre em milhões de anos; para a Terra, a 1 UA, levaria muito mais que a idade do universo.
- **Migração orbital**. Se o corpo central gira mais rápido que a órbita do satélite, o torque empurra o satélite para fora — é o caso da Lua, que se afasta a 3,8 cm por ano, valor medido por reflexão laser nos retrorrefletores deixados pelas missões Apollo. Se gira mais devagar, o satélite espirala para dentro, como Fobos em torno de Marte.

Balço radiativo e atmosferas: o modelo de camada

A temperatura de equilíbrio foi deduzida antes. Para incluir atmosfera no nível mais simples, considere uma camada isotérmica transparente à radiação visível e opaca ao infravermelho, sobre uma superfície a T_s .

Em equilíbrio, a camada absorve todo o fluxo infravermelho da superfície, σT_s^4 , e reemite metade para cima e metade para baixo, σT_a^4 em cada direção. Balço no topo da atmosfera: $\sigma T_a^4 = F_{\text{abs}} = \sigma T_{\text{eq}}^4$. Balço na superfície: $\sigma T_s^4 = F_{\text{abs}} + \sigma T_a^4 = 2\sigma T_{\text{eq}}^4$. Logo

$$T_s = 2^{1/4} T_{\text{eq}} \simeq 1,19 T_{\text{eq}}$$

Para a Terra, com $T_{\text{eq}} = 254 \text{ K}$, o modelo prevê 302 K contra os 288 K reais — exagera, porque a atmosfera real não é perfeitamente opaca ao infravermelho. Generalizando para N camadas opacas empilhadas, $T_s = (N + 1)^{1/4} T_{\text{eq}}$: o aquecimento cresce com a espessura óptica infravermelha, e é essa dependência que transforma Vênus, com dezenas de camadas efetivas, em um forno a 737 K .

Escape atmosférico

Uma molécula escapa se sua velocidade excede a de escape, $v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM_p/R_p}$. A distribuição de Maxwell-Boltzmann fornece velocidade típica $v_{\text{term}} = \sqrt{2kT/m}$. Define-se o **parâmetro de escape de Jeans**:

$$\lambda_{\text{esc}} = \frac{v_{\text{esc}}^2}{v_{\text{term}}^2} = \frac{GM_p m}{R_p k T}.$$

O fluxo de escape depende exponencialmente desse parâmetro, $\Phi \propto (1 + \lambda_{\text{esc}})e^{-\lambda_{\text{esc}}}$, de modo que a retenção é uma questão de poucas unidades em λ . A regra prática usada em ciência planetária é que um gás é retido por bilhões de anos se $v_{\text{term}} \lesssim v_{\text{esc}}/6$.

A dependência em m explica a composição observada: a Terra retém N_2 ($m = 28$) e O_2 ($m = 32$) mas perdeu quase todo H_2 e He ; a Lua e Mercúrio não retêm praticamente nada; Titã, apesar de pequeno, retém uma atmosfera densa porque é muito frio, e $\lambda_{\text{esc}} \propto 1/T$.

Há ainda mecanismos não térmicos frequentemente dominantes: escape hidrodinâmico impulsionado por aquecimento em ultravioleta extremo, arraste por vento estelar em planetas sem magnetosfera, e ejeção por impactos. Para planetas em torno de anãs M, o segundo mecanismo é provavelmente decisivo, e é justamente ele que o JWST tenta constranger observando os planetas de TRAPPIST-1.

Formação planetária: as escalas do problema

A linha de gelo fica onde a temperatura do disco atinge $\sim 170 \text{ K}$. Para um disco opticamente fino aquecido pela estrela, $T \propto r^{-1/2}$, e a posição escala com $\sqrt{L_\star}$ — de modo que estrelas mais luminosas empurram a linha de gelo para fora. A densidade superficial de sólidos salta por um fator ~ 3 ao cruzá-la, o que favorece a formação de núcleos massivos logo além dela.

A massa de isolamento é a massa que um embrião acumula ao esgotar todos os planetesimais dentro de seu alcance gravitacional. O alcance é dado pelo raio de Hill,

$$R_H = a \left(\frac{m}{3M_\star} \right)^{1/3},$$

e, alimentando-se de uma faixa anelar de largura $\sim 10R_H$ com densidade superficial Σ ,

$$M_{\text{iso}} \simeq \frac{(2\pi a \cdot 10R_H \Sigma)^{3/2}}{(3M_\star)^{1/2}}.$$

Nas regiões internas do disco solar, $M_{\text{iso}} \lesssim 0,1 M_{\oplus}$ — razão pela qual planetas terrestres precisam de uma fase posterior de colisões entre embriões. Além da linha de gelo, com mais sólidos disponíveis, M_{iso} chega a alguns $M_{\oplus}$: o suficiente para capturar envelope gasoso e formar um gigante antes de o disco se dissipar, em poucos milhões de anos.

Migração. Um planeta imerso no gás troca momento angular com o disco por meio de ressonâncias de Lindblad. Para planetas de baixa massa, que não abrem lacuna, o torque líquido é tipicamente negativo e produz **migração de tipo I**, com escala de tempo

$$\tau_{\text{I}} \propto \frac{M_{\star}^2}{m \Sigma a^2} \left(\frac{H}{a} \right)^2 \frac{1}{\Omega},$$

que pode ser inferior a 10^5 anos — rápida demais, e um dos problemas em aberto da área. Planetas suficientemente massivos abrem uma lacuna no disco e passam à **migração de tipo II**, acoplada à evolução viscosa do próprio disco e muito mais lenta. A existência de Júpiteres quentes é a evidência observacional mais direta de que esses processos operam.

Ressonâncias de movimento médio

Quando os períodos orbitais de dois corpos formam razão de inteiros pequenos, $P_1/P_2 = p/q$, os encontros próximos ocorrem sempre nas mesmas posições orbitais e as perturbações se acumulam coerentemente em vez de se cancelarem. O resultado pode ser estabilizador ou destrutivo, dependendo da geometria.

Exemplos dos dois lados: Io, Europa e Ganimedes estão travados em uma ressonância de Laplace 1 : 2 : 4, que mantém suas excentricidades finitas e alimenta o aquecimento de maré — sem ela, as órbitas circularizariam e Io não teria vulcões. Em contraste, as lacunas de Kirkwood no cinturão de asteroides correspondem exatamente às ressonâncias 3 : 1, 5 : 2 e 2 : 1 com Júpiter, onde a acumulação de perturbações expulsa o material. Os sete planetas de TRAPPIST-1 formam uma cadeia ressonante quase perfeita, o que é considerado assinatura de migração convergente no disco: essas configurações não surgem por acaso, elas são capturadas.

Interiores planetários e o fator de momento de inércia

Como saber o que há dentro de um planeta sem perfurá-lo? A resposta vem da forma como ele responde à rotação. O momento de inércia de um corpo esférico é escrito como

$$I = C M R^2,$$

com C um número adimensional que mede a concentração de massa: $C = 0,4$ para densidade uniforme e valores menores para corpos diferenciados, com núcleo denso. Para a Terra, $C = 0,3307$; para Marte, 0,3644; para a Lua, 0,3931. A ordem já conta a história: a Terra é a mais diferenciada das três.

Medir C exige observar a precessão do eixo de rotação ou o campo gravitacional. Este último é expandido em harmônicos esféricos, e o coeficiente quadrupolar J_2 relaciona-se a C pela fórmula de Radau-Darwin,

$$C \simeq \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{1 + \eta}} - 1 \right], \quad \eta \text{ função de } J_2 \text{ e da rotação.}$$

Sondas em órbita medem J_2 pelo efeito sobre suas próprias trajetórias — e assim se determina a estrutura interna de um planeta a partir de rastreamento Doppler de rádio, sem nenhum instrumento dedicado.

Dínamos planetários

Um campo magnético planetário auto-sustentado exige três ingredientes: um fluido eletricamente condutor, rotação e uma fonte de energia que mantenha convecção. A condição para que a geração supere a dissipação ôhmica é expressa pelo número de Reynolds magnético:

$$Rm = \frac{vL}{\eta_m} \gtrsim 40,$$

com η_m a difusividade magnética. A escala do campo resultante é estimada por argumentos de equipartição entre energia magnética e cinética,

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \sim \rho v^2,$$

ou, em modelos mais modernos, por escalamento com o fluxo de calor disponível.

Esse quadro explica a diversidade observada. A Terra tem núcleo de ferro líquido em convecção alimentada pela solidificação do núcleo interno — dínamo ativo. Marte esfriou, o núcleo solidificou ou estratificou, e o dínamo morreu há bilhões de anos, deixando apenas magnetização remanente nas rochas crustais. Vênus gira lentamente demais. Júpiter e Saturno geram campos enormes em hidrogênio metálico. E Urano e Netuno têm campos fortemente inclinados e descentrados, porque o dínamo opera em uma camada fina de água iônica próxima da superfície, e não em um núcleo profundo — previsão que a geometria anômala do campo confirmou.

Circulação atmosférica: os números que a governam

A dinâmica de uma atmosfera é organizada por dois parâmetros adimensionais.

O **número de Rossby** compara inércia e força de Coriolis:

$$Ro = \frac{U}{fL}, \quad f = 2\Omega \sin \varphi.$$

Para $Ro \ll 1$, a rotação domina e os ventos são geostróficos, seguindo isóbaras em vez de cruzá-las — caso da Terra em escalas sinóticas. Para $Ro \gg 1$, a rotação é irrelevante e o fluxo vai direto do quente para o frio.

O **raio de deformação de Rossby**, $L_D = NH/f$, com N a frequência de Brunt-Väisälä, fixa a largura característica das células de circulação. Na Terra, a célula de Hadley se estende apenas até $\sim 30^\circ$ de latitude, e além disso a instabilidade baroclínica assume o transporte. Em Vênus, com rotação lentíssima, f é minúsculo, L_D é comparável ao raio do planeta, e uma única célula de Hadley cobre de polo a polo — razão pela qual a temperatura de Vênus é praticamente uniforme apesar da rotação de 243 dias.

Para exoplanetas travados por maré, a mesma análise prevê um regime distinto: um jato equatorial superrotante, gerado por ondas estacionárias forçadas pelo aquecimento assimétrico permanente. É esse jato que desloca o ponto mais quente do subestelar — deslocamento efetivamente observado nas curvas de fase discutidas no Capítulo 13, e uma das confirmações mais bonitas de que a mesma física de fluidos geofísicos se aplica a mundos que nunca veremos de perto.

Datação radiométrica e a cronologia do Sistema Solar

A idade de 4,567 bilhões de anos não vem da astronomia, e sim de espectrometria de massa em meteoritos. O princípio é simples. Um isótopo pai P decai em um filho F com constante λ :

$$F(t) = F_0 + P_0 (1 - e^{-\lambda t}) = F_0 + P(t) (e^{\lambda t} - 1).$$

Normalizando por um isótopo estável do mesmo elemento filho, F_{est} , a expressão vira uma reta:

$$\frac{F}{F_{\text{est}}} = \frac{F_0}{F_{\text{est}}} + \frac{P}{F_{\text{est}}} (e^{\lambda t} - 1).$$

Medindo várias amostras de uma mesma rocha, cada uma com razão P/F_{est} diferente, obtém-se uma **isócrona**: a inclinação dá a idade e o intercepto dá a composição inicial, sem que ela precise ser conhecida de antemão. É essa elegância — determinar simultaneamente a idade e a condição inicial — que torna o método tão robusto.

Diferentes pares P - F cobrem escalas de tempo distintas: $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$, com meia-vida de 49 bilhões de anos, para eventos antigos; $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$ (4,5 bilhões); e sistemas extintos como $^{26}\text{Al} \rightarrow ^{26}\text{Mg}$ (meia-vida de 0,72 milhão de anos), que já decaiu completamente mas cujo excesso de ^{26}Mg em inclusões refratárias fornece resolução temporal de dezenas de milhares de anos nos primeiros instantes do Sistema Solar. É por isso que a cronologia dos primeiros milhões de anos é conhecida com precisão melhor que a de muitos eventos astrofísicos recentes.

Crateras como relógio

Para superfícies das quais não temos amostras, a densidade de crateras fornece idade relativa: superfícies mais antigas acumularam mais impactos. A distribuição cumulativa de crateras maiores que um diâmetro D segue aproximadamente

$$N(> D) \propto D^{-b}, \quad b \simeq 1,8-3.$$

A calibração absoluta vem das amostras lunares das missões Apollo e Luna: conhecendo a idade radiométrica de terrenos com densidade de crateras medida, constrói-se uma função de calibração. Ela revela que a taxa de impactos foi muito maior antes de $\sim 3,8$ bilhões de anos — o registro que motivou a hipótese de um bombardeamento intenso tardio e, com ela, os modelos de migração planetária discutidos antes.

Transferir essa calibração para Marte ou para os satélites galileanos exige corrigir pela população de impactores e pela velocidade de impacto em cada região do Sistema Solar — e é aí que reside a maior parte da incerteza em idades planetárias absolutas fora da Lua.

Laboratório de dados 7 – temperatura dos planetas e o tamanho do efeito estufa

Arquivo: 09_planetas_sistema_solar.csv — distância, raio, massa, albedo de Bond e temperatura média medida dos oito planetas.

Física. Igualando energia absorvida e emitida, a temperatura de equilíbrio de um corpo sem atmosfera é

$$T_{\text{eq}} = \left[\frac{(1 - A)L_{\odot}}{16\pi\sigma d^2} \right]^{1/4},$$

com $L_{\odot} = 3,828 \times 10^{26} \text{ W}$ e $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$. Note que o raio do planeta se cancela.

Roteiro.

1. Converta a_{UA} para metros e calcule T_{eq} para cada planeta.
2. Monte a coluna $\Delta T = T_{\text{medida}} - T_{\text{eq}}$ e ordene.
3. Calcule também a densidade média, $\rho = 3M/4\pi R^3$, e separe os planetas em dois grupos.
4. Explique cada ΔT grande: em Vênus a causa é atmosférica; em Júpiter, Saturno e Netuno a causa é outra. Qual?

Entrega. A tabela com T_{eq} , T_{medida} , ΔT e ρ , mais um parágrafo explicando os dois mecanismos distintos que produzem $\Delta T > 0$.

Confira. Com o albedo do arquivo ($A = 0,306$), a Terra dá $T_{\text{eq}} = 254 \text{ K}$ contra 288 K medidos: os 34 K de diferença são o efeito estufa natural. Vênus dá 229 K contra 737 K : uma diferença de 508 K . Marte e Mercúrio batem em poucos kelvins, porque quase não têm atmosfera.

Capítulo 13 – Exoplanetas, atmosferas e habitabilidade

A descoberta de exoplanetas mostrou que o Sistema Solar não é um modelo universal. Júpiteres quentes, super-Terras, mini-Netunos e sistemas compactos em ressonância revelaram arquiteturas inesperadas. Os principais métodos de detecção têm vieses. Trânsitos favorecem planetas grandes e próximos, alinhados com nossa linha de visada. Velocidade radial favorece planetas massivos e próximos. Imageamento direto favorece planetas jovens, quentes e afastados. Microlente detecta eventos raros e não repetíveis, mas sensíveis a certas separações. Astrometria mede o balanço no plano do céu e exige precisão extrema.

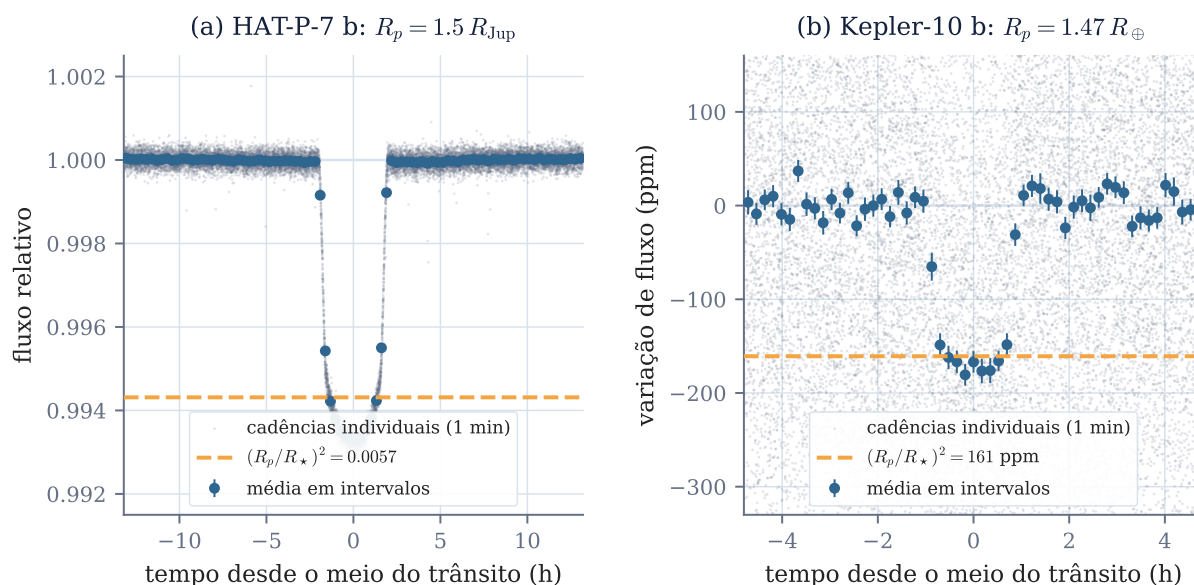


Figura 19: **Curvas de luz de trânsito reais, medidas pelo Kepler.** Fotometria de cadência curta (um ponto por minuto), dobrada no período orbital; os pontos cinza são cadências individuais e os círculos azuis são médias em intervalos de tempo. A linha tracejada não é ajuste algum: é a profundidade prevista por $(R_p/R_\star)^2$ com o raio do planeta e o raio da estrela medidos independentemente. **(a)** HAT-P-7 b, um Júpiter quente diante de uma estrela de $2 R_\odot$: a queda é de 0,57% e o fundo achatado mostra o planeta inteiramente projetado sobre o disco estelar. **(b)** Kepler-10 b, um planeta rochoso de $1,5 R_\oplus$: a queda é de apenas 161 partes por milhão, ou seja, 35 vezes menor, exatamente como a razão dos raios ao quadrado prevê. É a mesma física nas duas escalas, e é por isso que a estatística de exoplanetas nasceu dominada por planetas grandes. Dados: arquivo público do Kepler (MAST); efemérides do NASA Exoplanet Archive.

Quando combinamos trânsito e velocidade radial, podemos obter raio e massa, logo densidade média. A densidade ajuda a distinguir mundos rochosos, ricos em água, gasosos ou com envelopes leves. Ainda assim, degenerescências permanecem: composições diferentes podem produzir massas e raios parecidos. Atmosferas exoplanetárias são investigadas por espectroscopia de trânsito, emissão secundária e curvas de fase, mas os sinais são pequenos. A interpretação exige modelos cuidadosos de nuvens, composição, temperatura, atividade estelar e ruído instrumental.

Exemplo guiado. Em um trânsito, a queda relativa de fluxo é aproximadamente $(R_p/R_\star)^2$. Um planeta do tamanho de Júpiter diante de uma estrela do tamanho do Sol tem $R_p/R_\star \simeq 0,1$, produzindo queda de cerca de 1%. Um planeta do tamanho da Terra tem $R_p/R_\star \simeq 0,009$, produzindo queda de aproximadamente 0,008%. A diferença mostra por que detectar Terras exige fotometria extremamente precisa.

Perguntas para discussão.

- Por que a linha de gelo influencia a formação de gigantes?
- Que vieses observacionais moldam o catálogo conhecido de exoplanetas?
- Por que densidade média não determina composição de forma única?
- Como luas podem ser astrobiologicamente interessantes mesmo fora da zona habitável clássica?

Para praticar. Monte uma tabela com quatro mundos: Terra, Vênus, Europa e um exoplaneta fictício em zona habitável. Compare fonte de energia, atmosfera, água, estabilidade climática e métodos de detecção. A meta é perceber que habitabilidade é um problema multidimensional, não um selo simples aplicado por distância orbital.

Dedução curta: temperatura de equilíbrio

Um planeta a distância a intercepta uma potência $\pi R_p^2 L_\star / (4\pi a^2)$. Se reflete uma fração A dessa luz, absorve $(1 - A)L_\star R_p^2 / (4a^2)$. Emitindo como corpo negro por toda a superfície, perde $4\pi R_p^2 \sigma T_{\text{eq}}^4$. Igualando absorção e emissão:

$$(1 - A) \frac{L_\star}{4\pi a^2} \pi R_p^2 = 4\pi R_p^2 \sigma T_{\text{eq}}^4,$$

$$T_{\text{eq}} = \left[\frac{(1 - A)L_\star}{16\pi \sigma a^2} \right]^{1/4}.$$

O raio do planeta cancela: no modelo mais simples, a temperatura de equilíbrio depende da estrela, da distância, do albedo e da redistribuição de calor. Atmosferas reais podem alterar drasticamente a superfície.

Exoplanetas ampliam o laboratório. Trânsitos medem raios relativos; velocidades radiais medem massas mínimas; juntos fornecem densidade média. Mas densidade não determina composição de forma única. Um planeta de baixa densidade pode ter envelope de hidrogênio; um planeta de densidade intermediária pode misturar rocha, água e gás; nuvens podem mascarar assinaturas atmosféricas. O catálogo de exoplanetas é também um catálogo de vieses observacionais.

Da observação ao modelo

Observável	Grandeza inferida	Hipótese ou calibração necessária
profundidade de trânsito, período, velocidade radial, espectro de trânsito	raio, distância orbital, massa mínima, composição atmosférica	raio estelar, inclinação, atividade estelar, modelo atmosférico

Pergunta de checagem: O método seleciona quais planetas são fáceis de encontrar e quais ficam escondidos?

Exemplo resolvido. Um trânsito com profundidade de 1% implica $(R_p/R_\star)^2 = 0,01$, logo $R_p/R_\star = 0,1$. Se a estrela tem raio solar, o planeta tem raio de ordem joviana. Para uma Terra diante de um Sol, a profundidade é cerca de 0,008%. A diferença explica por que a estatística de exoplanetas nasceu dominada por planetas grandes e próximos.



Figura 20: **Diagrama massa-raio: o que a densidade média entrega e o que ela esconde.** Todos os exoplanetas com massa verdadeira (não $M \sin i$) e raio medidos com precisão melhor que 25% e 10%, respectivamente, junto com os planetas do Sistema Solar. As linhas pontilhadas são apenas geometria, $R = (3M/4\pi\rho)^{1/3}$, sem nenhum modelo de interior. Duas leituras importam. Primeira: massa e raio dão a densidade média, e a densidade já separa mundos rochosos (próximos da linha de 5,5 g/cm³, a da Terra) de mundos com envelope volumoso. Segunda: a dispersão vertical em cada massa mostra que a densidade *não* determina composição — planetas de mesma massa ocupam raios muito diferentes conforme tenham ou não envelope de hidrogênio, e acima de $\sim 100 M_{\oplus}$ o raio praticamente satura, porque a matéria degenerada resiste à compressão. Dados: NASA Exoplanet Archive, tabela `pscomppars`, consultada em julho de 2026.

Dedução curta: densidade média como primeiro diagnóstico

Com massa e raio, a densidade média é

$$\rho = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}.$$

Em forma relativa à Terra,

$$\frac{\rho}{\rho_{\oplus}} = \frac{M/M_{\oplus}}{(R/R_{\oplus})^3}.$$

Um planeta com $M = 8M_{\oplus}$ e $R = 2R_{\oplus}$ tem $\rho \simeq \rho_{\oplus}$. Isso sugere composição rochosa ou rica em materiais densos, mas não resolve a estrutura interna. Já $M = 8M_{\oplus}$ e $R = 3R_{\oplus}$ daria $\rho \simeq 0,30\rho_{\oplus}$, indicando envelope volátil ou gasoso relevante.

Leitura física: espectroscopia de trânsito

Durante um trânsito, parte da luz estelar atravessa a atmosfera do planeta. Moléculas e átomos absorvem em comprimentos de onda específicos, alterando ligeiramente a profundidade do trânsito com λ . A assinatura é pequena porque a atmosfera é uma borda fina comparada ao disco estelar. Por isso a pergunta correta não é apenas “qual molécula aparece?”, mas também: qual é o raio estelar? há nuvens? a estrela tem manchas? o sinal se repete em outros trânsitos?

Espectroscopia de atmosferas na era do JWST

Medir a atmosfera de um planeta a centenas de anos-luz parece impossível, e quase é: a assinatura tem tamanho de partes por milhão. A técnica principal é a **espectroscopia de transmissão**. Durante o trânsito, uma fina coroa da atmosfera do planeta é atravessada pela luz da estrela. Onde a atmosfera absorve, ela fica efetivamente mais opaca, o raio aparente do planeta cresce e o trânsito fica ligeiramente mais profundo. Medindo a profundidade do trânsito em função do comprimento de onda, obtém-se um espectro do terminador do planeta.

A escala do efeito é dada pela altura de escala atmosférica,

$$H = \frac{kT}{\mu g},$$

e o sinal esperado é da ordem de $2R_p H / R_{\star}^2$ em profundidade relativa. Para um Júpiter quente, isso dá algumas centenas de partes por milhão; para um planeta rochoso temperado em torno de uma estrela solar, poucas partes por milhão — o que explica por que os primeiros resultados vieram de planetas grandes, quentes e inflados, e não de gêmeos da Terra.

O JWST mudou o patamar dessa medida. Entre os resultados iniciais está a primeira detecção inequívoca de dióxido de carbono na atmosfera de um exoplaneta, no Júpiter quente WASP-39 b, com significância que não deixa margem a debate, além de medidas de água, dióxido de enxofre — indicando fotoquímica induzida pela estrela — e nuvens. Para planetas menores há resultados em atmosferas de sub-Netunos e limites cada vez mais restritivos para planetas rochosos do sistema TRAPPIST-1, alguns dos quais parecem não ter atmosfera espessa alguma.

Dedução curta: o vale de raios

Um levantamento com precisão suficiente revela que planetas pequenos não se distribuem uniformemente em raio: há um déficit em torno de $1,8 R_{\oplus}$, separando “super-Terras” de “sub-Netunos”. A explicação mais aceita é perda de atmosfera.

Um envelope de hidrogênio de poucos por cento em massa infla enormemente o raio. Se a radiação ultravioleta da estrela — ou o calor interno remanescente da formação — consegue evaporar esse envelope, o planeta encolhe rapidamente até o raio do núcleo rochoso, atravessando a região intermediária em pouco tempo. Poucos planetas são flagrados no meio da transição, e é isso que abre o vale.

O ponto pedagógico: uma característica estatística de um catálogo — um buraco em um histograma — carrega informação sobre um processo físico que nunca foi observado diretamente em nenhum planeta individual.

Vieses de seleção, explicitamente

Todo catálogo de exoplanetas é um retrato do método que o produziu, e não da natureza. Trânsitos exigem alinhamento: a probabilidade geométrica de um planeta transitar é aproximadamente R_*/a , ou seja, 0,5% para um análogo da Terra e 10% para um Júpiter quente. Velocidades radiais favorecem planetas massivos e próximos, porque a amplitude escala com $M_p \sin i / \sqrt{a}$. Imageamento direto favorece planetas jovens, quentes, gigantes e muito afastados. Microlente é sensível a planetas em separações intermediárias, mas os eventos não se repetem.

Isso significa que qualquer afirmação sobre “quantos planetas existem” exige corrigir por completude — estimar quantos planetas de cada tipo seriam detectados se existissem, e dividir. As estatísticas de ocorrência resultantes, do Kepler e do TESS, indicam que planetas pequenos são comuns e que uma fração significativa de estrelas de baixa massa hospeda planetas em zona habitável. A frase “planetas são comuns” não é uma leitura direta do catálogo; é uma conclusão obtida depois de desfazer o viés.

Habitabilidade: o que a zona habitável não diz

A zona habitável é definida como a faixa de distâncias em que água líquida poderia existir na superfície, dadas a luminosidade estelar e hipóteses simples sobre atmosfera e albedo. É um conceito útil como primeiro filtro, e enganoso se levado ao pé da letra. Ele não considera composição atmosférica, efeito estufa, campo magnético, atividade estelar, rotação síncrona em torno de anãs vermelhas, tectônica ou entrega de voláteis. Vênus e Marte estão ambos nas bordas da zona habitável solar e são inóspitos por razões que a definição não captura.

O caso das anãs M ilustra bem a tensão: elas são as estrelas mais numerosas, seus planetas são mais fáceis de detectar e caracterizar, e a zona habitável fica próxima — mas justamente por isso os planetas sofrem travamento de maré e são bombardeados por explosões estelares intensas durante bilhões de anos. Se atmosferas sobrevivem a esse ambiente é uma pergunta observacional em aberto, e é exatamente o que os programas do JWST em TRAPPIST-1 estão tentando responder.

Perguntas para discussão.

- Por que a espectroscopia de transmissão mede o terminador, e não o lado diurno?
- Um planeta rochoso e um sub-Netuno podem ter o mesmo raio? E a mesma densidade média?
- Como corrigir um catálogo de trânsitos pela probabilidade geométrica de alinhamento?
- Que evidência elevaria uma molécula do status de “detecção” ao de “biossinatura”? (Volte a esta pergunta no Capítulo 21.)

A geometria completa de um trânsito

A profundidade $\delta = (R_p/R_\star)^2$ é apenas o começo. A curva de luz contém, na verdade, quatro observáveis independentes, e extrair todos exige a geometria.

Defina o **parâmetro de impacto** b como a distância mínima entre o centro do planeta e o centro do disco estelar, em unidades de $R_\star$:

$$b = \frac{a \cos i}{R_\star},$$

para órbita circular. Trânsitos ocorrem para $b < 1 + R_p/R_\star$; trânsitos completos, com fundo achatado, exigem $b < 1 - R_p/R_\star$. A probabilidade geométrica de que uma órbita aleatoriamente orientada produza trânsito é

$$p_{\text{tr}} = \frac{R_\star + R_p}{a} \simeq \frac{R_\star}{a},$$

que sai de integrar $\cos i$ uniformemente sobre a esfera. Para a Terra vista de fora, $p_{\text{tr}} = R_\odot/1 \text{ UA} = 0,0047$; para um Júpiter quente a 0,05 UA, $p_{\text{tr}} \simeq 0,1$. Toda estatística de ocorrência precisa dividir por esse fator, e é ele que explica por que catálogos de trânsito são dominados por planetas próximos.

A **duração do trânsito** sai da corda percorrida sobre o disco estelar. A meia-corda vale $R_\star \sqrt{(1 + R_p/R_\star)^2 - b^2}$, e a velocidade orbital é $2\pi a/P$. Portanto

$$T_{\text{tot}} = \frac{P}{\pi} \arcsin \left[\frac{R_\star \sqrt{(1 + R_p/R_\star)^2 - b^2}}{a \sin i} \right] \simeq \frac{PR_\star}{\pi a} \sqrt{1 - b^2}$$

Este resultado é mais poderoso do que parece: como a terceira lei liga a a P e à massa estelar, medir T_{tot} , P e δ permite extrair a **densidade média da estrela**:

$$\rho_\star \simeq \frac{3\pi}{GP^2} \left(\frac{a}{R_\star} \right)^3,$$

sem qualquer modelo estelar. É por isso que uma curva de luz de trânsito bem amostrada caracteriza a estrela tanto quanto o planeta.

Escurecimento de bordo

O disco estelar não tem brilho uniforme. Como visto no Capítulo 6, olhar para a borda do disco significa olhar obliquamente, atingindo $\tau = 2/3$ em camadas mais altas e frias. A intensidade em função do ângulo é bem aproximada pela lei quadrática

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u_1(1 - \mu) - u_2(1 - \mu)^2, \quad \mu = \cos \theta = \sqrt{1 - r^2/R_\star^2}.$$

Para o Sol no visível, $u_1 \simeq 0,4$ e $u_2 \simeq 0,25$: a borda tem cerca de 40% do brilho central.

A consequência prática é a que apareceu no laboratório deste capítulo. Um planeta transitando pelo centro do disco bloqueia luz mais brilhante que a média, e a profundidade observada supera $(R_p/R_\star)^2$. Ignorar o efeito superestima o raio planetário em vários por cento; ajustar corretamente exige modelar u_1 e u_2 , que dependem da temperatura da estrela e da banda observada. E há um bônus: o formato do ingresso e do egresso, curvado pelo escurecimento de bordo, carrega informação sobre b — é assim que a inclinação é recuperada de uma curva de luz unidimensional.

Velocidades radiais: a dedução da amplitude

A estrela e o planeta orbitam o centro de massa comum. O semieixo da órbita estelar é $a_\star = a m_p / (m_\star + m_p)$, e sua velocidade orbital projetada na linha de visada tem amplitude

$$K_\star = \frac{2\pi a_\star \sin i}{P\sqrt{1-e^2}}.$$

Eliminando a pela terceira lei, $a^3 = GP^2(m_\star + m_p)/4\pi^2$:

$$K_\star = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{m_p \sin i}{(m_\star + m_p)^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

Vale calibrar a intuição com dois casos. Júpiter faz o Sol oscilar com $K = 12,5 \text{ m s}^{-1}$ em 11,9 anos. A Terra produz $K = 0,09 \text{ m s}^{-1}$ — nove centímetros por segundo, a velocidade de uma caminhada lenta, a ser medida em uma estrela a dezenas de anos-luz. Essa comparação explica sozinha por que a primeira detecção foi um Júpiter quente e por que análogos da Terra ainda não são acessíveis por esse método.

Note também as dependências: $K \propto P^{-1/3}$ favorece planetas próximos, e $K \propto m_p \sin i$ deixa a massa indeterminada até um fator $\sin i$. Combinando velocidade radial com trânsito — que garante $i \simeq 90^\circ$ — obtém-se massa *verdadeira* e raio, e portanto densidade. É essa combinação que produz o diagrama da Figura 20.

A escala de altura e o sinal atmosférico

Uma atmosfera em equilíbrio hidrostático com gravidade g e temperatura T tem perfil de pressão $P = P_0 e^{-z/H}$ com **escala de altura**

$$H = \frac{kT}{\mu m_H g}.$$

Durante o trânsito, a atmosfera adiciona uma coroa opaca de espessura efetiva de algumas escalas de altura, aumentando o raio aparente. A variação de profundidade entre uma banda opaca e uma transparente é

$$\Delta\delta = \frac{(R_p + N_H H)^2 - R_p^2}{R_\star^2} \simeq \frac{2N_H R_p H}{R_\star^2},$$

com $N_H \simeq 5$ a 10 tipicamente. Para WASP-39 b ($R_p \simeq 1,3 R_{\text{Jup}}$, $T \simeq 1100 \text{ K}$, atmosfera de hidrogênio com $\mu \simeq 2,3$, $g \simeq 4 \text{ m s}^{-2}$), $H \simeq 1000 \text{ km}$ e $\Delta\delta \sim 10^{-3}$, ou seja centenas de partes por milhão — perfeitamente acessível ao JWST.

Para uma Terra em torno de uma estrela solar, $H \simeq 8,5 \text{ km}$, $R_p/R_\star \simeq 0,009$, e $\Delta\delta \sim 10^{-6}$: uma parte por milhão. A razão $\Delta\delta \propto H R_p / R_\star^2 \propto T / (\mu g) \cdot R_p / R_\star^2$ mostra por que anãs M são alvos privilegiados: $R_\star$ pequeno entra ao quadrado no denominador.

Métodos alternativos e o que cada um envia

Astrometria. O deslocamento angular da estrela é

$$\theta = \frac{a_\star}{d} = \frac{m_p a}{m_\star d},$$

e cresce com a — ao contrário de velocidade radial e trânsito. Júpiter faz o Sol descrever, visto de 10 pc, uma elipse de $500 \mu\text{as}$. É o único método sensível a planetas frios e distantes de estrelas próximas, e é onde o Gaia deve contribuir mais.

Microlente gravitacional. Uma estrela-lente amplifica o brilho de uma fonte de fundo; um planeta em torno da lente produz uma perturbação curta e assimétrica na curva. A escala relevante é o raio de Einstein, que corresponde a separações de alguns UA para lentes galácticas — o método é sensível justamente à região além da linha de gelo, complementar aos demais. A desvantagem é fundamental: eventos não se repetem, e não há como reobservar o sistema.

Imageamento direto. Exige contraste $\sim 10^{-9}$ no visível para um planeta como a Terra. Detecta apenas planetas jovens, quentes e muito afastados, que ainda irradiam calor de formação. É o método com maior potencial para caracterização espectral e o mais limitado em amostra.

O quadro completo é que *cada método enxerga uma região distinta do plano massa-separação*, e nenhum catálogo isolado representa a população real. Reconstruir a distribuição verdadeira exige combinar métodos e corrigir cada um pela sua função de detecção — procedimento que é, ele próprio, uma das principais fontes de incerteza da área.

Além do trânsito primário

A curva de luz de um sistema com planeta contém três eventos distintos, e cada um mede algo diferente.

O **trânsito primário** ocorre quando o planeta passa à frente da estrela e mede $R_p/R_\star$, além da atmosfera em transmissão.

O **eclipse secundário** ocorre quando o planeta passa *atrás* da estrela, e a queda de brilho corresponde à emissão própria do planeta somada à luz estelar refletida:

$$\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{R_p}{R_\star}\right)^2 \frac{B_\lambda(T_p)}{B_\lambda(T_\star)} + A_g \left(\frac{R_p}{a}\right)^2,$$

com A_g o albedo geométrico. Em comprimentos de onda longos, o primeiro termo domina e mede diretamente a temperatura do lado diurno; no visível, o segundo domina e mede o albedo. Para um Júpiter quente a 1500 K em torno de uma estrela a 6000 K, o contraste no infravermelho médio chega a 10^{-3} — perfeitamente mensurável.

A **curva de fase** é a modulação contínua ao longo da órbita, conforme diferentes frações do hemisfério iluminado ficam visíveis. Sua amplitude mede o contraste dia-noite, e o *deslocamento* do máximo em relação ao eclipse secundário mede o transporte de calor por ventos: se a atmosfera redistribui calor eficientemente, o ponto mais quente é deslocado do subestelar pelo vento equatorial. Foi assim que se mapeou, pela primeira vez, a circulação atmosférica de um planeta fora do Sistema Solar.

Variações de tempo de trânsito

Se um sistema tem mais de um planeta, as perturbações gravitacionais mútuas fazem os trânsitos ocorrerem adiantados ou atrasados em relação a um período estritamente constante. A amplitude dessas **variações de tempo de trânsito** depende da massa do perturbador e é fortemente amplificada perto de ressonâncias de movimento médio.

Para dois planetas próximos de uma ressonância $j : j - 1$, a escala de tempo do superperíodo é

$$P_{\text{TTV}} = \frac{1}{|j/P_2 - (j-1)/P_1|},$$

e a amplitude escala com a massa do perturbador dividida pela massa estelar. O método tem uma vantagem única: mede massas *sem* espectroscopia, apenas com fotometria. Foi assim que as massas

dos sete planetas de TRAPPIST-1 foram determinadas, permitindo calcular densidades e, com elas, restringir composição — em um sistema onde a estrela é fraca demais para velocidades radiais de precisão.

O efeito Rossiter-McLaughlin

Durante o trânsito, o planeta cobre sucessivamente partes da estrela que se aproximam e que se afastam por rotação. Isso distorce as linhas espectrais e produz uma anomalia na velocidade radial medida, com amplitude aproximada

$$\Delta v_{RM} \simeq \left(\frac{R_p}{R_\star} \right)^2 v \sin i_\star \sqrt{1 - b^2},$$

com $v \sin i_\star$ a velocidade de rotação projetada da estrela. A *forma* da anomalia — simétrica ou não — revela o ângulo entre o eixo de rotação estelar e o plano orbital do planeta.

O resultado observacional foi surpreendente: uma fração significativa dos Júpiteres quentes tem órbitas fortemente inclinadas, algumas até retrógradas. Isso descarta migração suave pelo disco como mecanismo único — o disco define um plano, e migração nele preservaria o alinhamento — e favorece cenários de espalhamento planeta-planeta ou de ciclos de Kozai-Lidov induzidos por uma companheira distante. Um único observável geométrico separou duas famílias de teorias de formação.

Ciclos de Kozai-Lidov

Se um planeta em órbita interna tem uma companheira distante e inclinada, existe uma troca secular entre excentricidade e inclinação que conserva a quantidade

$$\sqrt{1 - e^2} \cos i = \text{constante}.$$

Uma órbita inicialmente circular e muito inclinada ($i > 39,2^\circ$) pode, portanto, atingir excentricidade altíssima às custas da inclinação, e vice-versa, em ciclos com período

$$P_{KL} \sim P_{\text{in}} \left(\frac{M_\star}{m_{\text{out}}} \right) \left(\frac{a_{\text{out}}}{a_{\text{in}}} \right)^3 (1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2}.$$

Quando a excentricidade atinge valores extremos, o periastro fica tão próximo da estrela que a dissipação de maré circulariza a órbita em um raio pequeno — produzindo um Júpiter quente com inclinação arbitrária. O mecanismo, originalmente desenvolvido para asteroides perturbados por Júpiter, tornou-se central em dinâmica de exoplanetas e também na formação de binárias compactas que fundem por emissão gravitacional.

Da densidade à composição: o que se pode e o que não se pode concluir

Massa e raio dão densidade média, e daí em diante é necessário um modelo de interior. As curvas de composição usadas na literatura resolvem simultaneamente:

- equilíbrio hidrostático, $dP/dr = -Gm\rho/r^2$;
- conservação de massa, $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$;
- uma equação de estado $\rho(P)$ para cada material, obtida de experimentos de alta pressão e de cálculos de estrutura eletrônica.

São exatamente as mesmas equações da estrutura estelar, com a diferença de que não há geração de energia e a equação de estado é de matéria condensada em vez de plasma.

O resultado é uma família de curvas $R(M)$ para composições puras — ferro, silicato, água, hidrogênio — e a posição de um planeta observado entre elas restringe sua composição. A limitação é fundamental e merece ser dita com clareza: **a solução não é única**. Um planeta com núcleo de ferro grande e envelope de água pode ter exatamente a mesma massa e o mesmo raio de um planeta rochoso puro com uma atmosfera fina de hidrogênio. Duas quantidades medidas não podem determinar três ou mais frações de massa desconhecidas. Quebrar essa degenerescência exige informação espectroscópica da atmosfera — e é por isso que caracterização atmosférica, e não apenas detecção, virou a fronteira da área.

Laboratório de dados 8 – medir o raio de um planeta em outra estrela

Arquivos: 10b_transito_kepler.csv (curvas de luz reais do Kepler, dobradas no período orbital, para HAT-P-7 b e Kepler-10 b) e 10a_exoplanetas_massa_raio.csv (1035 planetas com massa e raio medidos).

Física. A profundidade do trânsito é a razão de áreas, e massa com raio dão densidade:

$$\delta = \frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{R_p}{R_\star} \right)^2, \quad \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Roteiro.

1. Filtre o arquivo pelo planeta HAT-P-7 b. Calcule a média do fluxo fora do trânsito ($|t| > 3$ h) e a média dentro ($|t| < 1$ h). A diferença relativa é δ .
2. Extraia $R_p/R_\star$ e, com $R_\star = 2,00 R_\odot$, obtenha R_p em raios de Júpiter.
3. Repita para Kepler-10 b, com $R_\star = 1,065 R_\odot$. Aqui a queda é de poucas centenas de partes por milhão — você vai precisar de médias em intervalos para enxergá-la.
4. No segundo arquivo, calcule a densidade média de todos os planetas e faça o histograma. Marque a posição da Terra ($5,51 \text{ g/cm}^3$) e de Júpiter ($1,33$).

Entrega. Os dois raios planetários medidos por você, com a comparação aos valores de catálogo, e o histograma de densidades com um comentário sobre o que ele revela de composição.

Confira. Medindo direto no arquivo, HAT-P-7 b dá $\delta \simeq 0,0066$, ou seja $R_p/R_\star \simeq 0,081$ e $R_p \simeq 1,6 R_{\text{Jup}}$ — cerca de 7% acima do valor de catálogo (0,0754). A diferença não é erro de medida: é o **escurecimento de bordo**, que torna o centro do disco estelar mais brilhante que a borda, de modo que o planeta bloqueia mais luz do que a razão de áreas sozinha prevê. Extrair $R_p/R_\star$ com precisão exige ajustar um modelo com esse efeito. Kepler-10 b dá $\delta \simeq 1,7 \times 10^{-4}$ e $R_p \simeq 1,5 R_\oplus$, contra 1,47 de catálogo.

Capítulo 14 – Via Láctea, dinâmica galáctica e matéria escura

Galáxias são sistemas gravitacionais compostos por estrelas, gás, poeira, remanescentes, matéria escura e buracos negros centrais. A Via Láctea contém disco, bojo, halo, braços espirais e populações estelares de idades e composições diferentes. O Sol está no disco, longe do centro, orbitando a Galáxia em centenas de milhões de anos. Nossa posição interna torna o estudo da Via Láctea ao mesmo tempo rico e difícil: temos medidas detalhadas de estrelas próximas, mas a poeira e a perspectiva interna complicam a visão global.

Curvas de rotação galácticas são uma das evidências clássicas de matéria escura. Se a maior parte da massa estivesse concentrada na região luminosa central, esperaríamos velocidades orbitais decrescentes em grandes raios. Em muitas galáxias, as velocidades permanecem aproximadamente constantes. Isso sugere a presença de halos massivos de matéria não luminosa. A interpretação moderna combina curvas de rotação, lentes gravitacionais, dinâmica de aglomerados, CMB e formação de estruturas. Matéria escura não é uma ideia isolada para resolver um único gráfico; ela aparece em várias escalas.

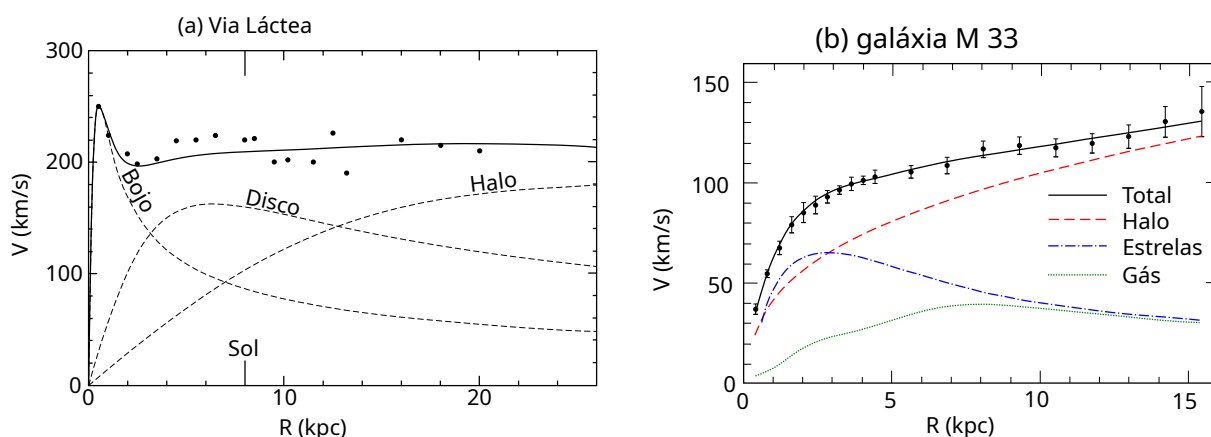


Figura 21: **Curvas de rotação e a massa que não se vê.** Os pontos são velocidades circulares medidas; as linhas tracejadas mostram quanto cada componente de massa contribuiria sozinha, e a linha cheia é a soma. **(a)** Na Via Láctea, bojo e disco explicam bem a curva perto do centro, mas caem rápido depois; para manter a velocidade praticamente constante até $R \simeq 25$ kpc é preciso uma componente adicional que *cresce* com o raio — o halo. O Sol está a cerca de 8 kpc, ou seja, já na região onde o halo importa. **(b)** Em M 33 a decomposição é ainda mais clara: a contribuição das estrelas atinge um máximo em torno de 3 kpc e decresce, a do gás é pequena, e a curva observada continua subindo. O ponto não é que a curva seja “plana”, e sim que ela não cai como cairia se a massa terminasse onde termina a luz. Figuras de Vallastro, via Wikimedia Commons, licença CC BY-SA 4.0; rótulos traduzidos para o português.

A anatomia da Galáxia

A Via Láctea é uma espiral barrada com quatro componentes estruturais que têm cinemática, idade e composição distintas.

O **disco fino** concentra o gás, a poeira e a formação estelar atual; tem espessura de algumas centenas de parsecs, estrelas de todas as idades e metalicidade próxima da solar. O **disco espesso** é mais antigo, mais pobre em metais e cinematicamente mais quente — suas estrelas oscilam mais para fora do plano. O **bojo**, com a barra central, é uma mistura complexa de populações velhas.

E o **halo** estende-se por dezenas de kiloparsecs, contendo aglomerados globulares, estrelas muito pobres em metais e a maior parte da massa, na forma de matéria escura.

O Sol fica a cerca de 8 kpc do centro, dentro do disco, e completa uma volta em torno da Galáxia em aproximadamente 230 milhões de anos. Essa posição interna é uma dificuldade metodológica séria: medimos a estrutura de dentro, com poeira bloqueando a visão do centro no óptico, e precisamos reconstruir a geometria tridimensional a partir de projeções e distâncias individuais.

O que o Gaia mudou

Antes do Gaia, distâncias estelares confiáveis existiam para algumas dezenas de milhares de estrelas próximas. Depois dele, existem para mais de um bilhão, junto com movimentos próprios e, para milhões de estrelas, velocidades radiais. Isso converteu a Galáxia de um objeto essencialmente estático em um sistema dinâmico observável: passou a ser possível medir órbitas individuais, reconstruir o campo gravitacional e recuperar a história de acreção.

Três resultados dão a dimensão da mudança.

Primeiro, a descoberta de que boa parte do halo interno é formada por detritos de uma única fusão maior, ocorrida há cerca de dez bilhões de anos com uma galáxia anã hoje chamada Gaia-Enceladus. Suas estrelas são identificadas não por onde estão, mas por como se movem: elas ocupam uma região distinta no espaço de energia e momento angular.

Segundo, o mapeamento de **correntes estelares** — aglomerados globulares e galáxias satélites sendo dilacerados por maré, deixando rastros finos de estrelas. A forma dessas correntes é sensível ao potencial gravitacional em que se movem, e lacunas nelas podem indicar encontros com concentrações escuras de massa. É hoje uma das sondas mais promissoras da subestrutura do halo de matéria escura.

Terceiro, a constatação de que o disco não está em equilíbrio: há ondulações verticais e padrões em espiral no espaço de fase, provavelmente resquícios da passagem recente da galáxia anã de Sagitário. A Via Láctea é um sistema com história recente, não um objeto relaxado.

O centro galáctico

A região central concentra aglomerados estelares densos, gás molecular, campos magnéticos intensos e, no meio de tudo, Sagitário A*. A prova de sua natureza compacta veio do acompanhamento das órbitas de estrelas individuais ao longo de décadas com óptica adaptativa, discutido no Capítulo 10: a estrela S2 orbita com período de ~ 16 anos e chega a 120 unidades astronômicas do centro, o que confina $4 \times 10^6 M_{\odot}$ dentro de uma região menor que o Sistema Solar. Nenhum aglomerado de objetos escuros conhecido sobreviveria estável nessa densidade, o que deixa buraco negro como única alternativa razoável.

A imagem do EHT em 2022 completou o quadro, mostrando o anel de emissão com o tamanho angular previsto. Vale registrar a diferença de dificuldade em relação a M87: Sagitário A* é muito menor, então o gás ao redor orbita em minutos, e a fonte muda enquanto está sendo observada. A imagem publicada é, por isso, uma média sobre estados variáveis — detalhe metodológico que costuma passar despercebido.

A curva de rotação e o halo escuro

A Figura 21 mostra o argumento central. Medindo velocidades de rotação em função do raio — com gás neutro em 21 cm, masers, gigantes e, hoje, com o próprio Gaia — verifica-se que a velocidade

circular permanece próxima de $220\text{--}240\text{ km s}^{-1}$ muito além da região onde há estrelas suficientes para explicá-la.

Vale ser preciso sobre o que isso implica. Em uma distribuição esférica, $v^2 = GM(< r)/r$, então velocidade constante exige $M(< r) \propto r$: a massa continua crescendo linearmente com o raio, mesmo onde a luz já acabou. A densidade correspondente cai como r^{-2} . Não é que exista “muita massa”; é que a massa está distribuída de um jeito completamente diferente da luz.

Essa conclusão vem acompanhada de várias outras, independentes: dispersão de velocidades em aglomerados de galáxias, lentes gravitacionais, o espectro de potência da radiação cósmica de fundo e a própria formação de estruturas. A força do argumento não está em nenhuma curva de rotação isolada, e sim na convergência de métodos que não compartilham hipóteses.

Exemplo de aplicação: massa da Galáxia dentro da órbita solar

Com $r_{\odot} = 8,0\text{ kpc} = 2,5 \times 10^{20}\text{ m}$ e $v = 230\text{ km s}^{-1}$,

$$M(< r_{\odot}) = \frac{rv^2}{G} = \frac{2,5 \times 10^{20} \times (2,3 \times 10^5)^2}{6,67 \times 10^{-11}} \simeq 2 \times 10^{41}\text{ kg} \simeq 1 \times 10^{11} M_{\odot}.$$

Contando estrelas, gás e poeira, chega-se a algo da ordem de $6 \times 10^{10} M_{\odot}$ nessa região — já falta massa, embora pouco. O déficit cresce dramaticamente ao ir para fora: estimativas da massa total do halo, usando satélites e correntes estelares, ficam em torno de $10^{12} M_{\odot}$, dominadas por matéria escura. A discrepância não aparece de repente, ela se acumula com o raio.

Perguntas para discussão.

- Por que é mais difícil mapear a Via Láctea do que uma galáxia espiral externa?
- O que exatamente uma curva de rotação plana implica sobre $M(< r)$ e sobre $\rho(r)$?
- Como se identifica uma estrela “de fora” da Galáxia sem conhecer sua origem?
- Que hipóteses entram ao converter a órbita de S2 em massa de Sagitário A*?
- Por que correntes estelares são sondas úteis da subestrutura escura?

Para praticar. O arquivo público do Gaia permite consultas diretas. Selecione estrelas em um raio de 100 pc do Sol com paralaxe bem medida, construa o diagrama cor-magnitude absoluto e identifique a sequência principal, a sequência de anãs brancas e o ramo das gigantes. Depois compare com a Figura 14 e explique por que o diagrama de uma amostra limitada por volume tem aparência diferente do diagrama de uma amostra limitada por brilho.

Rotação diferencial e as constantes de Oort

A Galáxia não gira como um corpo rígido: a velocidade angular $\Omega(R) = v_c(R)/R$ varia com o raio. Isso produz um padrão característico nas velocidades das estrelas vizinhas, e a dedução desse padrão é um dos cálculos clássicos da astronomia galáctica.

Considere o Sol a R_0 do centro, com velocidade circular $v_0 = \Omega_0 R_0$, e uma estrela a distância d do Sol, em longitude galáctica ℓ , orbitando a raio R . A velocidade radial relativa é a diferença das projeções:

$$v_r = \Omega R \sin(\ell + \beta) - \Omega_0 R_0 \sin \ell,$$

onde β é o ângulo no centro galáctico. Usando a identidade geométrica $R \sin(\ell + \beta) = R_0 \sin \ell$, isso se reduz exatamente a

$$v_r = (\Omega - \Omega_0) R_0 \sin \ell.$$

Para estrelas próximas, $d \ll R_0$, expanda $\Omega(R)$ em torno de R_0 :

$$\Omega \simeq \Omega_0 + \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_0 (R - R_0), \quad R - R_0 \simeq -d \cos \ell.$$

Substituindo:

$$v_r \simeq A d \sin 2\ell, \quad A \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{R_0} - \frac{dv_c}{dR} \Big|_0 \right)$$

Um cálculo análogo para a componente tangencial fornece

$$v_t \simeq d (A \cos 2\ell + B), \quad B \equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{R_0} + \frac{dv_c}{dR} \Big|_0 \right).$$

As **constantes de Oort** A e B são diretamente mensuráveis — basta ajustar senoides às velocidades de estrelas próximas em função da longitude galáctica — e carregam física:

$$A - B = \frac{v_0}{R_0} = \Omega_0, \quad A + B = -\frac{dv_c}{dR} \Big|_0.$$

A primeira dá a velocidade angular local; a segunda, a inclinação local da curva de rotação. Os valores medidos, $A \simeq 15$ e $B \simeq -12 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, implicam $\Omega_0 \simeq 27 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ e $dv_c/dR \simeq -3 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$: a curva de rotação é quase plana na vizinhança solar. Note o que se conseguiu — medir a estrutura dinâmica da Galáxia inteira usando apenas estrelas a poucas centenas de parsecs, sem sair do lugar.

A assinatura $\sin 2\ell$ é um teste em si: rotação diferencial produz um padrão de dupla periodicidade em longitude, distinto do padrão $\sin \ell$ que um movimento de translação puro produziria.

A frequência epicíclica

Perturbe levemente uma órbita circular de raio R_0 em um potencial axissimétrico. Escrevendo $R = R_0 + \delta R$ e linearizando a equação radial com momento angular conservado, obtém-se um oscilador harmônico:

$$\delta \ddot{R} + \kappa^2 \delta R = 0, \quad \kappa^2 = \left(\frac{d^2 \Phi_{\text{ef}}}{dR^2} \right)_{R_0} = R \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2.$$

A grandeza κ é a **frequência epicíclica**: a taxa com que a partícula oscila radialmente enquanto orbita. Dois casos limite iluminam o significado. Para potencial kepleriano, $\Omega \propto R^{-3/2}$ e $\kappa = \Omega$ exatamente — a oscilação radial se completa em uma volta, e a órbita fecha em uma elipse. Para rotação de corpo rígido, $\kappa = 2\Omega$. Para curva de rotação plana, $\kappa = \sqrt{2}\Omega$.

Como $\kappa \neq \Omega$ em geral, órbitas em galáxias não fecham: elas precessam, descrevendo rosáceas. E a diferença $\Omega - \kappa/2$ define o padrão de precessão que sustenta ondas de densidade espirais — se essa combinação for aproximadamente constante com o raio, um padrão espiral pode girar rigidamente sem se enrolar, e é o que a seção sobre ondas de densidade retoma adiante.

Nas constantes de Oort recém-definidas, $\kappa^2 = -4B(A - B)$, o que permite medir a frequência epicíclica local diretamente das velocidades estelares na vizinhança solar.

Potenciais gravitacionais e curvas de rotação

A relação entre distribuição de massa e velocidade circular vem da equação de Poisson e do equilíbrio centrífugo, $v_c^2(R) = R \partial \Phi / \partial R$. Vale conhecer três casos.

Massa pontual (kepleriano). $\Phi = -GM/r$ dá $v_c = \sqrt{GM/r} \propto r^{-1/2}$. É o que se esperaria além da borda da distribuição luminosa, e é o que *não* se observa.

Esfera isotérmica singular. Se $\rho(r) = \rho_0(r_0/r)^2$, então $M(< r) = 4\pi\rho_0r_0^2r$ cresce linearmente e

$$v_c = \sqrt{4\pi G\rho_0r_0^2} = \text{constante}.$$

Uma curva de rotação plana corresponde *exatamente* a uma densidade $\propto r^{-2}$. Este é o modelo mais simples compatível com as observações, e a massa total diverge linearmente — razão pela qual halos precisam ser truncados em algum raio.

Perfil de Navarro-Frenk-White. Simulações cosmológicas de matéria escura fria convergem para

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2},$$

que se comporta como r^{-1} no centro e r^{-3} fora. A massa integrada é

$$M(< r) = 4\pi\rho_s r_s^3 \left[\ln \left(1 + \frac{r}{r_s} \right) - \frac{r/r_s}{1 + r/r_s} \right].$$

O perfil NFW é a previsão teórica padrão, e a comparação entre ele e as curvas de rotação medidas — especialmente em galáxias anãs, onde ele prevê um cúspide central que muitos dados não mostram — é o chamado problema *cusp-core*, um dos pontos de atrito do modelo Λ CDM em pequenas escalas.

O método do ponto tangente

Como medir a curva de rotação interna da Galáxia sem conhecer distâncias? A técnica clássica usa a linha de 21 cm do hidrogênio neutro. Ao longo de uma linha de visada com longitude $\ell < 90^\circ$, o ponto de maior velocidade radial é aquele em que a órbita é tangente à linha de visada, ocorrendo em

$$R_{\text{tan}} = R_0 \sin \ell.$$

Nesse ponto, toda a velocidade circular está projetada, e

$$v_{r,\text{max}} = v_c(R_{\text{tan}}) - v_0 \sin \ell.$$

Medindo o extremo do perfil de velocidades em cada longitude, obtém-se $v_c(R)$ para todo $R < R_0$ sem qualquer suposição sobre distâncias individuais. É uma das medidas mais robustas da astronomia galáctica, limitada apenas por movimentos não circulares.

Dinâmica estelar: a equação de Jeans

Sistemas estelares não são fluidos — estrelas não colidem — mas obedecem a uma equação análoga à de Euler, obtida tomando momentos da equação de Boltzmann sem colisões. Para um sistema esférico em equilíbrio estacionário:

$$\boxed{\frac{d(\nu\sigma_r^2)}{dr} + \frac{2\beta\nu\sigma_r^2}{r} = -\nu\frac{d\Phi}{dr}}$$

em que ν é a densidade de estrelas, σ_r a dispersão de velocidades radiais e $\beta = 1 - \sigma_t^2/2\sigma_r^2$ o parâmetro de anisotropia. Comparando com o equilíbrio hidrostático estelar, a analogia é exata com a substituição $P \rightarrow \nu\sigma_r^2$: **a dispersão de velocidades faz o papel da pressão.**

Daqui vem a estimativa de massa mais usada em sistemas sem rotação:

$$M(< r) \simeq \frac{\sigma_r^2 r}{G} \left(-\frac{d \ln \nu}{d \ln r} - \frac{d \ln \sigma_r^2}{d \ln r} - 2\beta \right).$$

E daqui vem também a principal limitação do método: β não é diretamente observável quando só se mede velocidade radial. A **degenerescência massa-anisotropia** — um halo mais massivo com órbitas tangenciais produz a mesma dispersão observada que um halo menos massivo com órbitas radiais — é o obstáculo central em medidas de massa de galáxias anãs e de halos estelares.

Correntes de maré como sondas do potencial

Um aglomerado ou galáxia satélite em órbita é dilacerado pela maré galáctica quando seu raio excede o raio de Jacobi,

$$r_J \simeq R \left(\frac{m}{3M_{\text{gal}}} \right)^{1/3},$$

o análogo do raio de Hill planetário. As estrelas liberadas não se dispersam ao acaso: as que escapam pelo ponto de Lagrange interno ficam com energia levemente menor, órbita mais curta e período menor, adiantando-se; as que escapam pelo externo atrasam-se. O resultado é uma corrente fina, essencialmente seguindo a órbita do progenitor.

Isso as torna instrumentos: a forma da corrente no espaço de fase é uma amostra do potencial galáctico ao longo do caminho percorrido, medida sem qualquer hipótese de equilíbrio. E como o progenitor era um sistema pequeno e frio, a corrente é estreita — de modo que perturbações locais, como o encontro com um sub-halo escuro de 10^6 – $10^8 M_\odot$, deixariam lacunas detectáveis. É a técnica mais promissora disponível hoje para testar a existência da subestrutura prevista pelo modelo de matéria escura fria.

Massa do centro galáctico a partir de uma órbita

O acompanhamento da estrela S2 é, no fundo, uma aplicação direta da terceira lei. Com $P = 16,05$ anos e semieixo maior angular de $0,125''$ a uma distância de $8,28 \text{ kpc}$, o semieixo físico é

$$a = 0,125'' \times 8280 \text{ pc} = 1035 \text{ UA}.$$

Aplicando $M = a^3/P^2$ em unidades solares:

$$M = \frac{(1035)^3}{(16,05)^2} \simeq 4,3 \times 10^6 M_\odot.$$

Duas hipóteses entram, e vale explicitá-las. Primeira, a distância ao centro galáctico — e como $M \propto a^3 \propto d^3$, um erro de 5% em d vira 15% em massa; foi por isso que a medida direta de R_0 pela interferometria do GRAVITY teve tanto impacto. Segunda, que a massa está concentrada dentro do periastro da órbita, 120 UA , o que confina a densidade média a mais de $10^{17} M_\odot \text{ pc}^{-3}$ — valor para o qual nenhum aglomerado de objetos escuros conhecidos seria estável por mais que alguns milhões de anos.

Estrutura vertical do disco

Perpendicularmente ao plano, o disco galáctico está em equilíbrio entre gravidade e pressão — a mesma física do equilíbrio hidrostático estelar, com dispersão de velocidades no papel da pressão.

Combinando a equação de Jeans vertical com a de Poisson unidimensional,

$$\frac{d}{dz}(\sigma_z^2 \nu) = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho,$$

e supondo σ_z constante com a altura, obtém-se a solução isotérmica exata:

$$\rho(z) = \rho_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{2z_0}\right), \quad z_0 = \frac{\sigma_z^2}{4\pi G \Sigma},$$

com Σ a densidade superficial. Longe do plano, $\operatorname{sech}^2 \rightarrow 4e^{-z/z_0}$, e o perfil torna-se exponencial — que é a forma usada empiricamente para ajustar discos observados de perfil.

A relação $z_0 \propto \sigma_z^2$ tem consequência direta e mensurável. Populações estelares mais velhas foram aquecidas dinamicamente por encontros com nuvens moleculares e braços espirais, têm σ_z maior e formam um disco mais espesso. Medir a escala de altura em função da idade estelar — possível hoje combinando Gaia com sismologia — fornece a história do aquecimento do disco. O disco espesso, com $z_0 \simeq 900$ pc contra $\simeq 300$ pc do fino, é a manifestação extrema desse processo, ou possivelmente o resto de um evento de acreção antigo.

A densidade local de matéria e o método de Oort

Invertendo a mesma equação, é possível *medir* a densidade total de matéria no plano galáctico usando estrelas como traçadores. A partir da distribuição vertical de posições e velocidades de uma população,

$$\rho_{\text{total}}(0) = -\frac{1}{4\pi G} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_0,$$

com Φ reconstruído do perfil $\nu(z)$ e $\sigma_z(z)$. O resultado moderno é $\rho_0 \simeq 0,1 M_\odot \text{ pc}^{-3}$, do qual cerca de 0,09 é contabilizado por estrelas, anãs brancas, anãs marrons e gás. A diferença — a densidade local de matéria escura, $\rho_{\text{DM}} \simeq 0,01 M_\odot \text{ pc}^{-3} \simeq 0,4 \text{ GeV cm}^{-3}$ — é pequena e difícil de medir, mas é exatamente o número que experimentos de detecção direta precisam para converter limites de seção de choque em restrições físicas. Uma incerteza de 50% nessa densidade propaga-se integralmente para os limites publicados por esses experimentos.

Ondas de densidade e o problema do enrolamento

Se os braços espirais fossem estruturas materiais, a rotação diferencial os destruiria. Para ver o problema quantitativamente: em $R = 10$ kpc, o período orbital é ~ 250 milhões de anos, mas em $R = 5$ kpc é a metade. Em uma idade galáctica, a diferença acumula dezenas de voltas relativas, e qualquer padrão coerente se enrolaria em algo indistinguível de um disco liso.

A solução da teoria de ondas de densidade é que o braço não é um conjunto fixo de estrelas, e sim um padrão de compressão que gira com velocidade angular própria Ω_p , constante com o raio. Estrelas e gás entram e saem do braço, permanecendo mais tempo nele porque ali as órbitas se aglomeram — analogia útil é um engarrafamento, que persiste como estrutura enquanto os carros o atravessam.

Existem raios especiais nesse quadro. No **raio de corrotação**, $\Omega(R) = \Omega_p$, e material e padrão andam juntos. Nas **ressonâncias de Lindblad**, definidas por

$$\Omega_p = \Omega \pm \frac{\kappa}{m},$$

com m o número de braços, o padrão troca momento angular com as órbitas de forma ressonante. Entre a ressonância interna e a externa a onda se propaga; fora delas, é absorvida. É essa estrutura, escrita em termos da frequência epicíclica κ deduzida antes, que determina a extensão radial dos braços espirais observados.

Estabilidade de discos: o critério de Toomre

Um disco fino e rotante é instável a perturbações axissimétricas quando a autogravidade vence simultaneamente a pressão (ou dispersão de velocidades) e a rotação. A análise de estabilidade linear fornece o **critério de Toomre**:

$$Q = \frac{\sigma_R \kappa}{3,36 G \Sigma} < 1 \quad (\text{estrelas}), \quad Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma} < 1 \quad (\text{gás}).$$

A leitura física é limpa: perturbações de pequena escala são estabilizadas pela dispersão de velocidades σ_R , e as de grande escala pela rotação, através de κ . Existe uma escala intermediária mais vulnerável, e Q mede se ela é ou não instável.

Discos de galáxias espirais têm $Q \simeq 1\text{--}2$: marginalmente estáveis. Isso não é coincidência — é autorregulação. Se o disco esfria, Q cai abaixo de 1, formam-se estruturas e estrelas, e o *feedback* resultante reaquece o disco elevando Q . O mesmo critério aplicado a discos protoplanetários indica quando a fragmentação gravitacional direta pode formar planetas gigantes, mecanismo alternativo à acreção de núcleo discutida no Capítulo 12.

Populações estelares e a arqueologia galáctica

Estrelas guardam em sua composição a assinatura do gás de que se formaram, e nunca a apagam (exceto nas camadas superficiais afetadas por dragagem). Isso torna a composição química uma etiqueta de origem.

A ferramenta central é o plano $[\alpha/\text{Fe}]$ contra $[\text{Fe}/\text{H}]$. Elementos α — O, Mg, Si, Ca — são produzidos por supernovas de colapso de núcleo, que ocorrem poucas dezenas de milhões de anos após a formação estelar. O ferro vem majoritariamente de supernovas Ia, que exigem a evolução de uma anã branca em binária e só começam a contribuir após ~ 1 bilhão de anos. Consequentemente:

- Gás enriquecido rapidamente, antes de as SNe Ia entrarem em cena, produz estrelas com $[\alpha/\text{Fe}]$ alto.
- Formação estelar prolongada permite que o ferro se acumule, e $[\alpha/\text{Fe}]$ cai — o chamado “joelho” da distribuição, cuja posição em $[\text{Fe}/\text{H}]$ mede a *eficiência* de formação estelar da população.

Aplicando: o disco espesso e o halo têm $[\alpha/\text{Fe}]$ alto (formação rápida e intensa); o disco fino, baixo (formação prolongada); galáxias satélites anãs mostram o joelho em metalicidades muito menores, indicando formação estelar lenta e ineficiente. É assim que se identifica que um grupo de estrelas do halo veio de fora: elas carregam o padrão químico de uma galáxia pequena, incompatível com formação *in situ*. Combinado com a informação dinâmica do Gaia — energia e momento angular —, esse é o método que isolou os detritos de Gaia-Enceladus.

A curva de rotação externa e a massa total

Além de R_0 , faltam traçadores luminosos, e a curva de rotação precisa ser estendida por outros meios: estrelas gigantes do halo, aglomerados globulares, correntes estelares e galáxias satélites. Cada um exige uma hipótese dinâmica distinta, e a degenerescência massa-anisotropia reaparece.

O método mais robusto usa o **estimador do traçador**, uma forma integrada da equação de Jeans:

$$M(< r_{\text{out}}) = \frac{C}{G} \langle v_r^2 r^\gamma \rangle,$$

com C dependendo da inclinação do perfil do traçador e da anisotropia. As estimativas atuais da massa do halo da Via Láctea convergem para $M_{200} \simeq 1,0\text{--}1,3 \times 10^{12} M_\odot$, com incerteza dominada

não pela estatística — há milhares de traçadores — mas por sistemáticas: a Grande Nuvem de Magalhães, com $\sim 10^{11} M_{\odot}$, desloca o centro de massa da Galáxia e introduz movimentos não equilibrados que enviesam qualquer estimador que suponha estado estacionário. É um lembrete útil de que, em dinâmica galáctica, aumentar a amostra raramente resolve o problema dominante.

Laboratório de dados 9 – pesar uma galáxia e encontrar o que falta

Arquivo: 11_curvas_rotacao_sparc.csv — curvas de rotação medidas de 176 galáxias, com a velocidade observada e as contribuições calculadas do gás, do disco estelar e do bojo.

Física. Para órbitas circulares, e somando componentes em quadratura:

$$M(< r) = \frac{v^2 r}{G}, \quad V_{\text{bárions}} = \sqrt{V_{\text{gás}}^2 + V_{\text{disco}}^2 + V_{\text{bojo}}^2}.$$

Roteiro.

1. Escolha uma galáxia com muitos pontos (por exemplo NGC 3198 ou NGC 2403). Filtre as linhas correspondentes.
2. Faça o gráfico de V_{obs} contra o raio, com barras de erro, e sobreponha $V_{\text{bárions}}$.
3. Calcule $M(< r)$ a partir de V_{obs} e, separadamente, a partir de $V_{\text{bárions}}$. Use r em metros ($1 \text{ kpc} = 3,086 \times 10^{19} \text{ m}$) e v em m/s; divida por $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$.
4. Monte a razão $M_{\text{total}}/M_{\text{bárions}}$ em função do raio. Ela cresce, cai ou fica constante?
5. Repita para uma galáxia anã e para uma espiral massiva. A discrepância é igual nas duas?

Entrega. As duas curvas sobrepostas, o gráfico da razão de massas contra o raio e uma resposta: em que raio a matéria não luminosa passa a dominar?

Confira. Para NGC 3198, V_{obs} fica próximo de 150 km s^{-1} até 30 kpc , enquanto a previsão bariônica cai. Em $r = 30 \text{ kpc}$, $M(< r) \simeq 1,6 \times 10^{11} M_{\odot}$.

Capítulo 15 – Galáxias, interações e núcleos ativos

Galáxias são classificadas morfologicamente como espirais, elípticas, lenticulares e irregulares, mas essa classificação é apenas uma entrada para a física. Espirais têm discos, gás frio e formação estelar ativa. Elípticas costumam ter populações mais velhas e menos gás frio, embora haja exceções. Interações e fusões transformam morfologias, disparam surtos de formação estelar, alimentam núcleos ativos e redistribuem momento angular. A aparência de uma galáxia é resultado de massa, ambiente, história de acreção, gás disponível e feedback.



Figura 22: **Galáxia espiral M51.** A estrutura espiral e a interação com a companheira tornam M51 um bom exemplo visual de morfologia, formação estelar e efeitos gravitacionais. Crédito: NASA, ESA, Hubble Heritage Team e colaboradores, via Wikimedia Commons.

Formação estelar em galáxias depende de gás frio e denso. Braços espirais não são necessariamente

conjuntos fixos de estrelas, mas padrões dinâmicos por onde gás pode ser comprimido. Regiões HII, nebulosas moleculares e estrelas jovens traçam locais recentes de formação. Já populações antigas informam a história acumulada. A metalicidade, isto é, a abundância de elementos mais pesados que hélio, funciona como registro químico: gerações anteriores de estrelas enriquecem o meio interestelar, alterando a composição das gerações seguintes.

A escada de distâncias extragalácticas combina métodos calibrados em sequência. Paralaxe calibra estrelas próximas; Cefeidas calibram distâncias em galáxias próximas; supernovas Ia alcançam distâncias maiores; redshift entra em escalas cosmológicas. Cada degrau carrega incertezas próprias. A robustez vem da sobreposição: métodos diferentes precisam concordar onde seus domínios se cruzam. A lei de Hubble-Lemaître, $v = H_0 d$, emerge ao observar que galáxias distantes apresentam redshift proporcional à distância, interpretado como expansão cósmica.

Em grandes escalas, galáxias não se distribuem aleatoriamente. Elas formam grupos, aglomerados, filamentos, paredes e vazios. Essa teia cósmica resulta do crescimento gravitacional de pequenas flutuações iniciais. Simulações cosmológicas mostram como matéria escura estrutura potenciais gravitacionais nos quais gás cai, esfria e forma galáxias. Feedback de supernovas e núcleos ativos regula o processo, impedindo que toda matéria bariônica vire estrela de maneira simples. A formação de galáxias é um problema de múltiplas escalas: do parsec de regiões de formação estelar ao megaparsec de ambientes cósmicos.

Núcleos ativos de galáxias mostram que buracos negros supermassivos podem liberar enorme energia por acreção. O material que cai forma discos quentes, jatos relativísticos e regiões emissoras compactas. Quasares são AGNs muito luminosos, visíveis a grandes distâncias, e funcionam como sondas do universo jovem e do meio intergaláctico. O modelo unificado de AGN usa orientação, obscurecimento, disco, toro e jatos para explicar classes observacionais diferentes. Ainda assim, evolução temporal, ambiente e taxa de acreção também importam.

Exemplo guiado. Se uma galáxia tem velocidade de rotação aproximadamente constante v em raio r , a massa interna inferida por órbita circular é $M(< r) \simeq v^2 r / G$. Se v não diminui quando r cresce, a massa interna continua aumentando com o raio. Essa é a essência da evidência dinâmica para halos extensos: a luz pode cair, mas a massa gravitacional inferida continua relevante.

Perguntas para discussão.

- Por que a Via Láctea é difícil de mapear apesar de estarmos dentro dela?
- Como curvas de rotação apontam para massa não luminosa?
- Por que morfologia galáctica não é uma classificação puramente visual?
- Que papel o ambiente desempenha na evolução de galáxias?

Para praticar. Use uma curva de rotação simplificada com valores de v em diferentes raios. Calcule massas internas proporcionais a $v^2 r$ e compare com um perfil luminoso hipotético. A conclusão importante é que a massa dinâmica pode crescer além da região onde a luz domina. A partir daí, registre hipóteses, incertezas e evidências independentes de matéria escura.

Dedução curta: curva de rotação e massa interna

Para uma órbita circular em um potencial aproximadamente esférico, a aceleração centrípeta é v^2/r e a aceleração gravitacional é $GM(< r)/r^2$. Igualando:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM(< r)}{r^2} \Rightarrow M(< r) = \frac{v^2 r}{G}.$$

Se a velocidade permanece quase constante em grandes raios, então $M(< r) \propto r$. Ou seja, a massa dinâmica continua crescendo onde a luz visível já pode ter caído bastante. Essa é a

leitura essencial da curva plana.

Exemplo de aplicação: massa dinâmica de uma galáxia

Para $v = 200 \text{ km s}^{-1}$ em $r = 10 \text{ kpc}$,

$$M(< r) \simeq \frac{(2 \times 10^5 \text{ m s}^{-1})^2 (3,1 \times 10^{20} \text{ m})}{6,67 \times 10^{-11}} \simeq 1,9 \times 10^{41} \text{ kg},$$

ou cerca de $10^{11} M_{\odot}$. Se em 20 kpc a velocidade ainda for parecida, a massa interna dobra aproximadamente. Essa conta simples já mostra por que a dinâmica exige mais massa do que a luz sugere.

O universo jovem visto pelo JWST

Observar galáxias distantes é observar o passado, e a barreira sempre foi o desvio para o vermelho: em $z = 10$, a luz ultravioleta de estrelas jovens chega em $1\text{--}3 \mu\text{m}$, onde o Hubble mal alcança e a atmosfera terrestre atrapalha. Foi para isso que o JWST foi construído, e o resultado veio rápido.

Hoje há galáxias confirmadas espectroscopicamente em $z > 13$, quando o universo tinha menos de 300 milhões de anos — uma fração de 2% da idade atual. A confirmação espectroscópica importa: candidatos selecionados apenas por cor podem ser impostores, tipicamente galáxias poeirentas em desvio para o vermelho moderado, cuja distribuição de energia imita a de uma galáxia primordial. Vários candidatos anunciados nos primeiros meses caíram justamente nesse teste.

O que se aprendeu tem duas partes. Primeiro, galáxias se formam mais cedo e brilham mais do que a maioria dos modelos previa, o que exige formação estelar mais eficiente, menos poeira ou função de massa inicial diferente nas primeiras épocas. Segundo, apareceu uma população nova, os *little red dots* — objetos compactos e vermelhos, abundantes em $z \sim 5\text{--}8$, cuja natureza (estrelas muito densas, núcleos ativos envoltos em gás, ou uma mistura) ainda está sendo debatida. Descobrir uma classe de objetos que não estava em nenhuma previsão é o tipo de resultado que justifica construir telescópios novos.

Buracos negros e galáxias crescem juntos

Praticamente toda galáxia massiva tem um buraco negro supermassivo no centro, e a massa desse buraco negro correlaciona-se fortemente com propriedades da galáxia hospedeira — em particular com a dispersão de velocidades do bojo, na chamada relação $M_{\text{BH}}\text{--}\sigma$. A correlação é notável porque as escalas são absurdamente diferentes: a esfera de influência gravitacional do buraco negro é milhares de vezes menor que a galáxia. Não há razão *a priori* para que o centro saiba o que o resto está fazendo.

A explicação padrão é **feedback**: quando o buraco negro acreta, libera energia suficiente para aquecer e expelir gás da região central, cortando o próprio suprimento e também a formação estelar da galáxia. O sistema se auto-regula, e a relação observada seria a assinatura desse equilíbrio. Modelos de formação de galáxias praticamente não conseguem reproduzir a população observada sem incluir algum mecanismo desse tipo — sem feedback, as simulações produzem galáxias grandes demais e com formação estelar em excesso.

Núcleos ativos: uma família, vários ângulos

Quasares, blazares, galáxias Seyfert e rádio-galáxias foram catalogados como classes separadas antes de se entender que grande parte da diversidade é geométrica. No modelo unificado, todos têm o mesmo motor central — disco de acreção em torno de um buraco negro supermassivo — e as diferenças vêm da orientação em relação a nós, da presença ou não de um toro de poeira obscurecendo a região central e da existência de jatos relativísticos.

Se olhamos de frente para um jato, o efeito de *beaming* relativístico amplifica enormemente o brilho e comprime as escalas de tempo observadas: é um blazar, com variabilidade de horas e emissão até em raios gama de altíssima energia. Se o toro fica na linha de visada, vemos linhas estreitas apenas, porque a região de linhas largas está escondida. Testar esse modelo exige, entre outras coisas, espectropolarimetria — luz espalhada por elétrons acima do toro revela a região oculta por reflexão.

Lentes gravitacionais como instrumento

Massa curva o espaço e desvia luz. Quando um aglomerado de galáxias fica alinhado com uma fonte distante, o resultado são arcos e imagens múltiplas, e o aglomerado funciona como uma lente natural que amplifica objetos de outro modo inacessíveis. Boa parte das galáxias mais distantes conhecidas foi encontrada atrás de aglomerados, com ampliações de fatores de dez ou mais.

A técnica tem duas leituras. Do lado da fonte, é um telescópio gratuito. Do lado da lente, a distorção mede a distribuição de massa total do aglomerado, incluindo a escura, sem qualquer hipótese sobre equilíbrio dinâmico — o que a torna uma das evidências mais limpas de matéria escura. Em regime fraco, a distorção estatística das formas de milhões de galáxias de fundo mapeia a distribuição de massa em grande escala, e é justamente esse o método principal dos levantamentos Euclid e Rubin.

Exemplo de aplicação: por que quasares são compactos

Um quasar pode variar significativamente em brilho em uma escala de dias. Pela régua causal, a região emissora tem tamanho máximo

$$R \lesssim c \Delta t = 3 \times 10^8 \times 86400 \simeq 2,6 \times 10^{13} \text{ m},$$

cerca de 170 unidades astronômicas. Ou seja, uma fonte mais luminosa que uma galáxia inteira cabe dentro de algo comparável ao Sistema Solar. Nenhuma população de estrelas produz isso; acreção sobre um objeto compacto, sim. Esse argumento — feito nos anos 1960, muito antes de qualquer imagem — é o que estabeleceu buracos negros supermassivos como explicação necessária.

Perfis de brilho superficial

A estrutura de uma galáxia é quantificada pelo perfil de brilho superficial $I(R)$. Duas formas empíricas dominam.

Discos seguem um perfil exponencial,

$$I(R) = I_0 e^{-R/h},$$

com h a escala de comprimento. A luminosidade total é obtida integrando em anéis:

$$L = \int_0^\infty 2\pi R I(R) dR = 2\pi I_0 h^2.$$

Esferoides seguem a lei de de Vaucouleurs,

$$I(R) = I_e \exp \left\{ -7,67 \left[\left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right] \right\},$$

em que R_e é o raio efetivo, que contém metade da luz — o coeficiente 7,67 é justamente o valor que impõe essa condição. Ambas são casos particulares do perfil de Sérsic, $I \propto \exp[-b_n(R/R_e)^{1/n}]$, com $n = 1$ para discos e $n = 4$ para elípticas clássicas. O índice n tornou-se um parâmetro morfológico quantitativo, substituindo a classificação visual: galáxias com $n > 2,5$ são dominadas por esferoide, com $n < 1,5$ por disco.

Um detalhe técnico importante: brilho superficial é independente da distância em um universo estático, porque fluxo e ângulo sólido caem ambos com d^{-2} (Capítulo 6). Em um universo em expansão, porém, existe o **dimming de Tolman**, $I \propto (1+z)^{-4}$: dois fatores da perda de energia e do estiramento temporal dos fótons, e dois da geometria. É um efeito enorme em alto z — em $z = 2$ o brilho superficial cai por um fator 81 — e é a principal razão pela qual galáxias distantes só são detectáveis com telescópios como o JWST.

Relações de escala deduzidas do virial

Faber-Jackson. Para uma elíptica em equilíbrio virial, $\sigma^2 \sim GM/R$. Se a razão massa-luminosidade M/L e o brilho superficial médio $I \sim L/R^2$ forem aproximadamente universais, então $R \propto L^{1/2}$ e

$$\sigma^2 \propto \frac{M}{R} \propto \frac{L}{L^{1/2}} = L^{1/2} \implies L \propto \sigma^4.$$

A relação observada é $L \propto \sigma^{3,5-4,5}$ — e o desvio em relação ao expoente 4 mede exatamente o quanto M/L e I variam sistematicamente com a massa.

Tully-Fisher. Para espirais, o mesmo argumento com a velocidade circular no lugar da dispersão dá $L \propto v_c^4$. A versão bariônica, que substitui luminosidade por massa estelar mais gás, é notavelmente estreita: $M_{\text{bar}} \propto v_c^4$ com dispersão pequena ao longo de cinco ordens de grandeza em massa. Essa estreiteza é um dos fatos observacionais mais difíceis de explicar em modelos de formação de galáxias com matéria escura, e é o principal argumento empírico invocado por propostas alternativas de dinâmica.

Plano fundamental. Elípticas não formam uma sequência unidimensional, e sim um plano no espaço ($\log R_e, \log \sigma, \log I_e$):

$$R_e \propto \sigma^{1,24} I_e^{-0,82}.$$

O virial puro preveria $R_e \propto \sigma^2 I_e^{-1}$; a diferença entre os expoentes previstos e observados — a chamada inclinação do plano fundamental — quantifica a variação sistemática de M/L com a massa da galáxia, e é usada como indicador de distância.

Núcleos ativos: a física do motor

A luminosidade de acreção é $L = \eta \dot{M} c^2$, com $\eta \simeq 0,1$ para discos em torno de buracos negros. Impondo que L não exceda o limite de Eddington obtém-se a taxa máxima de crescimento:

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{L_{\text{Edd}}}{\eta c^2} = \frac{4\pi G m_p}{\eta \sigma_{Tc}} M.$$

Como $\dot{M} \propto M$, o crescimento é exponencial:

$$M(t) = M_0 e^{t/\tau}, \quad \tau = \frac{\eta \sigma_{Tc}}{4\pi G m_p} \simeq 4,5 \times 10^7 \text{ anos } (\eta = 0,1).$$

Este é o **tempo de Salpeter**. Ele quantifica o problema dos quasares precoces mencionado no Capítulo 21: crescer de uma semente estelar de $100 M_{\odot}$ até $10^9 M_{\odot}$ exige $\ln(10^7) \simeq 16$ tempos de e-folding, ou seja $\sim 7 \times 10^8$ anos de acreção contínua no limite de Eddington — praticamente todo o tempo disponível, sem margem para interrupções. Daí a necessidade de sementes pesadas ou de fases super-Eddington.

A escala física da região emissora sai da variabilidade, e a massa do buraco negro pode ser obtida por **mapeamento de reverberação**: mede-se o atraso τ_{rev} entre variações do contínuo e a resposta das linhas largas, o que dá o raio da região, $R = c\tau_{\text{rev}}$; combinando com a largura da linha, que fornece a velocidade,

$$M_{\text{BH}} = f \frac{R \Delta v^2}{G},$$

com f um fator geométrico de ordem unitária. É a única técnica capaz de pesar buracos negros em galáxias distantes demais para resolver a esfera de influência.

Lentes gravitacionais, do ângulo de deflexão ao raio de Einstein

Um raio de luz passando a distância b de uma massa M sofre deflexão

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 b}.$$

O fator 4 merece comentário: um cálculo newtoniano ingênuo, tratando o fóton como partícula com velocidade c , dá $2GM/c^2 b$. A relatividade geral dobra o resultado porque, além da curvatura temporal (que o cálculo newtoniano captura), há curvatura espacial contribuindo igualmente. A medição desse fator durante o eclipse de 1919 — em Sobral, no Ceará, e na ilha de Príncipe — foi o primeiro teste decisivo da teoria, e distinguir 2 de 4 era literalmente o objetivo da expedição.

Para uma fonte, uma lente e um observador alinhados, a geometria do triângulo formado fornece a equação da lente:

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\alpha}(\theta),$$

com β a posição verdadeira da fonte, θ a observada, e D_S , D_L , D_{LS} as distâncias de diâmetro angular. Para alinhamento perfeito, $\beta = 0$, e substituindo $\hat{\alpha}$ com $b = D_L \theta$:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$$

Este é o **raio de Einstein**. A imagem da fonte torna-se um anel de raio angular θ_E . Duas aplicações completamente distintas saem da mesma fórmula: para uma galáxia lente a distâncias cosmológicas, $\theta_E \sim 1''$, e mede-se a massa total dentro desse raio com precisão de poucos por cento — sem hipótese dinâmica alguma. Para uma estrela lente na Galáxia, $\theta_E \sim 1$ mas, pequeno demais para resolver, mas a amplificação temporal produz o evento de microlente.

A magnificação para uma lente pontual, em função da separação $u = \beta/\theta_E$, é

$$A(u) = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}},$$

que diverge para $u \rightarrow 0$ e vale $A = 1,34$ em $u = 1$ — o limiar convencional para definir um evento de microlente. Como u varia com o tempo pelo movimento relativo, a curva de luz resultante é simétrica e acromática, características que a distinguem de qualquer variabilidade estelar intrínseca.

Feedback e a relação $M-\sigma$

Por que a massa do buraco negro se correlaciona com a dispersão de velocidades do bojo? Um argumento energético simples reproduz o expoente observado.

Suponha que o buraco negro cresça até que a energia liberada por acreção seja capaz de expelir o gás do bojo. A energia de ligação do gás é $E_{\text{lig}} \sim M_{\text{gas}}\sigma^2$, com $M_{\text{gas}} \sim f_g M_{\text{bojo}}$ e $M_{\text{bojo}} \sim \sigma^2 R/G$. A energia liberada pelo buraco negro em um tempo de Salpeter é $\sim \eta M_{\text{BH}} c^2$, da qual uma fração pequena ϵ_f acopla ao gás. Igualando:

$$\epsilon_f \eta M_{\text{BH}} c^2 \sim f_g \frac{\sigma^4 R}{G}.$$

Usando $R \sim \sigma^2/(G\rho)^{1/2} \dots$ ou, mais diretamente, impondo que o momento — e não a energia — seja conservado no vento, obtém-se

$$M_{\text{BH}} \propto \frac{f_g \sigma^4}{\epsilon_f \eta} \quad \text{a} \quad \sigma^5.$$

A relação observada é $M_{\text{BH}} \propto \sigma^{4,4}$, dentro do intervalo previsto. O valor do expoente, portanto, não é acidental: ele decorre de o feedback ser autolimitado e de a estrutura do bojo ser virial. O que o argumento não fixa é a normalização, que depende de ϵ_f — e é justamente esse parâmetro que simulações de formação de galáxias precisam calibrar.

Tempo de relaxação de dois corpos

Estrelas em uma galáxia interagem gravitacionalmente aos pares, mas o efeito acumulado é minúsculo. Um encontro a parâmetro de impacto b produz variação de velocidade

$$\delta v \simeq \frac{2Gm}{bv}.$$

Como as deflexões têm direções aleatórias, elas se somam em quadratura. Integrando sobre todos os parâmetros de impacto de b_{min} a b_{max} e sobre uma travessia do sistema, obtém-se

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \simeq \frac{8 \ln \Lambda}{N}, \quad \Lambda = \frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}} \simeq N.$$

O tempo para que a velocidade mude significativamente é, portanto,

$$t_{\text{relax}} \simeq \frac{N}{8 \ln N} t_{\text{cruz}}$$

com $t_{\text{cruz}} = R/v$ o tempo de travessia. Aplicando: para um aglomerado globular com $N = 10^5$ e $t_{\text{cruz}} \simeq 10^6$ anos, $t_{\text{relax}} \simeq 10^9$ anos — menor que a idade do aglomerado, de modo que ele *está* relaxado, e fenômenos como segregação de massa e evaporação são esperados e observados. Para uma galáxia com $N = 10^{11}$ e $t_{\text{cruz}} \simeq 10^8$ anos, $t_{\text{relax}} \simeq 10^{17}$ anos, sete ordens de grandeza acima da idade do universo.

A conclusão é estrutural: **galáxias são sistemas não colisionais**. Suas estrelas nunca “se chocam” estatisticamente, e a dinâmica é governada pelo potencial suave coletivo — justamente a hipótese que sustenta a equação de Jeans usada no Capítulo 14. Quando duas galáxias se fundem, as estrelas atravessam umas às outras sem colidir; o que muda é o potencial, por meio da fricção dinâmica e da relaxação violenta — os assuntos das duas seções seguintes.

Fricção dinâmica

Um objeto massivo movendo-se através de um mar de partículas menores sofre desaceleração, mesmo sem colisões. A razão é geométrica: o objeto deflete as partículas atrás de si, criando uma sobredensidade — uma esteira — cuja atração puxa o objeto para trás. A fórmula de Chandrasekhar quantifica o efeito:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = -\frac{4\pi G^2 M \rho \ln \Lambda}{v_M^3} \left[\operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] \vec{v}_M$$

com $X = v_M/\sqrt{2}\sigma$ e $\ln \Lambda$ o logaritmo de Coulomb, tipicamente entre 3 e 30.

Três leituras importam. A força é proporcional a M — objetos mais massivos afundam mais rápido. Ela é proporcional a ρ , a densidade de fundo. E o colchete tende a 1 para $v_M \gg \sigma$, caso em que a desaceleração escala como v_M^{-2} : quanto mais rápido o objeto, *menor* a fricção, ao contrário do atrito viscoso comum.

As aplicações são diretas. Galáxias satélites espiralam para o centro de seus hospedeiros em uma escala de tempo

$$t_{\text{fd}} \simeq \frac{1,17}{\ln \Lambda} \frac{r_i^2 v_c}{GM_{\text{sat}}},$$

o que explica por que a Grande Nuvem de Magalhães deve se fundir com a Via Láctea em alguns bilhões de anos. Buracos negros supermassivos em galáxias que se fundem também afundam por fricção dinâmica até formar um binário — e a partir daí surge o problema do parsec final, em que o binário fica sem estrelas para ejetar e sua coalescência depende de gás ou de interações com um terceiro corpo. É desse estágio que vem o fundo estocástico de ondas gravitacionais em nanohertz detectado pelos conjuntos de pulsares.

Relaxação violenta

Quando duas galáxias se fundem, o potencial gravitacional varia rapidamente no tempo, e a energia de cada estrela deixa de se conservar:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Esse processo, chamado relaxação violenta, redistribui energias em uma escala de tempo dinâmica — não em tempo de relaxação de dois corpos, que é astronomicamente longo. É por isso que fusões produzem sistemas relaxados apesar de galáxias serem não colisionais.

Um detalhe fundamental: a relaxação violenta redistribui energia por unidade de *massa*, independentemente da massa individual da estrela. Ela não produz equipartição de energia, e portanto não gera segregação de massa — ao contrário da relaxação de dois corpos, que gera. Essa diferença é o teste que distingue os dois mecanismos em aglomerados observados.

A função de massa estelar de galáxias e o problema de eficiência

A distribuição de massas de halos de matéria escura, prevista pelo formalismo de Press-Schechter, é aproximadamente uma lei de potência com corte exponencial. A distribuição de massas estelares observada tem forma de Schechter:

$$\phi(M_\star) dM_\star = \phi^* \left(\frac{M_\star}{M^*} \right)^\alpha e^{-M_\star/M^*} \frac{dM_\star}{M^*},$$

com $M^* \simeq 10^{11} M_\odot$ e $\alpha \simeq -1,2$.

Comparando as duas, define-se a eficiência de conversão $f_\star = M_\star/(f_b M_{\text{halo}})$, com $f_b = \Omega_b/\Omega_m \simeq 0,16$. O resultado é notável: $f_\star$ tem um máximo de apenas $\sim 20\%$ em halos de $\sim 10^{12} M_\odot$ — justamente a massa da Via Láctea — e cai por ordens de grandeza para ambos os lados. A formação de estrelas é, portanto, um processo *ineficiente*, e sua ineficiência é máxima nos extremos.

A explicação padrão usa dois mecanismos de *feedback* com dependências opostas. Em halos pequenos, a velocidade de escape é baixa e supernovas expõem gás facilmente: a energia disponível por supernova, $\sim 10^{44}$ J, comparada à energia de ligação $\sim M_{\text{gas}} v_c^2$, mostra que o efeito domina para $v_c \lesssim 100 \text{ km s}^{-1}$. Em halos grandes, o gás é quente demais para resfriar em tempo de Hubble e o *feedback* de núcleos ativos mantém o aquecimento. Entre os dois regimes existe uma janela ótima — e é nela que estamos.

A relação massa-metalicidade e o modelo de caixa fechada

Considere uma galáxia como um sistema fechado, sem entrada nem saída de gás, que converte gás em estrelas e devolve metais. Seja y o rendimento — a massa de metais produzida por unidade de massa transformada em estrelas de vida longa. A metalicidade do gás evolui como

$$Z = y \ln \left(\frac{1}{\mu} \right), \quad \mu = \frac{M_{\text{gas}}}{M_{\text{gas}} + M_\star},$$

com μ a fração de gás restante. A dedução é simples: cada elemento de massa convertido em estrelas produz $y dM_\star$ de metais, que se diluem no gás restante.

O modelo prevê metalicidade crescente conforme o gás é consumido, e reproduz qualitativamente a relação massa-metalicidade observada — galáxias mais massivas são mais ricas em metais. Mas ele falha quantitativamente em dois pontos, e as falhas são informativas. Primeiro, o **problema das anãs G**: o modelo prevê mais estrelas pobres em metais do que se observa no disco solar, o que exige acreção contínua de gás pobre em metais em vez de um reservatório fechado. Segundo, galáxias anãs têm metalicidade ainda mais baixa que o previsto, o que exige perda de metais por ventos — exatamente o *feedback* de supernovas discutido acima. Um modelo simples cujas discrepâncias apontam diretamente para a física faltante é mais útil do que um modelo complicado que ajusta tudo.

Taxa de fusões e crescimento hierárquico

No cenário hierárquico, halos crescem por acreção e fusões. A taxa de fusões por halo, por unidade de razão de massas $\xi = M_2/M_1$ e por unidade de tempo, é bem aproximada por

$$\frac{dN}{d\xi dz} \propto M_1^{0,1} \xi^{-2} (1+z)^{0,5},$$

o que implica duas coisas. A dependência ξ^{-2} significa que fusões menores são muito mais frequentes que as maiores — galáxias crescem principalmente por acreção de material pequeno, não por colisões espetaculares. E a dependência positiva em z significa que fusões eram mais comuns no passado, quando o universo era mais denso.

Distinguir fusões **maiores** ($\xi > 1/4$), que destroem discos e produzem esferoides, de fusões **menores**, que engordam halos estelares sem destruir a estrutura, é central para entender por que existem os dois tipos morfológicos. A Via Láctea, com seu disco fino intacto, não pode ter sofrido nenhuma fusão maior nos últimos ~ 10 bilhões de anos — restrição forte, e consistente com a história de acreção reconstruída pelo Gaia.

Perguntas para discussão.

- Por que a confirmação espectroscópica é indispensável para uma galáxia candidata em $z > 10$?
- Como uma correlação entre escalas tão distintas (M_{BH} e σ) pode ser fisicamente causada?
- Que observações distinguiriam um blazar de uma Seyfert se ambos tivessem o mesmo motor central?
- Lente forte e lente fraca medem coisas diferentes. Quais, e com que hipóteses?

Capítulo 16 – Cosmologia observacional e expansão do universo

Cosmologia estuda o universo em grandes escalas, onde a distribuição média de matéria e energia pode ser tratada de forma homogênea e isotrópica em primeira aproximação. Essa hipótese não diz que o universo é uniforme em escalas pequenas: estrelas, galáxias e aglomerados existem. Ela afirma que, em escalas suficientemente grandes, não há centro ou direção privilegiada evidente. O modelo cosmológico moderno combina relatividade geral, expansão observada, radiação cósmica de fundo, abundâncias primordiais e formação de estruturas.

A expansão cósmica é descrita pelo fator de escala. Galáxias distantes não se afastam simplesmente como projéteis atravessando espaço estático; em cosmologia relativística, o próprio espaço entre observadores comóveis se expande. O redshift cosmológico mede quanto o comprimento de onda da luz foi esticado desde a emissão. Para pequenos redshifts, a lei de Hubble-Lemaître aproxima a relação entre velocidade recessional e distância. Para grandes redshifts, é necessário usar o modelo cosmológico completo, com parâmetros de matéria, radiação, curvatura e energia escura.

A densidade crítica define a escala em que a geometria espacial é plana em modelos simples. Costumamos expressar componentes do universo por parâmetros Ω : matéria bariônica, matéria escura, radiação e energia escura. Observações indicam que a matéria bariônica é apenas uma fração pequena do conteúdo total. Matéria escura domina a matéria gravitante em muitas escalas. Energia escura está associada à expansão acelerada observada no universo recente. Esses nomes resumem fenômenos medidos, mas não encerram as perguntas fundamentais sobre a natureza microscópica desses componentes.

A radiação cósmica de fundo é uma das evidências mais fortes do universo quente e denso. Ela possui espectro quase perfeito de corpo negro, com temperatura atual próxima de 2,7 K. Essa radiação foi liberada quando elétrons e prótons se combinaram em átomos neutros, tornando o universo transparente à luz. Antes disso, fótons eram espalhados frequentemente por elétrons livres. As pequenas anisotropias da CMB registram flutuações de densidade que mais tarde cresceriam para formar estruturas. Assim, um mapa de micro-ondas carrega informação sobre física do universo jovem.

A escada de distâncias, degrau por degrau

Nenhum método mede distâncias em todas as escalas. O que existe é uma sequência de técnicas, cada uma calibrada pela anterior — e como em qualquer escada, um degrau torto desloca todos os de cima.

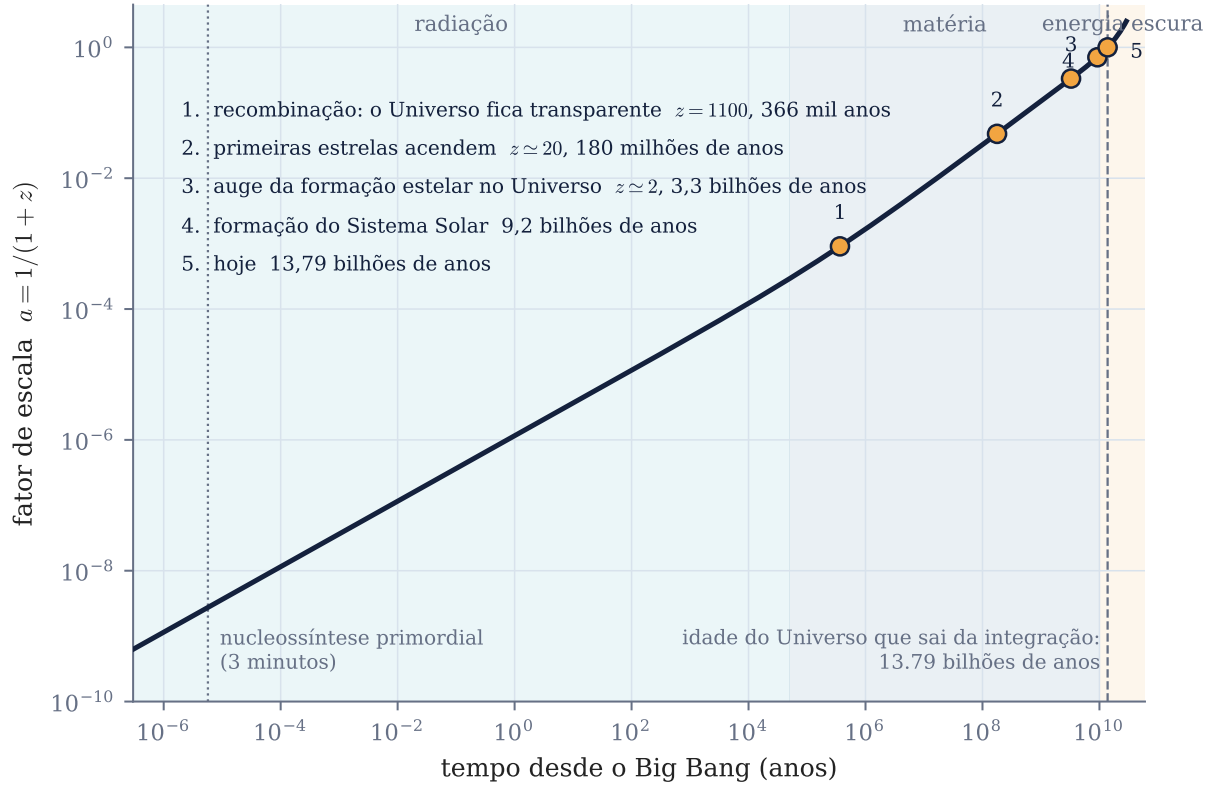


Figura 23: **A linha do tempo cósmica, em escala logarítmica.** Fator de escala $a = 1/(1+z)$ em função do tempo, obtido integrando a equação de Friedmann $H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda}$ com os parâmetros do Planck 2018 ($H_0 = 67,4$ km/s/Mpc, $\Omega_m = 0,315$). O eixo do tempo cobre dezessete ordens de grandeza porque não há alternativa: a nucleossíntese primordial dura minutos e a formação do Sistema Solar leva bilhões de anos. As faixas ao fundo marcam qual componente domina a densidade de energia — radiação até 50 mil anos, matéria até 10 bilhões de anos, energia escura depois disso — e a inclinação da curva muda em cada transição, de $a \propto t^{1/2}$ para $a \propto t^{2/3}$ e finalmente para crescimento exponencial. A posição de cada evento numerado não foi escolhida: entra o desvio para o vermelho e o tempo sai da integração. A idade do Universo também é resultado, não hipótese: 13,79 bilhões de anos, contra os 13,80 do Planck. Note ainda o que *não* cabe na figura: a inflação acontece por volta de 10^{-36} s, cerca de trinta e sete ordens de grandeza à esquerda da borda do gráfico.



Figura 24: **Campo ultraprofundo do Hubble.** Uma pequena região do céu contém milhares de galáxias em diferentes distâncias e épocas cósmicas, tornando a imagem uma janela para evolução galáctica. Crédito: NASA, ESA e Hubble, via ESA/Hubble.

A escada cósmica

Método	Alcance típico	Sobre o que se apoia
Paralaxe trigonométrica	até $\sim$ alguns kpc	Geometria pura; nenhuma hipótese astrofísica
Ajuste de sequência principal	~ 100 kpc	Modelos estelares e metalicidade
Cefeidas	até ~ 40 Mpc	Relação período-luminosidade calibrada por paralaxes
Topo do ramo das gigantes	até ~ 20 Mpc	Física do <i>flash</i> do hélio
Supernovas Ia	até ~ 1000 Mpc	Padronização da curva de luz, calibrada por Cefeidas ou TRGB
Lei de Hubble-Lemaître	além disso	Homogeneidade e valor de H_0

O Gaia refez o primeiro degrau com precisão sem precedentes, e isso propagou para cima: as calibrações de Cefeidas usadas hoje dependem diretamente de suas paralaxes. É um bom exemplo de como um avanço instrumental em uma escala reorganiza resultados em outra completamente diferente.

Supernovas Ia e a descoberta da aceleração

Supernovas de tipo Ia não são idênticas, mas são *padronizáveis*: existe uma relação empírica entre a largura da curva de luz e o brilho máximo — as que declinam mais devagar são intrinsecamente mais luminosas. Corrigindo por essa relação, a dispersão cai para cerca de 0,15 magnitude, o que as torna as melhores velas padrão em escala cosmológica.

No fim dos anos 1990, dois grupos independentes mediram supernovas distantes e encontraram-nas mais fracas do que um universo em desaceleração previa. A interpretação — expansão acelerada, dominada por uma componente de pressão negativa — rendeu o Nobel de 2011 e introduziu a energia escura no modelo padrão. Vale sublinhar o formato do argumento: não se “viu” energia escura. Mediram-se brilhos e desvios para o vermelho, comparou-se com previsões de modelos, e a única família de modelos compatível exigia aceleração.

Oscilações acústicas de bárions: uma régua, não uma vela

Antes da recombinação, fótons e bárions formavam um fluido acoplado em que perturbações se propagavam como ondas sonoras. Quando o universo ficou transparente, essas ondas congelaram, deixando uma escala característica impressa tanto na radiação cósmica de fundo quanto na distribuição de galáxias: um excesso de pares de galáxias separadas por cerca de 150 Mpc comóveis.

Como essa escala é calculável a partir da física do plasma primordial, ela funciona como **régua padrão**. Medindo seu tamanho angular e sua extensão em desvio para o vermelho em diferentes épocas, obtém-se a história da expansão sem depender de velas padrão nem da escada de distâncias local. É uma via completamente independente, e é por isso que os levantamentos espectroscópicos de milhões de galáxias — BOSS, eBOSS e hoje o DESI — se tornaram centrais na cosmologia observacional.

Tensão de Hubble: o problema em aberto

Medidas locais (Cefeidas mais supernovas Ia) dão $H_0 \simeq 73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; a extrapolação a partir da radiação cósmica de fundo dá $\simeq 67,4$. A discrepância é de cerca de cinco desvios-padrão e resistiu a uma década de escrutínio, incluindo verificações feitas com o JWST na fotometria das Cefeidas.

Este é, hoje, provavelmente o problema mais discutido da cosmologia, e ele é tratado em detalhe no Capítulo 21. Registre aqui apenas a estrutura lógica: um lado mede a expansão *agora*, o outro mede parâmetros em $z \simeq 1100$ e *prevê* o valor de hoje usando o modelo. Se os dois discordam, ou uma das medidas tem erro sistemático, ou o modelo que faz a ponte entre elas está incompleto.

Dedução curta: o que z mede, afinal

O desvio para o vermelho cosmológico não é efeito Doppler de galáxias movendo-se *através* do espaço; é consequência da expansão do próprio espaço enquanto a luz viaja. A relação exata é

$$1 + z = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{emis}})} = \frac{1}{a(t_{\text{emis}})},$$

tomando $a = 1$ hoje. Ou seja, z mede diretamente *quanto o universo se expandiu* desde a emissão, e não velocidade. Um objeto em $z = 1$ emitiu sua luz quando todas as distâncias eram metade das atuais.

A conversão de z em distância ou em tempo exige integrar a equação de Friedmann e, portanto, depende do modelo cosmológico — foi exatamente esse o cálculo da Figura 23. Apenas para $z \ll 1$ vale a aproximação linear $v \simeq cz$ e a lei $d \simeq cz/H_0$. Usar essa aproximação em $z = 2$ é um erro comum e grosseiro.

Perguntas para discussão.

- Por que uma régua padrão é metodologicamente diferente de uma vela padrão?
- Que degrau da escada de distâncias você suspeitaria primeiro diante da tensão de Hubble, e como testaria?
- Se energia escura fosse dinâmica, que observável mudaria primeiro?
- Por que z não deve ser lido como velocidade em desvios para o vermelho altos?

A equação de Friedmann por argumento newtoniano

O resultado central da cosmologia pode ser obtido sem relatividade geral, e a coincidência não é acidental: pelo teorema de Birkhoff, a dinâmica de uma casca esférica depende apenas da massa interior, e o cálculo newtoniano dá a resposta certa.

Considere uma esfera homogênea de raio r e densidade ρ , expandindo. Uma partícula de massa m na superfície sente apenas a massa interior $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Sua energia é

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}.$$

Escreva $r(t) = a(t)x$, com x a coordenada comóvel fixa e a o fator de escala. Dividindo por $\frac{1}{2}ma^2\dot{x}^2$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{2E}{mx^2a^2}.$$

Identificando o último termo com a curvatura, $2E/mx^2 \equiv -kc^2$, obtém-se a **primeira equação de**

Friedmann:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

A relatividade geral acrescenta apenas duas coisas: a interpretação de k como curvatura espacial real (e não energia mecânica) e a exigência de que ρ inclua todas as formas de energia, inclusive pressão.

A **segunda equação** vem da conservação de energia aplicada a um volume comóvel. A primeira lei da termodinâmica com expansão adiabática, $dU = -P dV$ com $U = \rho c^2 V$ e $V \propto a^3$, dá

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0$$

Combinando as duas obtém-se a **equação de aceleração**:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right).$$

Note o papel da pressão: ela *desacelera* a expansão, ao contrário da intuição de gás em um pistão. Isso porque na relatividade geral a pressão é fonte de gravidade. E daí a única maneira de acelerar a expansão é ter $P < -\rho c^2/3$ — pressão negativa suficiente. Essa é a definição operacional de energia escura.

Como cada componente dilui

Com equação de estado $P = w\rho c^2$, a equação do fluido integra-se imediatamente:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \implies \rho \propto a^{-3(1+w)}.$$

Três casos:

- **Matéria** ($w = 0$): $\rho \propto a^{-3}$. Apenas a diluição de volume.
- **Radiação** ($w = 1/3$, deduzido no Capítulo 6): $\rho \propto a^{-4}$. Um fator extra de a^{-1} porque cada fóton também perde energia por desvio para o vermelho.
- **Constante cosmológica** ($w = -1$): $\rho = \text{constante}$. A densidade de energia do vácuo não dilui.

Como as três diluem com taxas diferentes, a componente dominante muda ao longo da história — exatamente as três faixas mostradas na Figura 23. Radiação domina cedo, matéria em época intermediária, e a constante cosmológica domina no final, necessariamente, porque é a única que não decai.

Substituindo na equação de Friedmann para um universo plano dominado por uma componente:

$$a \propto t^{2/3(1+w)} \implies a \propto t^{1/2} \text{ (radiação)}, \quad a \propto t^{2/3} \text{ (matéria)}, \quad a \propto e^{Ht} \text{ (}\Lambda\text{)}.$$

Parâmetros de densidade e a geometria

Definindo a densidade crítica como aquela que torna o universo plano,

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad \rho_{c,0} = 1,88 \times 10^{-26} h^2 \text{ kg m}^{-3},$$

e $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$, a equação de Friedmann assume a forma que se usa na prática:

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{k,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} \right]$$

com $\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$. Foi exatamente esta expressão que a Figura 23 integrou. A soma dos Ω determina a geometria: se vale 1, o espaço é plano.

A densidade crítica atual é da ordem de cinco átomos de hidrogênio por metro cúbico — e o universo, com toda a sua estrutura, é plano com essa precisão. É o problema da planura mencionado no Capítulo 17.

As distâncias cosmológicas e por que são várias

Em um universo em expansão, “distância” deixa de ser um conceito único. Cada método de medida define a sua.

A **distância comóvel** é a que permanece fixa com a expansão:

$$D_C = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad E(z) = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}.$$

A **distância de luminosidade** é definida para preservar a lei do inverso do quadrado, $F = L/4\pi D_L^2$. Dois efeitos reduzem o fluxo além da geometria: cada fóton chega com energia $(1+z)$ vezes menor, e a taxa de chegada é $(1+z)$ vezes menor. Logo

$$D_L = (1+z)D_C.$$

A **distância de diâmetro angular** é definida para preservar $\theta = \ell/D_A$. Como o objeto emitiu quando o universo era $(1+z)$ vezes menor, o mesmo tamanho físico subtende um ângulo maior:

$$D_A = \frac{D_C}{1+z}.$$

Combinando as duas últimas obtém-se a **relação de dualidade de Etherington**:

$$D_L = (1+z)^2 D_A$$

válida em qualquer métrica em que os fótons se propaguem em geodésicas nulas e sejam conservados. É um teste observacional poderoso: violações indicariam ou fótons desaparecendo no caminho (poeira exótica, oscilação em áxions) ou desvio da geometria métrica.

Uma consequência contraintuitiva de D_A : ela tem um *máximo* em $z \simeq 1,6$ e depois *diminui*. Objetos muito distantes parecem angularmente maiores, porque estavam mais próximos quando emitiram a luz. É por isso que a escala do horizonte sonoro impressa na CMB, em $z = 1100$, subtende cerca de um grau — e não os poucos segundos de arco que a intuição euclidiana sugeriria.

O módulo de distância cosmológico usa D_L em parsecs:

$$\mu = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right),$$

e é exatamente essa quantidade que o diagrama de Hubble do laboratório deste capítulo compara com o modelo.

Idade do universo e horizontes

A idade sai integrando $dt = da/(aH)$:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{a E(a)} = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)}.$$

Para Λ CDM com $\Omega_m = 0,315$, a integral vale 0,951, de modo que $t_0 = 0,951/H_0$. Com $H_0 = 67,4$, $1/H_0 = 14,5$ bilhões de anos e $t_0 = 13,8$ — resultado que a Figura 23 obteve numericamente. Para um universo apenas com matéria, o fator seria $2/3$, dando 9,7 bilhões de anos, *menos* que a idade dos aglomerados globulares mais velhos. Essa incompatibilidade foi um dos argumentos anteriores às supernovas em favor de $\Lambda > 0$.

O **horizonte de partículas** é a maior distância comóvel de onde luz pode ter chegado desde o Big Bang:

$$D_{\text{hor}} = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Ele é finito, e vale hoje cerca de 46 bilhões de anos-luz — valor muito maior que ct_0 porque o espaço se expandiu enquanto a luz viajava. É a existência de um horizonte finito que gera o problema do horizonte discutido no capítulo seguinte.

Oscilações acústicas: a régua e sua calibração

Antes da recombinação, fótons e bárions formavam um fluido com velocidade do som

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad R = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma},$$

em que R mede a inércia dos bárions. Para $R \rightarrow 0$, $c_s \rightarrow c/\sqrt{3}$ — a velocidade do som em um gás de radiação puro, consequência direta de $P = u/3$.

O **horizonte sonoro** na recombinação é a distância comóvel percorrida por essas ondas:

$$r_s = \int_0^{t_{\text{rec}}} \frac{c_s dt}{a} = \int_{z_{\text{rec}}}^\infty \frac{c_s dz}{H(z)} \simeq 147 \text{ Mpc}.$$

Este número é calculável a partir da física do plasma primordial e das densidades de bárions e matéria — ambas medidas independentemente. É por isso que r_s funciona como régua padrão: seu valor não é ajustado aos dados de galáxias, é previsto.

Medindo o tamanho angular $\theta_s = r_s/D_A(z)$ na CMB e a escala correspondente na distribuição de galáxias em vários desvios para o vermelho, mede-se $D_A(z)$ e $H(z)$ separadamente — e é essa combinação que os levantamentos espectroscópicos usam para reconstruir a história da expansão sem qualquer vela padrão.

O espectro de potência das flutuações

A distribuição de matéria é descrita estatisticamente pelo contraste de densidade $\delta(\vec{x}) = \delta\rho/\bar{\rho}$. Sua transformada de Fourier define o **espectro de potência**:

$$\langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* \rangle = (2\pi)^3 P(k) \delta_D^3(\vec{k} - \vec{k}'),$$

em que a função delta expressa homogeneidade e o fato de P depender apenas de $|k|$ expressa isotropia. A **função de correlação** de dois pontos é sua transformada:

$$\xi(r) = \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k) \frac{\sin kr}{kr} k^2 dk.$$

Operacionalmente, $\xi(r)$ é o excesso de probabilidade de encontrar duas galáxias separadas por r em relação a uma distribuição aleatória. Medida em levantamentos, ela apresenta um pico estreito em $\simeq 150 \text{ Mpc}$ — a assinatura das oscilações acústicas de bárions, discutida antes, aqui aparecendo no espaço real em vez do espaço de Fourier.

O espectro primordial produzido pela inflação é aproximadamente uma lei de potência, $P_i(k) \propto k^{n_s}$ com $n_s \simeq 0,96$. O espectro observado hoje difere dele por um **fator de transferência**:

$$P(k, z) = P_i(k) T^2(k) D^2(z),$$

em que $T(k)$ codifica a física entre a inflação e a recombinação, e $D(z)$ o crescimento posterior.

A forma de $T(k)$ tem uma origem física clara. Modos que entraram no horizonte durante a era da radiação tiveram seu crescimento suprimido, porque a expansão dominada por radiação é rápida demais para que a gravidade atue — efeito conhecido como estagnação de Mészáros. Modos maiores, que entraram depois, não sofreram supressão. O resultado é que $P(k)$ tem um máximo na escala que entrou no horizonte na igualdade matéria-radiação, $k_{\text{eq}} \simeq 0,01 h \text{ Mpc}^{-1}$, comportando-se como k^{n_s} abaixo dele e k^{n_s-4} acima. Medir a posição desse pico é medir $\Omega_m h^2$ diretamente.

O fator de crescimento

A equação de crescimento linear deduzida no Capítulo 17 pode ser escrita, para um universo com Λ , como

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_m\delta = 0,$$

cujas soluções crescentes definem o fator $D(a)$, normalizado a $D(1) = 1$. Não há forma analítica geral, mas existe uma integral exata:

$$D(a) \propto H(a) \int_0^a \frac{da'}{[a'H(a')]^3}.$$

Uma aproximação muito usada é $f \equiv d \ln D / d \ln a \simeq \Omega_m(a)^{0,55}$, em que o expoente 0,55 é característico da relatividade geral — teorias de gravidade modificada preveem valores diferentes. Medir a taxa de crescimento $f\sigma_8$ por distorções de redshift em levantamentos espectroscópicos é, portanto, um teste da gravidade em escalas cosmológicas, complementar aos testes de expansão.

A normalização do espectro é convencionalmente dada por σ_8 , a dispersão do contraste de densidade em esferas de $8 h^{-1} \text{ Mpc}$:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k) W^2(kR) k^2 dk,$$

com W a transformada da função janela esférica. O valor $\sigma_8 \simeq 0,81$ significa que, nessa escala, as flutuações são de ordem unitária hoje — isto é, $8 h^{-1} \text{ Mpc}$ marca aproximadamente a fronteira entre o regime linear e o não linear. Abaixo disso, é preciso simulação numérica; acima, a teoria de perturbação basta.

Colapso esférico e a massa dos halos

Um modelo analítico simples captura o essencial da formação de estruturas. Considere uma região esférica com contraste inicial positivo. Ela expande mais devagar que o fundo, atinge um raio máximo (*turnaround*) e recolapsa. Aplicando as equações de Friedmann a essa região como se fosse um universo fechado em miniatura, e usando o teorema do virial para determinar o raio final de equilíbrio, chega-se a dois números notáveis.

O primeiro: no instante do colapso, o contraste *linearmente extrapolado* vale

$$\delta_c = \frac{3}{20}(12\pi)^{2/3} \simeq 1,686.$$

Este número é praticamente independente da cosmologia, e é usado como limiar: regiões cujo contraste linear excede 1,686 colapsaram.

O segundo: o halo virializado tem densidade média

$$\Delta_{\text{vir}} = 18\pi^2 \simeq 178$$

vezes a densidade de fundo. É por isso que se define rotineiramente a massa de um halo como M_{200} , dentro do raio em que a densidade média é 200 vezes a crítica — a convenção vem diretamente desse cálculo.

Combinando o limiar δ_c com a estatística gaussiana do campo de densidade, obtém-se o formalismo de Press-Schechter, que prevê a abundância de halos por unidade de massa:

$$\frac{dn}{dM} \propto \frac{\rho_m}{M^2} \frac{d \ln \sigma^{-1}}{d \ln M} \exp \left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M)} \right).$$

A supressão exponencial em massas altas é a razão pela qual aglomerados massivos são raros e sua contagem é tão sensível a σ_8 e Ω_m : pequenas mudanças nesses parâmetros alteram a abundância por fatores grandes. É também a razão pela qual a existência de galáxias muito massivas em $z > 10$, revelada pelo JWST, gerou tanta discussão — ela testa justamente a cauda exponencial da distribuição.

Distorções no espaço de redshift

A posição radial de uma galáxia é inferida de seu desvio para o vermelho, que contém expansão *mais* velocidade peculiar. Isso deforma sistematicamente os mapas: em grandes escalas, o fluxo coerente de galáxias caindo em direção a sobredensidades comprime as estruturas ao longo da linha de visada (efeito Kaiser); em pequenas escalas, movimentos aleatórios dentro de aglomerados os esticam radialmente, produzindo os característicos “dedos de Deus”.

O efeito é uma dificuldade e também uma oportunidade. Como a amplitude da compressão é proporcional à taxa de crescimento f , medir a anisotropia da função de correlação mede $f\sigma_8(z)$ — uma das principais observáveis dos levantamentos espectroscópicos modernos, e o teste que distingue energia escura de gravidade modificada. Uma modificação da gravidade que reproduza a mesma história de expansão prevê, em geral, uma taxa de crescimento diferente, e é exatamente aí que os dois cenários se separam.

O teste de Alcock-Paczynski

Um objeto esférico em escala cosmológica, observado, tem sua extensão radial medida em desvio para o vermelho e sua extensão transversal em ângulo. As duas se convertem em distância por fatores distintos: $\Delta z = H(z)\Delta r_{\parallel}/c$ e $\theta = \Delta r_{\perp}/D_A(z)$. Se a cosmologia adotada estiver errada, a esfera aparecerá achatada ou alongada.

Impondo que estruturas estatisticamente isotrópicas permaneçam isotrópicas, mede-se a combinação

$$F_{\text{AP}}(z) = \frac{(1+z)D_A(z)H(z)}{c},$$

sem necessidade de qualquer régua ou vela padrão. É um teste puramente geométrico, e sua combinação com as oscilações acústicas de bárions é o que permite aos levantamentos separar $D_A(z)$

de $H(z)$ — exatamente a informação necessária para detectar uma eventual evolução de w com o tempo.

Laboratório de dados 10 – medir a constante de Hubble

Arquivo: 13_supernovas_ia_pantheon.csv — 1573 supernovas de tipo Ia com desvio para o vermelho, módulo de distância e incerteza, da compilação Pantheon+.

Física. O módulo de distância converte-se em distância, e a lei de Hubble-Lemaître liga distância e velocidade:

$$d [\text{Mpc}] = 10^{(\mu-25)/5}, \quad v \simeq cz, \quad v = H_0 d.$$

Roteiro.

1. Calcule d para todas as supernovas. No Excel: $=10^{((C2-25)/5)}$.
2. Selecione apenas $z < 0,1$, onde a aproximação $v \simeq cz$ vale, e faça o gráfico de v contra d .
3. Ajuste uma reta passando pela origem. A inclinação é H_0 , em $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.
4. Calcule a idade aproximada do universo como $1/H_0$, convertendo unidades. Compare com os 13,8 bilhões de anos da Figura 23.
5. Agora inclua todas as supernovas até $z = 1,6$ e faça o gráfico de μ contra $\log z$. Estenda a reta ajustada em baixo z : os pontos de alto z ficam acima ou abaixo dela? O que isso significa fisicamente?

Entrega. O diagrama de Hubble, o valor de H_0 com incerteza, a idade estimada e um parágrafo interpretando o desvio em alto z .

Confira. Você deve obter algo entre 65 e 70 $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, dependendo do corte em z e de usar ou não pesos — e $1/H_0 \simeq 14$ bilhões de anos, próximo da idade real por coincidência numérica, não por identidade. O valor publicado pela colaboração é 73: a diferença vem das correções de velocidade peculiar e do termo de desaceleração, que este roteiro simplificado ignora. Esse deslocamento é justamente o objeto do laboratório 11. Em alto z as supernovas aparecem *mais fracas* que o previsto sem energia escura: foi essa observação que rendeu o Nobel de 2011.

Capítulo 17 – Universo primordial e modelo cosmológico padrão

A nucleossíntese primordial ocorreu nos primeiros minutos, quando temperatura e densidade permitiram formar núcleos leves. O resultado principal foi hidrogênio, hélio e pequenas quantidades de deutério, hélio-3 e lítio. Elementos mais pesados exigem ambientes estelares e explosivos posteriores. A concordância entre abundâncias previstas e observadas é um teste importante do modelo. Ela também limita a quantidade de matéria bariônica: não podemos simplesmente declarar que toda matéria escura é gás comum frio sem violar essas evidências.

Inflação é uma hipótese para uma fase de expansão extremamente rápida no universo primordial. Ela foi proposta para explicar problemas como a homogeneidade do céu em regiões que, sem inflação, não teriam tido tempo causal para se equilibrar; a quase planura espacial; e a origem de flutuações iniciais. Em muitos modelos, flutuações quânticas esticadas pela inflação tornam-se sementes clássicas para a estrutura cósmica. A inflação não é uma única teoria fechada, mas uma família de cenários testados por previsões sobre anisotropias, polarização e distribuição de estruturas.

A expansão acelerada foi inferida de supernovas Ia distantes e hoje é sustentada por múltiplas observações combinadas. Energia escura pode ser representada, no modelo mais simples, por uma constante cosmológica. Mas a interpretação física permanece aberta: pode ser energia do vácuo, um campo dinâmico ou sinal de que a gravidade precisa ser entendida de outra forma em grandes escalas. A postura científica adequada é dupla: usar o modelo Λ CDM porque ele funciona muito bem, e ao mesmo tempo reconhecer que seus componentes escuros ainda pedem explicação profunda.

Exemplo guiado. Um redshift $z = 1$ significa que o comprimento de onda observado é duas vezes o emitido, pois $1 + z = \lambda_{\text{obs}}/\lambda_{\text{em}}$. Uma linha emitida em 400 nm seria observada em 800 nm. Isso não deve ser interpretado como simples Doppler newtoniano em todos os casos; em cosmologia, o redshift acumula a expansão do universo ao longo da trajetória da luz.

Perguntas para discussão.

- Em que sentido o universo pode ser homogêneo se galáxias existem?
- Por que a CMB é uma evidência tão forte de um universo quente no passado?
- Como abundâncias de elementos leves limitam a quantidade de matéria bariônica?
- O que significa aceitar um modelo cosmológico bem-sucedido sem conhecer totalmente a natureza de seus componentes?

Para praticar. Construa uma linha do tempo em escala logarítmica: inflação, nucleossíntese primordial, recombinação, primeiras estrelas, primeiras galáxias, formação do Sistema Solar e presente. Em cada marco, registre temperatura qualitativa, componentes dominantes e evidência observacional. A escala logarítmica é essencial: os primeiros segundos e os bilhões de anos posteriores precisam caber na mesma narrativa.

Dedução curta: redshift e fator de escala

Em cosmologia homogênea, comprimentos de onda acompanham a expansão do universo. Se $a(t)$ é o fator de escala, então

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{em}})}.$$

Tomando $a(t_{\text{obs}}) = 1$, um objeto em $z = 3$ emitiu a luz quando o fator de escala era $a = 1/4$. Isso não significa que ele estava simplesmente se movendo a uma velocidade newtoniana específica; significa que a luz foi esticada pela expansão acumulada entre emissão e observação.

Exemplo de aplicação: densidade crítica

A densidade crítica é

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Usando $H_0 \simeq 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \simeq 2,3 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, obtemos

$$\rho_c \simeq 9 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}.$$

O número parece absurdamente pequeno, mas em volumes cosmológicos ele controla a geometria e a história de expansão. Essa é uma boa lição de escala: densidade média cósmica não se compara intuitivamente com densidades de laboratório.

Três problemas que a inflação resolve

O modelo do Big Bang quente descreve muito bem a evolução do universo a partir de frações de segundo, mas deixa três desconfortos que não são contradições e sim exigências de ajuste fino implausível.

O problema do horizonte. Regiões opostas do céu, vistas na radiação cósmica de fundo, têm a mesma temperatura com precisão de partes em cem mil. Só que, no modelo sem inflação, essas regiões nunca estiveram em contato causal: a luz não teve tempo de percorrer a distância entre elas desde o Big Bang. Por que teriam a mesma temperatura?

O problema da planura. A densidade do universo é hoje muito próxima do valor crítico. Como o desvio em relação ao valor crítico cresce com o tempo em um universo dominado por matéria ou radiação, estar próximo hoje exige ter estado absurdamente próximo no início — ajuste de dezenas de casas decimais.

Ausência de relíquias exóticas. Teorias de grande unificação preveem produção abundante de monopolos magnéticos, que não são observados.

Uma fase de expansão acelerada exponencial nos primeiros instantes resolve os três de uma vez: ela põe em contato causal regiões que depois se separam, achata a geometria por esticamento, e dilui qualquer relíquia produzida antes. O preço é postular um campo escalar com propriedades adequadas, cuja identidade física permanece desconhecida.

O que torna a inflação interessante não é resolver problemas antigos — teorias construídas para isso são baratas —, e sim ter feito uma previsão nova e testável: as flutuações quânticas do campo, esticadas a escalas cosmológicas, produziram um espectro de perturbações de densidade quase invariante de escala, ligeiramente inclinado, adiabático e gaussiano. As medidas da radiação cósmica de fundo confirmaram exatamente esse padrão, incluindo a leve inclinação. É uma das previsões bem-sucedidas mais impressionantes da física, e ainda assim insuficiente para identificar o mecanismo.

Nucleossíntese primordial: um teste com um parâmetro

Entre cerca de um e vinte minutos após o Big Bang, o universo esteve na faixa de temperatura em que reações nucleares funcionam e núcleos leves sobrevivem. O resultado foi a produção de deutério, hélio-3, hélio-4 e traços de lítio-7. Elementos mais pesados não se formaram porque não há núcleos estáveis de massa 5 e 8, e a densidade caiu rápido demais.

O que torna esse cálculo poderoso é que ele tem essencialmente *um* parâmetro livre: a razão entre bárions e fótons. Fixado esse número, as abundâncias de todos os núcleos leves ficam determinadas.

E o valor extraído das abundâncias observadas concorda com o valor obtido de maneira totalmente independente pelo espectro de potência da radiação cósmica de fundo. Duas físicas diferentes, separadas por trezentos mil anos de história cósmica, apontando o mesmo número.

A exceção é o lítio-7, observado em estrelas velhas com abundância cerca de três vezes menor que a prevista — o problema do lítio primordial, ainda em aberto (Capítulo 21).

A radiação cósmica de fundo, camada por camada

O que se lê na CMB

Característica observada	O que ela mede
Espectro de corpo negro perfeito a 2,725 K	Equilíbrio térmico no universo primitivo; nenhuma injeção significativa de energia posterior
Dipolo de $\sim 3,4$ mK	Movimento próprio do Sistema Solar em relação ao referencial da CMB
Posição do primeiro pico acústico	Geometria espacial: o universo é plano com boa precisão
Razão entre picos ímpares e pares	Densidade de bárions
Amortecimento nos picos altos	Espessura da superfície de último espalhamento
Polarização em modo E	Consistência do quadro de recombinação e reionização
Polarização em modo B primordial	Ondas gravitacionais da inflação — ainda não detectada

Vale entender fisicamente o que são os picos. Antes da recombinação, fótons e bárions formavam um único fluido: a gravidade puxava o gás para dentro dos poços de potencial da matéria escura, e a pressão de radiação empurrava de volta. O resultado eram oscilações acústicas. Modos com comprimento de onda tal que completaram um número inteiro de meios ciclos no instante da recombinação ficaram congelados em amplitude máxima — e são esses os picos do espectro angular. A posição do primeiro pico depende do tamanho físico do horizonte sonoro (calculável) dividido pela distância até a superfície de último espalhamento (dependente da geometria), e é assim que a CMB mede curvatura.

A matéria escura tem papel indispensável nesse quadro: por não interagir com fótons, ela pôde começar a formar poços de potencial *antes* da recombinação, enquanto os bárions ainda estavam presos à radiação. Sem isso, não haveria tempo para formar as estruturas observadas hoje. A altura relativa dos picos mede diretamente quanto há de matéria que não sente pressão de radiação — é a evidência de matéria escura menos dependente de dinâmica galáctica de todas.

Formação de estruturas

As sementes deixadas pela inflação, com amplitude relativa de cerca de 10^{-5} , cresceram por instabilidade gravitacional. Em um universo dominado por matéria, perturbações crescem proporcionalmente ao fator de escala — lentamente, o que é justamente por que o universo levou bilhões de anos para formar galáxias. Quando a energia escura passa a dominar, o crescimento praticamente cessa: a expansão acelerada impede novas estruturas de se juntarem.

O cenário padrão é de matéria escura **fria**, com estruturas pequenas se formando primeiro e se fundindo em maiores — crescimento hierárquico. Simulações cosmológicas de N corpos reproduzem, a partir das condições iniciais medidas na CMB, a teia cósmica de filamentos, nós e vazios que os levantamentos de galáxias efetivamente observam. Essa concordância, entre uma condição inicial medida em $z \simeq 1100$ e uma distribuição observada em $z \lesssim 1$, é o principal argumento a favor do modelo Λ CDM como um todo.

Os pontos de atrito conhecidos estão em escalas pequenas: número de galáxias satélites, perfis de densidade no centro de halos, e a formação precoce de galáxias massivas que o JWST tem revelado (Capítulo 15). Se são falhas do modelo cosmológico ou da física bariônica das simulações — feedback de supernovas e de núcleos ativos — é uma discussão ativa.

Dedução curta: por que a recombinação ocorre a 3000 K e não a 10^5 K

A energia de ionização do hidrogênio é 13,6 eV, que corresponde a $E/k \simeq 1,6 \times 10^5$ K. Ingenuamente, o gás deveria recombinar-se por volta dessa temperatura. Mas o universo tem cerca de 10^9 fótons por bárion, e a cauda de alta energia da distribuição de corpo negro é populosa o suficiente para manter o hidrogênio ionizado muito abaixo disso.

Só quando a temperatura cai a aproximadamente 3000 K — um fator 50 menor — o número de fótons acima de 13,6 eV finalmente se torna insuficiente. Esse $z \simeq 1100$ é, portanto, consequência direta da razão fóton-bárion, o mesmo número que a nucleossíntese primordial mede. O quadro fecha por dentro.

Termodinâmica do universo primordial

Enquanto as reações são rápidas comparadas à expansão, as espécies permanecem em equilíbrio térmico. O critério é uma comparação de taxas:

$$\Gamma = n\langle\sigma v\rangle \quad \text{contra} \quad H.$$

Quando $\Gamma > H$, cada partícula interage muitas vezes por tempo de Hubble e o equilíbrio se mantém. Quando a expansão diluiu o suficiente para $\Gamma < H$, a espécie **desacopla** — suas abundâncias congelam. Todo o conteúdo relíquia do universo, de neutrinos a matéria escura, é fixado por esse balanço.

Na era dominada por radiação, $H = \sqrt{8\pi G\rho/3}$ com $\rho \propto T^4$, o que dá

$$H \simeq 1,66\sqrt{g_*}\frac{T^2}{M_{\text{Pl}}}, \quad M_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,18 \times 10^{-8} \text{ kg},$$

com g_* o número efetivo de graus de liberdade relativísticos. Combinando com $t \propto 1/H$, obtém-se a relação prática entre tempo e temperatura:

$$t \simeq \left(\frac{1 \text{ MeV}}{kT}\right)^2 \text{ s}.$$

Um segundo após o Big Bang, a temperatura era de 1 MeV, ou 10^{10} K. Essa fórmula de bolso organiza toda a cronologia primordial.

Dedução: a abundância primordial de hélio

Enquanto interações fracas mantêm o equilíbrio entre prótons e nêutrons via $n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-$,

a razão de abundâncias segue Boltzmann:

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\Delta mc^2/kT}, \quad \Delta mc^2 = 1,293 \text{ MeV}.$$

A taxa de interação fraca escala como $\Gamma \propto G_F^2 T^5$, enquanto $H \propto T^2$. Igualando as duas, o desacoplamento ocorre em $kT_{\text{dec}} \simeq 0,8 \text{ MeV}$, quando

$$\frac{n_n}{n_p} \simeq e^{-1,293/0,8} \simeq 0,20 \simeq \frac{1}{5}.$$

Depois disso a razão só muda por decaimento livre do nêutron ($\tau_n = 879 \text{ s}$). A nucleossíntese começa efetivamente em $t \simeq 200 \text{ s}$, quando o deutério para de ser fotodissociado, e nesse instante

$$\frac{n_n}{n_p} \simeq 0,20 \times e^{-200/879} \simeq 0,16 \simeq \frac{1}{7}.$$

Praticamente todos os nêutrons acabam em ${}^4\text{He}$, que precisa de dois nêutrons e dois prótons. A fração de massa de hélio é então

$$Y = \frac{2n_n}{n_n + n_p} = \frac{2(n_n/n_p)}{1 + n_n/n_p} = \frac{2/7}{8/7} = 0,25.$$

O valor observado é $Y = 0,247 \pm 0,003$. Toda essa previsão — um quarto da massa bariônica do universo em hélio — decorre de três números: a diferença de massa nêutron-próton, a força da interação fraca e a vida média do nêutron. Nenhum deles é astronômico. É provavelmente a previsão mais impressionante do modelo cosmológico padrão.

Recombinação via equação de Saha

A equação de Saha, deduzida no Capítulo 6, aplica-se diretamente ao plasma cosmológico. Escrevendo a fração de ionização $x_e = n_e/n_b$:

$$\frac{x_e^2}{1 - x_e} = \frac{1}{n_b} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi/kT}, \quad \chi = 13,6 \text{ eV}.$$

Com $n_b = \eta n_\gamma$ e $\eta \simeq 6 \times 10^{-10}$, o fator $1/n_b$ é enorme, e é ele que empurra a recombinação para temperaturas muito abaixo de χ/k . Resolvendo para $x_e = 0,5$ obtém-se $kT \simeq 0,30 \text{ eV}$, ou $T \simeq 3500 \text{ K}$, correspondendo a $z \simeq 1300$. Um tratamento fora de equilíbrio, considerando que a recombinação direta ao estado fundamental produz fótons que reionizam outro átomo, desloca a superfície de último espalhamento para $z \simeq 1090$.

Repare que o resultado depende de η , a razão bárion-fóton — a mesma quantidade que a nucleossíntese primordial mede pelas abundâncias leves. As duas determinações, separadas por trezentos mil anos de história cósmica e por física completamente distinta, concordam. Essa consistência é o principal argumento a favor do modelo do Big Bang quente, muito mais forte que qualquer observação isolada.

Crescimento de perturbações

Considere perturbações de densidade $\delta = \delta\rho/\rho$ em um universo em expansão. Linearizando as equações de continuidade, Euler e Poisson em coordenadas comóveis, obtém-se

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G\rho_m\delta + \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2\delta.$$

A estrutura é reveladora. O termo $4\pi G\rho_m\delta$ é a autogravidade que faz crescer; o termo com c_s^2 é a pressão que resiste — comparando os dois recupera-se o critério de Jeans do Capítulo 9, agora em versão cosmológica. E o termo $2H\dot{\delta}$ é um **atrito devido à expansão**: ele não existe em um meio estático e muda qualitativamente o resultado.

Para matéria sem pressão em um universo dominado por matéria, com $H = 2/3t$ e $4\pi G\rho_m = 2/3t^2$:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0.$$

Procurando soluções $\delta \propto t^n$: $n(n-1) + \frac{4}{3}n - \frac{2}{3} = 0$, com raízes $n = 2/3$ e $n = -1$. O modo crescente é

$$\delta \propto t^{2/3} \propto a$$

Este é um resultado central: em um universo em expansão dominado por matéria, perturbações crescem apenas *linearmente* com o fator de escala — não exponencialmente, como aconteceria em um meio estático. Partindo de $\delta \sim 10^{-5}$ na recombinação, o crescimento até hoje (a cresceu por 1100) leva a $\delta \sim 10^{-2}$: ainda linear. Estruturas colapsadas só existem porque a matéria escura começou a crescer *antes* da recombinação, quando os bárions ainda estavam presos à radiação e não podiam crescer. Sem matéria escura, o universo observado não teria tido tempo de formar galáxias — e este é o argumento cosmológico mais forte a favor dela.

Na era dominada por Λ , H torna-se constante e a equação passa a ter apenas soluções decrescentes ou constantes: o crescimento de estruturas cessa. Estamos vivendo o fim da formação de estruturas no universo.

Inflação: as condições quantitativas

Um campo escalar ϕ com potencial $V(\phi)$ tem densidade de energia e pressão

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad P = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi).$$

Se o campo evolui devagar, $\dot{\phi}^2 \ll V$, então $P \simeq -\rho$: exatamente a equação de estado que produz expansão acelerada. Esta é a ideia inteira da inflação.

As condições de rolamento lento são quantificadas pelos parâmetros

$$\epsilon = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1, \quad |\eta| = M_{\text{Pl}}^2 \left| \frac{V''}{V} \right| \ll 1,$$

que exigem um potencial suficientemente plano. O número de **e-folds** de expansão é

$$N = \int H dt = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V'} d\phi,$$

e resolver os problemas do horizonte e da planura exige $N \gtrsim 60$. Esse número não é arbitrário: ele sai de exigir que a região hoje observável tenha estado em contato causal antes da inflação, e a conta é uma comparação entre o horizonte comóvel de então e o de hoje.

A previsão testável vem das flutuações quânticas do campo, esticadas a escalas macroscópicas. O espectro de potência resultante tem índice espectral

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta,$$

ligeiramente menor que 1 para potenciais típicos. O valor medido pelo Planck, $n_s = 0,965 \pm 0,004$, é significativamente diferente de 1 e na direção prevista — é a confirmação quantitativa mais direta da inflação disponível hoje. A razão entre modos tensoriais e escalares, $r = 16\epsilon$, ainda não foi detectada, e seu limite superior já elimina classes inteiras de potenciais.

O espectro angular da CMB, elemento por elemento

As flutuações de temperatura são expandidas em harmônicos esféricos,

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \varphi) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad C_\ell = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle,$$

e o espectro C_ℓ é o observável fundamental. A relação entre multipolo e escala angular é $\theta \simeq 180^\circ/\ell$.

A física por trás de cada característica:

- **Posição do primeiro pico**, $\ell \simeq 220$. Corresponde ao modo que completou meia oscilação até a recombinação, isto é, à escala do horizonte sonoro. Como $\theta_1 = r_s/D_A$, e r_s é calculável, a posição mede D_A — e portanto a curvatura. Um universo fechado desviaria o pico para ℓ menor.
- **Altura relativa dos picos ímpares e pares**. Picos ímpares correspondem a compressões máximas, pares a rarefações. Os bárions, por sua inércia, favorecem as compressões: aumentar Ω_b eleva os picos ímpares em relação aos pares. É assim que a densidade bariônica é medida.
- **Altura do terceiro pico**. Sensível à densidade total de matéria, porque a matéria escura determina quanto os poços de potencial já haviam crescido.
- **Amortecimento em $\ell \gtrsim 1000$** . A recombinação não é instantânea; fótons difundem por uma distância finita (amortecimento de Silk) e apagam flutuações de escala menor.
- **Variância cósmica**. Para cada ℓ há apenas $2\ell + 1$ modos independentes, de modo que a incerteza irreduzível é $\Delta C_\ell/C_\ell = \sqrt{2/(2\ell + 1)}$. Em multipolos baixos ela chega a dezenas de por cento — e nenhum experimento futuro pode melhorá-la, porque existe um único universo a observar.

Anisotropias primárias: a decomposição de Sachs-Wolfe

As flutuações de temperatura observadas na superfície de último espalhamento têm três contribuições distintas, e a soma delas é o que os experimentos medem:

$$\frac{\Delta T}{T} = \underbrace{\frac{1}{4}\delta_\gamma + \frac{\Phi}{c^2}}_{\text{Sachs-Wolfe}} + \underbrace{\frac{\vec{v} \cdot \hat{n}}{c}}_{\text{Doppler}} + \underbrace{\frac{2}{c^2} \int \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt}_{\text{SW integrado}}.$$

O termo **Sachs-Wolfe** combina a densidade intrínseca de fótons com o desvio gravitacional para o vermelho ao escapar do poço de potencial. Os dois efeitos têm sinais opostos e se cancelam parcialmente; para um universo dominado por matéria, o resultado líquido é $\Delta T/T = \Phi/3c^2$. Uma região mais densa aparece *mais fria*, porque a perda de energia ao escapar supera o excesso de temperatura. Este é um resultado contraintuitivo que domina as escalas angulares grandes ($\ell \lesssim 50$).

O termo **Doppler** vem da velocidade do fluido no instante do desacoplamento e contribui com máximos deslocados de 90° em relação aos picos de compressão — é ele que preenche os vales entre picos acústicos.

O termo **Sachs-Wolfe integrado** aparece quando os potenciais gravitacionais evoluem no tempo ao longo do trajeto do fóton. Em um universo dominado por matéria, os potenciais são constantes e o termo se anula. Ele reaparece em épocas dominadas por radiação e, crucialmente, em épocas dominadas por energia escura — e é por isso que a correlação entre a CMB em grandes escalas e a distribuição de galáxias no universo próximo constitui evidência independente de Λ .

Polarização: por que ela existe

O espalhamento Thomson produz polarização apenas se a radiação incidente sobre o elétron tiver *anisotropia de quadrupolo*. Se o campo é isotrópico, ou tem apenas dipolo, as contribuições se cancelam por simetria.

Antes da recombinação, o forte acoplamento entre fótons e bárions apaga qualquer quadrupolo. Ele só aparece quando o livre caminho médio dos fótons se torna comparável ao comprimento de onda da perturbação, isto é, exatamente durante a breve janela do desacoplamento. A polarização da CMB, portanto, é gerada em uma casca fina e traz informação essencialmente independente da temperatura — razão pela qual sua medida melhorou tanto as restrições cosmológicas.

O campo de polarização é decomposto em dois modos com paridades distintas:

- **Modos E**, com padrão radial ou tangencial em torno de pontos quentes e frios. São gerados por perturbações escalares de densidade, e já foram medidos com alta significância.
- **Modos B**, com padrão em turbilhão. Perturbações escalares *não* podem gerá-los em primeira ordem — essa é a propriedade decisiva. Eles só surgem de ondas gravitacionais primordiais ou de lentes gravitacionais deformando modos E ao longo do caminho.

A busca por modos B primordiais é, portanto, uma busca direta pelo fundo de ondas gravitacionais produzido pela inflação, e sua amplitude relativa r mede a escala de energia inflacionária:

$$V^{1/4} \simeq 1,06 \times 10^{16} \text{ GeV} \left(\frac{r}{0,01} \right)^{1/4}.$$

Detectá-los seria medir física em energias treze ordens de grandeza acima de qualquer acelerador. Os modos B de lente já foram detectados; os primordiais, não, e o limite atual é $r < 0,03$ aproximadamente.

Efeito Sunyaev-Zel'dovich

Fótons da CMB atravessando o gás quente de um aglomerado de galáxias sofrem espalhamento Compton inverso com elétrons de $\sim 10^7\text{--}10^8$ K, ganhando energia. O espectro do corpo negro é distorcido: fótons são removidos das frequências baixas e adicionados às altas, com um ponto nulo em 217 GHz. A amplitude é dada pelo parâmetro de Compton

$$y = \int \frac{kT_e}{m_e c^2} n_e \sigma_T d\ell.$$

Duas propriedades tornam o efeito extraordinariamente útil. Primeira: y depende de $\int n_e d\ell$, ou seja, da *primeira* potência da densidade, enquanto a emissão em raios X depende de n_e^2 . Combinando as duas medidas separa-se densidade de extensão espacial. Segunda, e mais importante: como a distorção é uma *fração* da CMB de fundo, sua amplitude **não depende da distância**. Um aglomerado em $z = 1$ produz o mesmo sinal que um idêntico em $z = 0,1$. Levantamentos SZ são, por isso, aproximadamente limitados por massa e não por brilho — e produzem catálogos de aglomerados quase completos em massa até altos desvios para o vermelho, ideais para cosmologia de contagens.

Reionização e a profundidade óptica

Depois da recombinação, o universo permaneceu neutro por centenas de milhões de anos — a idade das trevas — até que as primeiras fontes ionisassem novamente o hidrogênio. A fração de fótons da

CMB que sofreram espalhamento após a reionização é quantificada pela profundidade óptica

$$\tau = \int n_e \sigma_T c dt,$$

cujo valor medido é $\tau \simeq 0,054$, correspondendo a reionização em torno de $z \simeq 7-8$.

O efeito sobre o espectro é duplo e vale conhecer, porque gera uma degenerescência famosa: o espalhamento suprime as anisotropias em pequenas escalas por um fator $e^{-2\tau}$ e gera polarização em escalas grandes. A supressão é indistinguível de uma redução da amplitude primordial A_s , de modo que a CMB mede bem a combinação $A_s e^{-2\tau}$ e mal cada uma isoladamente. Como σ_8 depende de A_s , essa degenerescência propaga-se para as restrições sobre crescimento de estruturas — e é uma das razões pelas quais medidas independentes de σ_8 , por lentes fracas ou por contagem de aglomerados, são tão valiosas.

O fundo de neutrinos cósmicos

Neutrinos desacoplam quando $\Gamma_{\text{fraca}} < H$, em $kT \simeq 1 \text{ MeV}$, antes da aniquilação de pares elétron-pósitron. Essa aniquilação despeja entropia apenas nos fótons, aquecendo-os relativamente aos neutrinos. A conservação de entropia comóvel fornece o fator exato:

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} = 0,714.$$

Hoje, com $T_\gamma = 2,725 \text{ K}$, isso dá $T_\nu = 1,95 \text{ K}$ e uma densidade de ~ 112 neutrinos por centímetro cúbico por espécie. É a segunda relíquia mais abundante do universo, depois dos fótons — e ainda não foi detectada diretamente, porque neutrinos dessa energia interagem quase nada.

Sua presença, porém, é medida indiretamente. O número efetivo de espécies relativísticas,

$$N_{\text{ef}} = 3,044,$$

afeta a taxa de expansão na era da radiação e, portanto, tanto as abundâncias primordiais quanto a posição dos picos acústicos. As medidas da CMB confirmam esse valor com precisão de alguns por cento. E como neutrinos massivos deixam de ser relativísticos em época tardia, eles suprimem o crescimento de estruturas em pequenas escalas por uma fração $\Delta P/P \simeq -8\Omega_\nu/\Omega_m$ — o que transforma levantamentos de galáxias em balanças de massa de neutrino, hoje já competitivas com experimentos de laboratório.

Perguntas para discussão.

- Por que a inflação seria uma teoria fraca se apenas resolvesse os três problemas listados?
- A nucleossíntese primordial e a CMB medem a densidade bariônica de modos independentes. Por que a concordância entre elas é tão significativa?
- Que papel a matéria escura desempenha nos picos acústicos, e por que ele não pode ser desempenhado por bárions?
- Se modos B primordiais fossem detectados, o que exatamente isso demonstraria?

Capítulo 18 – Astronomia do domínio do tempo e grandes levantamentos

Durante quase toda a história da astronomia, o céu foi tratado como fixo: mediam-se posições, brilhos e espectros de objetos que se supunham imutáveis na escala de uma carreira humana. Essa suposição sempre foi falsa — novas, supernovas e estrelas variáveis eram conhecidas —, mas só agora existem instrumentos capazes de fotografar o céu inteiro repetidamente e transformar a variabilidade em uma medida sistemática. É a chamada astronomia do domínio do tempo, e ela reorganizou a área nos últimos quinze anos.

Variabilidade é uma grandeza física

Quando o brilho de um objeto muda em um intervalo Δt , a região responsável pela mudança não pode ser muito maior que $c \Delta t$: partes mais distantes que isso não teriam como se coordenar. Essa régua causal é o observável mais bruto e mais robusto da astronomia variável. Um núcleo ativo que varia em horas tem região emissora menor que o Sistema Solar interno, apesar de brilhar mais que uma galáxia inteira.

Além do tamanho, a forma da variação carrega física: a escala de decaimento de uma supernova reflete a massa de níquel radioativo sintetizada; o período de uma Cefeida está ligado à sua luminosidade; a profundidade de um trânsito dá a razão de raios (Capítulo 13); a modulação de uma binária eclipsante entrega inclinação e razão de tamanhos. Curvas de luz não são gráficos auxiliares — em muitos casos, são *o* dado.

Da observação ao modelo

Observável	Grandeza inferida	Hipótese ou calibração necessária
curva de luz, escala de tempo de variação, período, amplitude, cor em função do tempo	tamanho da região emissora, massa ejetada, energia total, tipo de progenitor, distância	amostragem temporal adequada, calibração fotométrica estável, classificação espectroscópica de acompanhamento

Pergunta de checagem: A escala de tempo medida é do fenômeno ou do intervalo entre observações?

O zoológico dos transientes

Classes principais e o que cada uma ensina

Fenômeno	Escala de tempo	Física envolvida
Surto de raios gama	s a min	Colapso de estrela massiva ou fusão compacta; jato relativístico
Rápida rajada de rádio (FRB)	ms	Provavelmente magnetares; sonda de bárions intergalácticos
Quilonova	dias	Decaimento radioativo de material do processo r
Supernova Ia	semanas	Explosão termonuclear de anã branca; vela padrão
Supernova II	meses	Colapso de núcleo de estrela massiva
Disrupção de maré (TDE)	meses	Estrela dilacerada por buraco negro supermassivo
Núcleo ativo	horas a anos	Acreção variável em disco
Micro lente gravitacional	dias a meses	Massa compacta cruzando a linha de visada

Duas dessas classes merecem comentário por serem recentes.

Rápidas rajadas de rádio. Descobertas em 2007, são pulsos de rádio de poucos milissegundos, tão intensos que implicam mecanismos coerentes de emissão. A régua causal já diz muito: $c \times 1 \text{ ms} = 300 \text{ km}$, escala de objeto compacto. Em 2020, um surto desse tipo foi detectado vindo de um magnetar da própria Via Láctea, SGR 1935+2154, o que amarrrou pelo menos parte da população a estrelas de nêutrons altamente magnetizadas. O radiotelescópio CHIME transformou o campo ao passar de dezenas para milhares de eventos catalogados.

Disrupções de maré. Quando uma estrela passa perto demais de um buraco negro supermassivo, a diferença de força gravitacional entre os dois lados da estrela supera sua autogravidade e ela é despedaçada. Parte do material cai, forma disco e produz um clarão que dura meses. Esses eventos são a maneira mais direta de flagrar buracos negros supermassivos em galáxias quiescentes, que de outro modo seriam invisíveis.

Dedução curta: a medida de dispersão como régua cósmica

Um pulso de rádio atravessando plasma ionizado não viaja com velocidade única: fótons de frequência mais baixa são retardados. O atraso entre duas frequências $\nu_1 > \nu_2$ vale

$$\Delta t \propto \text{DM} \left(\frac{1}{\nu_2^2} - \frac{1}{\nu_1^2} \right), \quad \text{DM} = \int_0^d n_e dl,$$

em que DM é a **medida de dispersão**, a densidade de elétrons integrada ao longo do caminho. Para um pulsar da Galáxia, conhecendo um modelo de distribuição de elétrons, a DM fornece distância.

Para uma FRB extragaláctica, o raciocínio se inverte: se a distância é obtida identificando a galáxia hospedeira, a DM mede quantos elétrons existem *entre* as galáxias. Foi assim que se localizou boa parte dos bárions que faltavam no inventário cósmico — eles estão em gás difuso e quente no meio intergaláctico, praticamente invisível em qualquer outra técnica. Um pulso de um milissegundo virou instrumento de contabilidade cosmológica.

A escala industrial: de observações a alertas

O modo de trabalho mudou junto com os instrumentos. Levantamentos como ZTF, ATLAS e Pan-STARRS já operam por comparação automática de imagens: cada nova exposição é subtraída de uma imagem de referência, e tudo que sobra vira um **alerta** — um pacote de dados com posição, brilho, histórico e recortes de imagem, publicado em tempo quase real. O Observatório Vera C. Rubin levará isso ao limite, com a expectativa de milhões de alertas por noite ao longo dos dez anos do LSST.

Nenhum ser humano lê milhões de alertas. Entre o telescópio e o astrônomo entram os *brokers* — sistemas como ALeRCE, Fink, ANTARES e Lasair — que filtram, classificam e priorizam. A classificação usa aprendizado de máquina treinado em eventos já rotulados, e é aqui que a estatística deixa de ser detalhe: com milhões de candidatos e poucas centenas de espectros de acompanhamento por noite disponíveis no mundo inteiro, decidir *o que observar em seguida* passa a ser o gargalo científico.

Isso cria um problema epistemológico que merece atenção: se um classificador automático foi treinado com os transientes já conhecidos, ele tende a ser bom exatamente no que já sabíamos e cego para o que é novo. Descobrir classes inéditas exige, deliberadamente, olhar para o que o algoritmo classificou mal.

Exemplo de aplicação: quantas supernovas cabem em uma noite

A taxa de supernovas em uma galáxia como a Via Láctea é da ordem de uma a cada 50 anos, ou 2×10^{-2} por ano. A densidade de galáxias grandes é aproximadamente 10^{-2} Mpc^{-3} . Um levantamento capaz de detectar supernovas até 500 Mpc cobre um volume

$$V = \frac{4}{3}\pi(500)^3 \simeq 5,2 \times 10^8 \text{ Mpc}^3,$$

contendo $\sim 5 \times 10^6$ galáxias grandes. A taxa esperada é então

$$5 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-2} \text{ ano}^{-1} \simeq 10^5 \text{ supernovas por ano},$$

ou centenas por noite se a cobertura do céu fosse completa. A ordem de grandeza explica por que a astronomia de transientes só se tornou possível com detectores de campo amplo e processamento automático: a natureza fornece eventos de sobra; o que faltava era capacidade de olhar e de decidir.

Periodicidade e o que se pode extrair dela

Nem toda variabilidade é transiente. Boa parte é periódica: pulsação estelar, rotação com manchas, eclipses, trânsitos, pulsares. Extrair um período de uma série irregularmente amostrada é um problema técnico recorrente, resolvido usualmente pelo periodograma de Lomb-Scargle, uma adaptação da análise de Fourier para amostragem desigual.

O cuidado central é o **aliasing**: se um objeto é observado uma vez por noite, qualquer periodicidade real interage com o ritmo de 24 h da própria observação, e períodos espúrios aparecem. Um período de exatamente um dia, ou de um mês sinódico, deve sempre ser tratado como suspeito até prova em contrário. Essa é uma lição geral: o padrão de amostragem imprime assinaturas nos dados que podem ser confundidas com física.

Análise de séries temporais irregulares

Séries astronômicas quase nunca são amostradas uniformemente: há noites nubladas, alvos que se põem, satélites que interrompem observação. A transformada discreta de Fourier padrão pressupõe amostragem regular e falha. A ferramenta correta é o **periodograma de Lomb-Scargle**, que é matematicamente equivalente a ajustar, para cada frequência de teste ω , um modelo senoidal por mínimos quadrados:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{[\sum_i y_i \cos \omega(t_i - \tau)]^2}{\sum_i \cos^2 \omega(t_i - \tau)} + \frac{[\sum_i y_i \sin \omega(t_i - \tau)]^2}{\sum_i \sin^2 \omega(t_i - \tau)} \right\},$$

com o deslocamento τ definido por

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_i \sin 2\omega t_i}{\sum_i \cos 2\omega t_i}.$$

Esse τ é escolhido justamente para tornar o periodograma invariante a translações no tempo — propriedade que a transformada ingênua perde com amostragem irregular.

A distribuição estatística sob a hipótese nula de ruído gaussiano é conhecida: para uma única frequência, $P(\omega)$ segue distribuição exponencial. A probabilidade de que *alguma* das N_f frequências independentes testadas exceda um valor z por acaso é

$$\text{FAP} = 1 - (1 - e^{-z})^{N_f} \simeq N_f e^{-z}.$$

Aqui reaparece, de forma explícita, o problema das buscas múltiplas do Capítulo 19: quanto mais frequências se testa, maior o limiar necessário. Um pico com $\text{FAP} = 10^{-3}$ em uma busca de mil frequências não é significativo.

A janela de amostragem e o aliasing

A série observada é o produto do sinal verdadeiro por uma função janela $W(t)$, que vale 1 quando há observação e 0 quando não há. No espaço de Fourier, produto vira convolução:

$$\tilde{y}_{\text{obs}}(\nu) = \tilde{y}(\nu) * \tilde{W}(\nu).$$

Todo pico real, portanto, aparece *replicado* nas frequências características da janela. Para observações noturnas, $\tilde{W}$ tem picos em 1 dia^{-1} e harmônicos; para dados de satélite em órbita baixa, em $\sim 15 \text{ dia}^{-1}$; para campanhas anuais, em 1 ano^{-1} .

A consequência prática é uma regra que deve ser automática: ao encontrar um período, calcule também $1/(1/P \pm 1)$ e verifique se o candidato alternativo não é o verdadeiro. Períodos suspeitosamente próximos de um dia, meio dia, um mês sinódico ou um ano devem ser tratados como artefatos até prova em contrário. Muitos “planetas” e “rotações estelares” publicados foram, na verdade, de janela de observação.

Filtragem casada: extrair sinal conhecido de ruído

Quando se conhece a forma do sinal procurado, existe um filtro ótimo. Seja $s(t)$ o modelo e $n(t)$ o ruído com densidade espectral $S_n(f)$. A estatística de detecção ótima é o produto interno ponderado

$$\langle d | s \rangle = 4 \text{Re} \int_0^\infty \frac{\tilde{d}^*(f) \tilde{s}(f)}{S_n(f)} df,$$

e o sinal-ruído resultante é $\rho = \langle s|s \rangle^{1/2}$. A ponderação por $1/S_n(f)$ é o ponto essencial: frequências ruidosas são automaticamente desvalorizadas. Este é o método usado na detecção de ondas gravitacionais (Capítulo 11), em que um banco de dezenas de milhares de formas de onda teóricas é correlacionado com os dados; e é também o princípio do algoritmo *box least squares*, padrão na busca de trânsitos planetários, no qual o modelo é simplesmente uma caixa de profundidade e duração ajustáveis.

O ganho é substancial. Um sinal de duração T e banda Δf enterrado em ruído tem seu sinal-ruído amplificado por $\sqrt{T\Delta f}$ ao ser filtrado corretamente — razão pela qual GW150914, invisível a olho nu nos dados brutos, aparece com $\rho \simeq 24$ após filtragem.

Estatística de detecção em regime de poucos eventos

Para transientes raros, a pergunta relevante é frequentemente: quantos eventos esperar? Se a taxa volumétrica é $\mathcal{R}$ e o levantamento tem volume efetivo V_{ef} e tempo T , o número esperado é $\lambda = \mathcal{R}V_{\text{ef}}T$, e a probabilidade de observar n eventos é poissoniana.

Se nenhum evento for detectado, o limite superior a 95% de confiança é obtido de $e^{-\lambda} = 0,05$, ou seja $\lambda < 3,0$. Este é o famoso “limite de três eventos”, usado constantemente para converter não detecções em limites astrofísicos. Se três eventos forem detectados, o intervalo de confiança de Poisson é aproximadamente $[0,6; 8,8]$ — assimétrico e largo, e é por isso que taxas estimadas a partir de poucos eventos, como as de fusões de estrelas de nêutrons ou de objetos interestelares, carregam incertezas de mais de uma ordem de grandeza.

O **volume efetivo** não é o volume geométrico: ele precisa incorporar a probabilidade de detecção em função da distância e das propriedades do objeto,

$$V_{\text{ef}} = \int p_{\text{det}}(z, \theta) \frac{dV}{dz} dz p(\theta) d\theta.$$

Estimar p_{det} costuma exigir injeção de sinais sintéticos no *pipeline* real e contagem de quantos são recuperados — procedimento chamado de teste de injeção e recuperação, e que hoje é considerado parte obrigatória de qualquer levantamento sério.

Classificação: métricas que importam

Com milhões de candidatos e poucos recursos de acompanhamento, a qualidade de um classificador não se mede por acurácia. Se apenas um em mil alertas é uma supernova real, um classificador que diga sempre “não é supernova” acerta 99,9% das vezes e é inútil.

As métricas relevantes são

$$\text{pureza} = \frac{VP}{VP + FP}, \quad \text{completeza} = \frac{VP}{VP + FN},$$

com VP , FP e FN os verdadeiros positivos, falsos positivos e falsos negativos. As duas estão em tensão: elevar o limiar aumenta pureza e reduz completeza. A curva que descreve esse compromisso é a curva de precisão-revoação, e a escolha do ponto de operação é uma decisão *científica*, não técnica — depende de quanto custa perder um evento raro comparado a desperdiçar tempo de telescópio com um falso positivo.

Para populações muito desbalanceadas, a área sob a curva ROC é enganosa, porque é dominada pelo comportamento na região de muitos verdadeiros negativos. Reportar apenas acurácia ou área ROC em um problema de transientes é, na prática, esconder o desempenho no regime que importa.

Perguntas para discussão.

- Um objeto varia significativamente em 10 min. Qual é o tamanho máximo da região responsável? O que isso exclui?
- Por que um levantamento com boa cadência pode ser mais valioso que outro mais profundo, dependendo da pergunta?
- Quais vieses um classificador automático treinado em transientes conhecidos introduz no catálogo final?
- Uma FRB e um pulsar produzem pulsos dispersos. Como distinguir uma origem galáctica de uma extragaláctica usando só a DM?
- Por que a espectroscopia de acompanhamento se tornou o recurso mais disputado da astronomia de transientes?

Para praticar. Escolha um alerta público recente em um dos *brokers* (ALeRCE ou Fink têm interface aberta) e reconstrua a história do objeto: quando apareceu, como o brilho evoluiu em cada filtro, que classificação automática recebeu e com que confiança. Depois, argumente por escrito se você concorda com a classificação e diga qual observação adicional decidiria a questão. Este exercício treina exatamente o julgamento que separa dado de conclusão.

Capítulo 19 – Dados astronômicos, incerteza e inferência

Bloco Métodos. Este capítulo atravessa todo o curso. Ele transforma a apostila em material de graduação ao insistir que astrofísica não é coleção de objetos: é inferência física a partir de dados imperfeitos.

Como estudar este bloco: Sempre escreva três linhas antes de resolver um problema: o que foi observado, o que será inferido e qual hipótese sustenta a ponte entre os dois.

Uma medida astronômica raramente entrega diretamente a grandeza desejada. O detector mede contagens; a redução transforma contagens em fluxo; a calibração converte fluxo em magnitude ou luminosidade; o modelo interpreta luminosidade, cor, espectro ou variabilidade como temperatura, massa, composição ou distância. A cadeia pode ser excelente, mas precisa ser explícita.

Tabela 3: Cadeias de inferência frequentes em astrofísica.

Observável	Inferência comum	Risco principal	Checagem recomendada
paralaxe	distância	erro relativo grande para paralaxe pequena	comparar com outros indicadores
cor	temperatura	poeira e metalicidade	usar espectro ou correção de extinção
linha deslocada	velocidade radial/redshift	identificação errada da linha	procurar múltiplas linhas
curva de luz	raio, período, geometria	manchas, binaridade, ruído	observar vários ciclos
velocidade orbital	massa dinâmica	inclinação e distribuição de massa	combinar com imagem/modelo

Incerteza não é detalhe burocrático; é parte da conclusão. Uma distância com erro de 20% produz erro de aproximadamente 40% em luminosidade, pois $L \propto d^2$ para fluxo fixo. Uma linha espectral fraca pode ser ruído; uma correlação pode ser seleção observacional; uma amostra brilhante pode excluir objetos fracos e distantes. Bons resultados astrofísicos não eliminam incertezas: eles mostram que a conclusão sobrevive a elas.

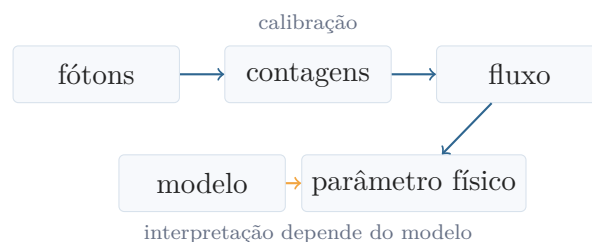


Figura 25: **Da detecção à física.** O dado bruto passa por calibração e modelo antes de virar massa, temperatura, distância ou composição.

Roteiro de leitura de gráficos. Primeiro descreva eixos e unidades. Depois identifique tendência,

dispersão e pontos fora do padrão. Só então escreva a interpretação física. Se a interpretação vier antes da descrição, você provavelmente está vendo no gráfico o que esperava ver.

Dedução curta: propagação de erro em luminosidade

Se a luminosidade é inferida por $L = 4\pi d^2 F$, então erros relativos pequenos obedecem aproximadamente

$$\frac{\Delta L}{L} \simeq 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta F}{F},$$

quando queremos uma estimativa conservadora de ordem de grandeza. Para erros independentes, usa-se soma em quadratura:

$$\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 \simeq \left(2 \frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_F}{F}\right)^2.$$

O fator 2 diante da distância é crucial. Uma distância ruim contamina fortemente luminosidade, raio inferido e qualquer conclusão evolutiva baseada neles.

Exemplo de aplicação: significância simples

Suponha que duas medidas de velocidade radial de uma estrela diferem por 6 m s^{-1} , e cada medida tem incerteza de 2 m s^{-1} . A incerteza da diferença é aproximadamente $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2,8 \text{ m s}^{-1}$. A diferença corresponde a cerca de $2,1\sigma$. Isso é sugestivo, mas não conclusivo. Para declarar um planeta por velocidade radial, seria necessário ver periodicidade, consistência em muitos pontos e descartar atividade estelar.

Do ajuste ao argumento físico

Um ajuste matemático só vira argumento astrofísico quando os resíduos fazem sentido. Depois de ajustar uma reta, curva de luz ou modelo espectral, examine: os resíduos têm padrão? aumentam em uma região específica? coincidem com baixa razão sinal-ruído? Um modelo errado pode ter χ^2 aparentemente aceitável se as incertezas foram superestimadas; um modelo correto pode parecer ruim se há erro sistemático não modelado. Dados astronômicos pedem humildade quantitativa.

Inferência bayesiana em uma página

Boa parte da astrofísica moderna não ajusta curvas: ela infere parâmetros com incerteza, e o vocabulário dominante é bayesiano. A estrutura é simples,

$$P(\theta | D) \propto P(D | \theta) P(\theta),$$

em que θ são os parâmetros do modelo, D os dados, $P(D|\theta)$ a verossimilhança e $P(\theta)$ o *prior*. O resultado, $P(\theta|D)$, é a distribuição *posterior*: não um número, mas uma região de plausibilidade.

Três consequências práticas merecem destaque. Primeira, o prior é uma escolha explícita e precisa ser declarado — em análises de ondas gravitacionais ou de energia escura dinâmica, resultados diferentes frequentemente refletem priors diferentes, não dados diferentes. Segunda, degenerescências aparecem naturalmente: se dois parâmetros afetam os dados de maneira parecida, a posterior é alongada em uma direção e nenhum dos dois é bem determinado sozinho, ainda que a combinação seja. Terceira, a posterior raramente tem forma analítica, e por isso se amostra numericamente, tipicamente por cadeias de Markov (MCMC) ou amostragem aninhada.

Dedução curta: por que χ^2 é um caso particular

Se os erros são gaussianos e independentes, com desvios σ_i , a verossimilhança é

$$P(D|\theta) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_i \frac{(d_i - m_i(\theta))^2}{\sigma_i^2} \right] = \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right).$$

Com prior uniforme, maximizar a posterior equivale a minimizar χ^2 — o velho ajuste de mínimos quadrados é o caso bayesiano mais simples possível. Isso deixa claro *quando* ele deixa de valer: erros não gaussianos, correlacionados, ou informação prévia relevante. Contagens de fótons em regime de poucos eventos, por exemplo, seguem Poisson, e usar χ^2 ali envia o resultado sistematicamente.

Vieses que não são erros de medida

Alguns dos enganos mais persistentes da astronomia não vêm de instrumentos ruins, mas da forma como as amostras se constituem.

O **viés de Malmquist** é o mais famoso: em uma amostra limitada por brilho aparente, objetos intrinsecamente mais luminosos são vistos a distâncias maiores. A luminosidade média da amostra cresce com a distância, mesmo que a população real seja idêntica em todo lugar. Ignorar isso já produziu conclusões inteiras sobre evolução de galáxias que depois se dissolveram.

O **viés de Eddington** é mais sutil: quando uma população cai rapidamente com o brilho e há erro de medida, mais objetos fracos são espalhados para cima do que brilhantes para baixo, simplesmente porque há mais objetos fracos. Contagens perto do limite de detecção ficam sistematicamente infladas.

A regra geral é que **completeza** precisa ser modelada, não assumida. Em qualquer catálogo, a pergunta “o que eu teria detectado se existisse?” antecede a pergunta “o que existe?”.

Aprendizado de máquina: onde ajuda e onde engana

Com levantamentos produzindo milhões de objetos por noite (Capítulo 18), classificação automática deixou de ser opcional. Redes neurais e florestas aleatórias hoje classificam morfologia de galáxias, separam estrelas de quasares, detectam lentes gravitacionais e triam alertas de transientes com desempenho que nenhum humano alcançaria em volume.

Os cuidados, porém, são específicos e vale enunciá-los:

- **O conjunto de treino define o horizonte.** Um classificador aprende a reproduzir os rótulos que recebeu. Se o treino veio de objetos brilhantes e bem observados, o desempenho em objetos fracos é desconhecido, não “provavelmente parecido”.
- **Incerteza calibrada não é automática.** Muitos modelos produzem probabilidades excessivamente confiantes. Uma saída de 0,99 só significa 99% se o modelo foi calibrado para isso.
- **Correlação espúria é frequente.** Um modelo pode aprender a identificar o instrumento em vez do objeto — e funcionar perfeitamente até mudar o instrumento.
- **Descobertas ficam nos erros.** Objetos mal classificados são, por construção, os que não se parecem com nada conhecido. Vale mais examinar essa lista do que celebrar a acurácia global.

Nada disso desqualifica a técnica; apenas a coloca no lugar certo, como instrumento de triagem cuja saída ainda precisa ser verificada por física.

Reprodutibilidade como parte do método

Um resultado astrofísico moderno é, na prática, um *pipeline*: dados brutos, calibração, redução, seleção de amostra, modelo, inferência. Cada etapa contém escolhas. A convenção crescente na área — arquivos públicos, código aberto, cadernos executáveis — existe porque a alternativa não é auditável. Quando você fizer os projetos do Capítulo 20, guarde as versões de dados usadas e registre as escolhas de corte: isso não é burocracia, é o que separa um resultado de uma impressão.

Perguntas para discussão.

- Em que situação minimizar χ^2 dá a resposta errada, e por quê?
- Como você detectaria viés de Malmquist em um catálogo que já recebeu pronto?
- Um classificador tem 98% de acurácia. Que informação ainda falta para confiar nele?
- Por que declarar o prior é obrigação e não formalidade?

Propagação de incertezas, deduzida

Se uma grandeza f depende de variáveis medidas x_i com incertezas σ_i , expanda em série de Taylor em torno dos valores centrais:

$$f(\vec{x} + \delta\vec{x}) \simeq f(\vec{x}) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Tomando a variância e supondo variáveis independentes (de modo que $\langle \delta x_i \delta x_j \rangle = \sigma_i^2 \delta_{ij}$):

$$\sigma_f^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2$$

Se houver correlações, o termo cruzado não desaparece:

$$\sigma_f^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{Cov}(x_i, x_j).$$

Ignorar covariâncias é um dos erros mais frequentes em análise astronômica — e frequentemente subestima a incerteza final, porque parâmetros ajustados simultaneamente quase sempre são correlacionados.

Dois casos particulares que aparecem o tempo todo. Para produtos e razões, $f = x^a y^b$, a fórmula geral dá

$$\left(\frac{\sigma_f}{f} \right)^2 = a^2 \left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + b^2 \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2 :$$

incertezas *relativas* se somam em quadratura, ponderadas pelos expoentes. Por isso a massa de uma galáxia obtida de $M = v^2 r / G$ tem incerteza relativa $\sqrt{4(\sigma_v/v)^2 + (\sigma_r/r)^2}$ — o erro na velocidade conta em dobro.

Para a distância obtida de paralaxe, $d = 1/p$, a propagação dá $\sigma_d/d = \sigma_p/p$. Mas atenção: essa relação só vale enquanto $\sigma_p/p \ll 1$. Quando a paralaxe é medida com baixa significância, a distribuição de $1/p$ é fortemente assimétrica e tem média divergente — inverter a paralaxe passa a ser estatisticamente inválido, e é preciso inferência bayesiana com prior espacial. Esse é um problema real e cotidiano nos catálogos do Gaia.

Mínimos quadrados na forma matricial

Para um modelo linear nos parâmetros, $y_i = \sum_k A_{ik}\theta_k$, com incertezas σ_i , define-se a matriz de pesos $W = \text{diag}(1/\sigma_i^2)$. Minimizando

$$\chi^2 = (\vec{y} - A\vec{\theta})^T W (\vec{y} - A\vec{\theta})$$

em relação a $\vec{\theta}$, isto é, impondo $\partial\chi^2/\partial\theta_k = 0$, obtém-se a equação normal:

$$\hat{\vec{\theta}} = (A^T W A)^{-1} A^T W \vec{y}$$

e a matriz de covariância dos parâmetros ajustados é simplesmente

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) = (A^T W A)^{-1}.$$

Este resultado é exato — não é aproximação — para modelos lineares com ruído gaussiano, e fornece de graça as correlações entre parâmetros. Ajustar uma reta $y = a + bx$ pelos mínimos quadrados sempre produz correlação entre coeficiente linear e angular, a menos que se centralize a variável independente em sua média ponderada. Fazer essa centralização é um truque simples que descorrelaciona os parâmetros e torna as barras de erro interpretáveis.

O que χ^2 realmente testa

Para um ajuste com N pontos e k parâmetros, o valor esperado de χ^2 é $N - k$, e a distribuição tem desvio padrão $\sqrt{2(N - k)}$. Portanto:

- $\chi_{\text{red}}^2 \simeq 1$: modelo e incertezas mutuamente consistentes.
- $\chi_{\text{red}}^2 \gg 1$: ou o modelo está errado, ou as incertezas foram subestimadas, ou existe dispersão intrínseca não modelada. As três hipóteses exigem diagnósticos diferentes, e a prática comum de simplesmente reescalar as barras de erro para forçar $\chi_{\text{red}}^2 = 1$ esconde o problema em vez de resolvê-lo.
- $\chi_{\text{red}}^2 \ll 1$: incertezas superestimadas, ou parâmetros demais para poucos dados.

Para comparar modelos com números diferentes de parâmetros, χ^2 sozinho não serve — acrescentar parâmetros sempre melhora o ajuste. Usam-se critérios que penalizam complexidade:

$$\text{AIC} = \chi^2 + 2k, \quad \text{BIC} = \chi^2 + k \ln N.$$

O BIC penaliza mais severamente, e a diferença entre os dois critérios frequentemente explica desacordos na literatura sobre se um modelo adicional é ou não “preferido pelos dados”.

Verossimilhança para contagens: o regime de Poisson

Quando o dado é uma contagem de eventos — fótons em raios X, supernovas em um levantamento, alertas em uma noite — o ruído não é gaussiano. A verossimilhança correta é

$$\mathcal{L} = \prod_i \frac{\lambda_i^{n_i} e^{-\lambda_i}}{n_i!},$$

com λ_i o número esperado e n_i o observado. Tomando o logaritmo e descartando termos independentes dos parâmetros:

$$-2 \ln \mathcal{L} = 2 \sum_i (\lambda_i - n_i \ln \lambda_i) \equiv C,$$

a chamada estatística de Cash. Para $\lambda \gtrsim 20$, ela converge para χ^2 ; abaixo disso, usar χ^2 com $\sigma = \sqrt{n}$ introduz viés sistemático que subestima os fluxos — porque bins com flutuação para baixo recebem peso maior. Em espectroscopia de raios X, onde bins com poucas contagens são a regra, esse cuidado é obrigatório.

A matriz de Fisher e o planejamento de experimentos

Antes de coletar dados, é possível prever quão bem um experimento medirá determinados parâmetros. A **matriz de informação de Fisher** é

$$F_{ij} = - \left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle,$$

e o limite de Cramér-Rao garante que nenhum estimador não enviesado pode ter variância menor que $(F^{-1})_{ii}$. Para verossimilhança gaussiana com covariância fixa,

$$F_{ij} = \sum_{a,b} \frac{\partial \mu_a}{\partial \theta_i} (C^{-1})_{ab} \frac{\partial \mu_b}{\partial \theta_j}.$$

É com essa ferramenta que se dimensionam missões cosmológicas: dado um levantamento com certa área, profundidade e resolução, calcula-se antecipadamente a precisão esperada em Ω_m , w ou na massa dos neutrinos, e compara-se o ganho científico ao custo. Toda a justificativa quantitativa de projetos como Euclid, DESI e Rubin passa por matrizes de Fisher.

Vieses de seleção quantificados

O **viés de Malmquist** pode ser calculado. Em uma amostra limitada por fluxo, com função de luminosidade $\phi(M)$ gaussiana de média M_0 e dispersão σ_M , a magnitude absoluta média das fontes detectadas a distância d é

$$\langle M \rangle_{\text{det}} = M_0 - \frac{\sigma_M^2}{\ln 10} \cdot \frac{d \ln[\text{volume acessível}]}{dM} \simeq M_0 - 1,382 \sigma_M^2,$$

para distribuição espacial uniforme. Com $\sigma_M = 0,5$ mag, o viés é de 0,35 mag, correspondendo a 17% de erro sistemático em distância — ordem de grandeza suficiente para gerar controvérsias inteiras sobre H_0 na literatura das décadas de 1970 e 1980.

O **viés de Eddington** tem forma análoga. Se a densidade de fontes cai como $n(S) \propto S^{-\gamma}$ e a medida tem erro σ , o fluxo verdadeiro médio de fontes observadas com fluxo S é

$$\langle S_{\text{verd}} \rangle \simeq S - \gamma \frac{\sigma^2}{S}.$$

Perto do limite de detecção, onde σ/S é grande, a correção é substancial e sempre no mesmo sentido: os fluxos medidos são sistematicamente altos demais. Levantamentos que não corrigem esse efeito superestimam contagens de fontes fracas.

Testes de hipótese e o problema das buscas múltiplas

Uma detecção a 3σ tem probabilidade $p \simeq 0,0027$ de ocorrer por acaso — se houver uma única tentativa. Se foram testadas N hipóteses independentes, a probabilidade de pelo menos um falso positivo é

$$p_{\text{global}} = 1 - (1 - p)^N \simeq Np \quad \text{para } Np \ll 1.$$

Procurar uma molécula específica em cem espectros, ou um sinal em milhões de canais de frequência, transforma rotineiramente um 3σ local em algo estatisticamente banal. A correção mais simples é a de Bonferroni, exigir $p < \alpha/N$; alternativas menos conservadoras controlam a taxa de descobertas falsas.

Este é precisamente o cuidado que separa uma detecção de um anúncio, e ele reaparece nos capítulos 18 e 19: o *look-elsewhere effect* é a razão pela qual buscas por biossinaturas e por tecnossinaturas exigem limiares muito mais rigorosos que os 3σ convencionais.

Laboratório de dados 11 – ajuste com pesos, χ^2 e viés de seleção

Arquivos: 13_supernovas_ia_pantheon.csv e 05_estrelas_massa_raio_teff.csv.

Física e estatística. Quando cada ponto tem incerteza própria, o ajuste correto é ponderado, e a qualidade se mede por

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - m(x_i))^2}{\sigma_i^2}, \quad \chi_{\text{red}}^2 = \frac{\chi^2}{N - k},$$

com N pontos e k parâmetros ajustados.

Roteiro.

1. Refaça o ajuste do laboratório 10 de duas formas: sem pesos e com pesos $1/\sigma_i^2$. Compare os valores de H_0 obtidos e explique a diferença.
2. Calcule χ_{red}^2 do ajuste. Se der muito acima de 1, o modelo está errado ou as incertezas estão subestimadas — discuta qual das duas parece mais provável aqui.
3. Simule um viés de Malmquist: descarte do catálogo de supernovas todas com $\mu > 40$ (equivalente a um limite de brilho aparente) e refaça o ajuste. H_0 muda? Em que direção?
4. Com o arquivo de estrelas, faça o mesmo exercício de sensibilidade: ajuste $L \propto M^\alpha$ usando toda a amostra e depois só as estrelas com $M > 1 M_\odot$. Quanto α muda?

Entrega. Uma tabela com os valores obtidos em cada variante do ajuste e um parágrafo respondendo: qual das escolhas metodológicas afetou mais o resultado final — os pesos, o corte da amostra ou o modelo?

Confira. O ponto do laboratório não é chegar a um número “certo”, e sim constatar que decisões aparentemente técnicas deslocam o resultado por mais do que a barra de erro estatística sugere. É exatamente isso que está em jogo na tensão de Hubble.

Capítulo 20 – Projetos guiados com dados públicos

Bloco Projetos. Este capítulo transforma conteúdos do semestre em investigações pequenas. A meta não é fazer pesquisa original, mas treinar a passagem entre dado, modelo e argumento físico.

Como estudar este bloco: Escolha um projeto por bloco. Entregue sempre uma figura, uma conta de ordem de grandeza, uma tabela curta e um parágrafo explicando limitações.

Tabela 4: **Projetos recomendados para acompanhar os blocos conceituais do curso.**

Projeto	Dados ou entrada	Produto esperado	Bloco do curso
Céu local	mapa celeste, Stellarium ou efemérides	desenho do céu e explicação de coordenadas	Fundamentos
HR de aglomerado	Gaia ou tabela fornecida	diagrama cor-magnitude e idade qualitativa	Estrelas
Trânsito exoplanetário	curva de luz simplificada	raio relativo e discussão de ruído	Exoplanetas
Curva de rotação	tabela raio-velocidade	massa dinâmica proporcional a $v^2 r$	Galáxias
Lei de Hubble-Lemaître	distâncias e redshifts	ajuste linear simples e interpretação	Cosmologia
Linha do tempo cósmica	eventos e redshifts	escala logarítmica comentada	Universo primordial

Projeto 1: diagrama HR com dados do Gaia. Selecione um aglomerado aberto com paralaxes confiáveis. Construa um gráfico de magnitude absoluta contra cor. Identifique sequência principal, possível ponto de saída e gigantes. Discuta por que membros contaminantes e poeira podem deslocar pontos. O objetivo não é obter uma idade precisa; é entender por que o HR é um instrumento físico.

Projeto 2: trânsito exoplanetário. Use uma curva de luz normalizada. Meça a profundidade média durante o trânsito e estime $R_p/R_\star$. Se houver período, estime a distância orbital usando a terceira lei de Kepler em unidades solares. Discuta por que manchas estelares, ruído instrumental e inclinação orbital podem afetar a interpretação.

Projeto 3: matéria escura em uma galáxia. A partir de uma tabela com raio e velocidade, calcule uma massa interna proporcional a $v^2 r$. Compare com um perfil luminoso qualitativo. A pergunta central é: a massa dinâmica continua crescendo onde a luz já diminuiu? Escreva a conclusão sem exagero: a curva sugere massa não luminosa, mas a interpretação completa usa evidências independentes.

Projeto 4: expansão cósmica. Use um conjunto pequeno de galáxias com distância e redshift baixo. Faça um gráfico v versus d e estime a inclinação. Discuta dispersão por velocidades peculiares, calibração de distância e por que a lei linear é aproximação local. Em seguida, explique por que redshifts altos exigem cosmologia relativística.

Modelo de relatório científico curto

Cada projeto deve caber em 3 a 5 páginas e seguir uma estrutura fixa:

1. **Pergunta física:** uma pergunta respondível com os dados disponíveis.
2. **Dados e calibração:** origem dos dados, unidades, cortes aplicados e limitações.
3. **Método:** equações usadas, hipóteses e justificativa do gráfico escolhido.
4. **Resultado:** figura principal, tabela curta e estimativa numérica.
5. **Discussão:** incertezas, vieses e uma conclusão proporcional ao que foi medido.

Essa estrutura treina escrita científica sem exigir que você produza pesquisa original.

Exemplo de projeto expandido: HR de um aglomerado

Para construir um diagrama cor-magnitude com dados do Gaia, escolha um aglomerado aberto e selecione estrelas em uma janela de posição, paralaxe e movimento próprio. Converta magnitude aparente em magnitude absoluta usando a paralaxe ou uma distância média confiável. Plote magnitude absoluta no eixo vertical, invertendo o eixo para que estrelas mais luminosas fiquem acima, e cor no eixo horizontal. O produto final deve identificar sequência principal, possíveis gigantes, membros suspeitos e ponto de saída. A discussão deve responder: quais cortes podem ter removido membros reais? quais estrelas podem ser contaminantes de campo? como extinção deslocaria o diagrama?

Exemplo de projeto expandido: curva de rotação

Monte uma tabela com raio em kpc e velocidade em km s^{-1} . Faça dois gráficos: $v(r)$ e uma massa dinâmica proporcional a $v^2 r$. Se a curva de rotação fica plana, a massa inferida cresce aproximadamente com r . Compare com uma curva de luz hipotética ou com uma imagem da galáxia. A conclusão correta não é “provei matéria escura”, mas “a dinâmica exige massa distribuída além do que a luz traça diretamente, em concordância com o cenário de halo escuro”.

Formato de entrega dos projetos. Uma boa entrega tem uma pergunta física, uma figura legível, uma tabela curta, uma estimativa numérica, uma discussão de incertezas e uma conclusão proporcional aos dados. Evite conclusões grandiosas para dados pequenos.

Projetos com dados modernos

Os projetos abaixo usam arquivos públicos e podem ser feitos com Python e conexão de internet. Cada um foi escolhido para exercitar uma cadeia completa: dado bruto, calibração ou seleção, modelo, número com incerteza, interpretação.

Projeto A – Reencontrar GW150914

Fonte: *Gravitational Wave Open Science Center* (dados de tensão de LIGO Hanford e Livingston).

Roteiro: baixe os 32s de dados em torno do evento; aplique um filtro passa-faixa de 35 a 350 Hz e uma remoção de linhas espectrais do instrumento; sobreponha os dois detectores com o deslocamento temporal de ~ 7 ms; identifique visualmente o *chirp*. Em seguida, estime a massa de chirp acompanhando a evolução da frequência instantânea.

Entrega: gráfico dos dois detectores, valor estimado de $\mathcal{M}$ com incerteza grosseira, comparação com o valor publicado e uma discussão de por que o filtro é indispensável — o sinal é invisível nos dados brutos.

Conexão: Capítulo 11.

Projeto B – Um espectro de exoplaneta do JWST

Fonte: arquivo MAST, produtos de nível superior de espectroscopia de trânsito (por exemplo WASP-39 b).

Roteiro: obtenha o espectro de transmissão já reduzido; converta profundidade de trânsito em raio efetivo em função do comprimento de onda; identifique as bandas de absorção e associe-as a moléculas; estime a altura de escala implicada.

Entrega: espectro anotado, identificação das principais espécies e uma avaliação honesta de quais atribuições são seguras e quais dependem do modelo atmosférico usado.

Conexão: Capítulo 13.

Projeto C – A Via Láctea com o Gaia

Fonte: arquivo do Gaia (consulta ADQL).

Roteiro: selecione estrelas com paralaxe relativa melhor que 10% dentro de 200 pc; construa o diagrama cor-magnitude absoluto; identifique sequência principal, gigantes e anãs brancas. Em seguida, use movimentos próprios e velocidades radiais para separar populações cinematicamente e discuta o que distingue disco fino, disco espesso e halo.

Entrega: diagrama cor-magnitude, gráfico de velocidades e uma discussão sobre como o corte em precisão de paralaxe enviesou a amostra.

Conexão: Capítulos 8 e 14.

Projeto D – Caçar um transiente em um fluxo de alertas

Fonte: um *broker* público de alertas (ALeRCE, Fink ou Lasair).

Roteiro: escolha um alerta recente classificado como supernova; reconstrua a curva de luz multibanda; ajuste o tempo de subida e a taxa de decaimento; compare com curvas de referência de tipo Ia e de colapso de núcleo; verifique se a galáxia hospedeira tem desvio para o vermelho conhecido e, se tiver, estime a magnitude absoluta de pico.

Entrega: curva de luz, classificação argumentada, magnitude absoluta estimada e uma frase sobre qual observação decidiria o caso.

Conexão: Capítulo 18.

Projeto E – Medir H_0 do jeito clássico

Fonte: catálogos públicos de supernovas Ia com desvio para o vermelho e módulo de distância (por exemplo compilações do tipo Pantheon).

Roteiro: construa o diagrama de Hubble (μ contra z); ajuste a região de baixo z para extrair H_0 dado um calibrador absoluto; depois estenda para $z > 0,5$ e verifique que um universo sem energia escura não descreve os dados.

Entrega: diagrama de Hubble com dois modelos sobrepostos, valor de H_0 obtido e discussão explícita de qual calibração absoluta você usou — é exatamente esse passo que está no centro da tensão de Hubble.

Conexão: Capítulos 16 e 21.

Projeto F – Sismologia de uma estrela com dados do TESS

Fonte: curvas de luz públicas do TESS (via MAST).

Roteiro: escolha uma gigante vermelha brilhante; obtenha a curva de luz de cadência curta; calcule o periodograma; identifique o espaçamento regular dos modos e a frequência de máxima potência; use as relações de escala sísmicas para estimar massa e raio.

Entrega: periodograma anotado, massa e raio estimados com incerteza, comparação com valores de catálogo.

Conexão: Capítulo 8.

Como avaliar seu próprio projeto. Antes de entregar, responda por escrito: (i) qual foi o observável direto? (ii) que calibração externa entrou? (iii) qual é a maior fonte de incerteza, e ela é estatística ou sistemática? (iv) que resultado você esperaria se sua hipótese estivesse errada? Um projeto que responde bem essas quatro perguntas vale mais que um que produz um número bonito sem elas.

Capítulo 21 – Fronteiras abertas: o que ainda não sabemos

Uma apostila corre sempre o risco de passar a impressão de que a área está pronta. Não está. Este capítulo final reúne problemas em aberto no momento em que o texto foi escrito, em 2026, com uma intenção específica: mostrar como se comporta um debate científico ativo, em que gente competente discorda com dados na mesa. Trate as seções seguintes como fotografias de uma discussão em andamento, não como conteúdo fixo.

A tensão de Hubble

Duas maneiras independentes de medir a taxa de expansão atual do universo dão respostas diferentes.

O caminho *local* sobe a escada de distâncias: paralaxes calibram Cefeidas, Cefeidas calibram supernovas Ia, supernovas Ia alcançam o fluxo de Hubble. O resultado, do projeto SH0ES, gira em torno de $H_0 \simeq 73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ com incerteza de cerca de 1.

O caminho *cosmológico* parte da radiação cósmica de fundo. O satélite Planck mede a estrutura angular das flutuações em $z \simeq 1100$, ajusta o modelo Λ CDM de seis parâmetros e *extrapola* até hoje, obtendo $H_0 \simeq 67,4 \pm 0,5$.

A diferença é de aproximadamente cinco desvios-padrão. Não é pouco, e não desapareceu com mais dados — o JWST, por exemplo, refez a fotometria de Cefeidas verificando se aglomeração de estrelas vizinhas enviesava as medidas do Hubble, e não encontrou o efeito. Por outro lado, calibradores alternativos, como o topo do ramo das gigantes vermelhas e estrelas de carbono, tendem a devolver valores intermediários, em torno de 69–70, e há quem defenda que a tensão é menor do que parece.

As saídas possíveis dividem-se em três famílias, e vale saber reconhecê-las: (i) há um erro sistemático não identificado em algum degrau da escada local; (ii) há um erro sistemático na análise da CMB; (iii) o modelo Λ CDM está incompleto, e algo entre $z = 1100$ e hoje — energia escura primordial, física de neutrinos, gravidade modificada — muda a extrapolação. Nenhuma das três está descartada. Sirenes padrão gravitacionais (Capítulo 11) oferecem uma quarta via, hoje ainda imprecisa, mas independente das outras duas.

Por que a tensão importa mesmo sendo “só” 8%

Uma diferença de 8% em H_0 parece modesta, mas H_0 fixa a escala de tudo: idade do universo, tamanhos físicos inferidos de tamanhos angulares, densidades críticas, massas de aglomerados. Além disso, o valor da CMB não é uma medida direta — é uma *previsão* do modelo. Se a previsão erra, o modelo tem um problema, e a magnitude do erro é secundária diante do fato de ele existir. Em física, uma discrepância pequena e persistente entre duas medidas de alta precisão costuma ser mais informativa do que uma discrepância grande entre duas medidas ruins.

A energia escura é mesmo constante?

O modelo padrão assume que a energia escura é uma constante cosmológica, com equação de estado $w = P/\rho c^2 = -1$ imutável. Testar isso exige medir a história da expansão com precisão, e o método atual de referência são as oscilações acústicas de bárions: uma escala fixa impressa no gás primordial que funciona como régua padrão em diferentes épocas.

Levantamentos espectroscópicos de larga escala, com destaque para o DESI, publicaram desde 2024 medidas que, combinadas com CMB e supernovas, favorecem levemente modelos em que w varia

com o tempo, em vez de $w = -1$ fixo. A significância depende de qual combinação de dados se usa e ficou, nas análises publicadas, na faixa de dois a quatro desvios-padrão. Isso é exatamente a zona cinzenta em que a comunidade fica dividida: forte demais para ignorar, fraco demais para declarar descoberta. O levantamento Euclid, lançado em 2023, e os dados finais do próprio DESI devem decidir a questão nos próximos anos.

Vale acompanhar esse caso de perto, porque ele mostra como significância estatística se comporta na prática: nenhuma das análises isoladas grita “energia escura dinâmica”, mas a combinação empurra numa direção, e a interpretação depende de escolhas de priors e de conjuntos de dados que precisam ser explicitadas.

Do que é feita a matéria escura

A evidência de que *existe* massa não luminosa é robusta e vem de fontes independentes: curvas de rotação (Figura 21), lentes gravitacionais, dispersão de velocidades em aglomerados, o espectro de potência da CMB e a própria formação de estruturas. O Aglomerado da Bala, em que a massa medida por lentes está deslocada em relação ao gás quente visível em raios X, é o exemplo mais citado.

O que não se sabe é a natureza da partícula. Décadas de experimentos de detecção direta — hoje com detectores de xenônio líquido de várias toneladas — não encontraram sinal, e os limites já se aproximam do chamado “piso de neutrinos”, em que neutrinos solares e atmosféricos produzem um fundo irreduzível. Buscas em aceleradores e por aniquilação em raios gama também vieram vazias. Isso não refuta a hipótese, mas empurrou a comunidade a considerar seriamente candidatos muito mais leves, como áxions, ou muito mais pesados e fracamente acoplados.

Vale também discutir honestamente as alternativas. Modificações da dinâmica no regime de aceleração baixa reproduzem curvas de rotação de galáxias com notável economia de parâmetros, e esse é um fato que merece explicação. Mas elas enfrentam dificuldade em aglomerados, no Aglomerado da Bala e, sobretudo, no espectro da CMB, onde a matéria escura não bariônica cumpre um papel dinâmico difícil de substituir. Saber *qual* evidência cada modelo explica bem, e qual não, é mais útil do que torcer por um lado.

Galáxias grandes cedo demais

Entre os primeiros resultados do JWST apareceram galáxias em $z \gtrsim 10$ — e, em pelo menos um caso confirmado espectroscopicamente, em $z \simeq 14$, quando o universo tinha menos de 300 milhões de anos — com brilho maior que o esperado pelos modelos de formação de estruturas. Surgiram manchetes sobre a “crise do modelo cosmológico”.

A história posterior é instrutiva. Parte do excesso vinha de estimativas de massa estelar baseadas em hipóteses sobre a função de massa inicial e sobre a contribuição de núcleos ativos; com espectros, várias massas caíram. Outra parte parece real e é explicada por formação estelar mais eficiente ou menos poeirenta nas primeiras épocas. E apareceu um fenômeno novo pelo caminho: os *little red dots*, objetos compactos e avermelhados abundantes no universo jovem, cuja natureza — estrelas, buracos negros em acreção, ou os dois — ainda é debatida.

A lição metodológica vale para toda a área: a distância entre “medimos um brilho” e “medimos uma massa estelar” é feita de modelos, e é nessa distância que as crises costumam nascer e morrer.

Buracos negros supermassivos precoces

Quasares com buracos negros de bilhões de massas solares são observados quando o universo tinha menos de um bilhão de anos. Crescer tanto tão rápido é difícil: acreção limitada pela luminosidade de Eddington impõe uma escala de tempo mínima de crescimento exponencial da ordem de 50 milhões de anos, e é preciso um número grande de e -folds partindo de uma semente estelar. As saídas em discussão são sementes pesadas (colapso direto de nuvens de gás sem fragmentação), episódios de acreção super-Eddington, ou fusões sucessivas. O JWST encontrou buracos negros aparentemente “pesados demais” para as galáxias que os hospedam nessa época, o que reacendeu o problema.

O interior das estrelas de nêutrons

Qual é a equação de estado da matéria acima da densidade nuclear? A pergunta é de física nuclear, mas quem responde hoje é a astrofísica, por três vias que finalmente convergem: medidas de massa de pulsares em binárias (chegando a $\sim 2 M_{\odot}$, o que já elimina equações de estado muito moles), medidas simultâneas de massa e raio pelo telescópio NICER, que mapeia manchas quentes na superfície de pulsares, e a deformabilidade de maré extraída de fusões como GW170817. O raio típico converge para algo em torno de 12 km, mas a composição do núcleo — nêutrons, híperons, matéria de quarks — continua em aberto.

Biossinaturas e o problema de provar vida à distância

Espectros de transmissão obtidos com o JWST detectaram moléculas em atmosferas de exoplanetas com qualidade impensável há uma década, incluindo dióxido de carbono em um Júpiter quente. O caso mais discutido é o do sub-Netuno K2-18 b, para o qual foram reportadas evidências de dimetilsulfeto, molécula associada na Terra a atividade biológica. Reanálises independentes por outros grupos reduziram substancialmente a significância, e o consenso atual é de que a detecção não está estabelecida.

Vale menos decorar o desfecho e mais entender a estrutura do problema. Uma biossinatura exige três coisas: que a molécula esteja realmente lá (estatística), que não haja rota abiótica plausível para produzi-la (química), e que o contexto planetário sustente a interpretação (geofísica e clima). Falhar em qualquer uma derruba a conclusão. É um exemplo quase perfeito da cadeia observável $\rightarrow$ inferência que atravessa toda esta apostila.

Outras questões vivas

- **Lítio primordial.** A nucleossíntese do Big Bang prevê uma abundância de ${}^7\text{Li}$ cerca de três vezes maior que a observada em estrelas velhas e pobres em metais. Ou a física primordial tem algo faltando, ou o lítio é destruído nas estrelas de um jeito que ainda não modelamos direito.
- **Origem das FRBs.** Magnetares explicam parte, mas a diversidade da população — repetidoras e não repetidoras, com propriedades distintas — sugere mais de um mecanismo.
- **Massa dos neutrinos.** Limites cosmológicos ficaram tão fortes que já pressionam o valor mínimo exigido pelos experimentos de oscilação, e essa tensão emergente é acompanhada de perto.
- **Planeta Nove.** O agrupamento de órbitas de objetos transnetunianos distantes sugere um perturbador massivo ainda não detectado — ou um viés de seleção observacional. O Rubin deve resolver a disputa.

Como ler uma descoberta astronômica sem ser ingênuo nem cínico

1. **Qual foi o observável direto?** Fluxo, posição, tempo de chegada, contagem. Tudo além disso é inferência.
2. **Quantos desvios-padrão, e sobre qual hipótese nula?** Uma significância só existe em relação a um modelo alternativo explícito.
3. **Quantas hipóteses foram testadas?** Procurar cem moléculas e encontrar uma a 3σ não é o mesmo que procurar uma e encontrá-la a 3σ .
4. **O resultado depende de qual calibração?** Se depende de uma escada de distâncias ou de um modelo atmosférico, o resultado herda as incertezas dele.
5. **Existe explicação mais mundana?** Instrumental, contaminação, viés de seleção, poeira.
6. **Foi reproduzido por outro grupo com dados independentes?** Este é o critério que, na prática, separa resultado de anúncio.

Como se quantifica uma tensão

Dizer que duas medidas estão em tensão de “ 5σ ” exige uma definição precisa. Para duas medidas independentes $x_1 \pm \sigma_1$ e $x_2 \pm \sigma_2$ de uma mesma grandeza, a diferença tem incerteza $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, e a tensão é

$$T = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}.$$

Aplicando aos valores de H_0 : $|73,0 - 67,4|/\sqrt{1,0^2 + 0,5^2} = 5,0$. Daí o número citado.

Três armadilhas rondam esse cálculo. A primeira é a **independência**: se as duas medidas compartilham alguma calibração, a fórmula subestima a incerteza da diferença e infla a tensão. A segunda é a **gaussianidade**: se as posteriores têm caudas pesadas, converter uma diferença em “sigmas” perde sentido, e é preciso calcular diretamente a probabilidade de a diferença ser nula. A terceira é que uma das medidas não é uma medida: o valor da CMB é uma *previsão* do modelo Λ CDM, e comparar previsão com medida é um teste do modelo, não uma comparação entre dois experimentos.

Para parâmetros múltiplos, a generalização usa a matriz de covariância conjunta:

$$T^2 = \Delta \vec{x}^T (C_1 + C_2)^{-1} \Delta \vec{x},$$

que segue distribuição χ^2 com número de graus de liberdade igual à dimensão do espaço de parâmetros. É esse formalismo que se usa para avaliar tensões entre lentes fracas e CMB no plano (Ω_m, σ_8) — a chamada tensão S_8 .

Comparação de modelos: o fator de Bayes

Quando a questão é “os dados preferem o modelo A ou o B?”, a ferramenta apropriada é a **evidência bayesiana**, a verossimilhança marginalizada sobre todo o espaço de parâmetros:

$$Z = \int \mathcal{L}(\vec{d} | \vec{\theta}) \pi(\vec{\theta}) d\vec{\theta}.$$

A razão entre evidências de dois modelos é o **fator de Bayes** $B_{AB} = Z_A/Z_B$, e a escala de Jeffreys interpreta $\ln B$: abaixo de 1, inconclusivo; entre 1 e 3, evidência moderada; acima de 5, forte.

A propriedade importante é que a evidência penaliza automaticamente complexidade. Um modelo com parâmetros extras que não melhoram substancialmente o ajuste espalha a verossimilhança por um volume maior de espaço de parâmetros, e a integral cai. Isso implementa a navalha de Occam de forma quantitativa — mas com uma consequência frequentemente ignorada: o resultado depende do *prior*, porque é ele que define o volume. Ampliar arbitrariamente o prior de um parâmetro extra penaliza o modelo estendido, e é por isso que declarações do tipo “os dados preferem energia escura dinâmica” precisam sempre explicitar as escolhas de prior. Duas análises com os mesmos dados podem chegar a conclusões opostas apenas por essa razão.

A parametrização de energia escura

A forma padrão de testar se a energia escura é constante usa

$$w(a) = w_0 + w_a (1 - a),$$

a parametrização de Chevallier-Polarski-Linder. Com ela, a densidade de energia escura evolui como

$$\rho_{\text{DE}}(a) = \rho_{\text{DE},0} a^{-3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a(1-a)},$$

resultado que sai de integrar a equação do fluido com w variável. A constante cosmológica corresponde a $(w_0, w_a) = (-1, 0)$, e é a distância desse ponto no plano que se reporta como significância.

Vale conhecer duas limitações. Primeira, os dois parâmetros são fortemente anticorrelacionados: os dados restringem bem uma combinação — essencialmente w em um desvio para o vermelho intermediário, o chamado *pivot* — e mal a outra. Reportar w_0 e w_a separadamente sem mostrar a elipse de covariância é enganoso. Segunda, a forma linear em a é uma escolha, não uma previsão teórica; um comportamento real que não seja bem aproximado por ela pode aparecer como preferência espúria por $w_a \neq 0$.

Da não detecção ao limite físico

Experimentos de detecção direta de matéria escura não medem partículas; medem taxas de recuo nuclear. A taxa esperada é

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{\rho_{\text{DM}}}{m_\chi m_N} \int_{v_{\min}}^{v_{\text{esc}}} v f(v) \frac{d\sigma}{dE_R} dv,$$

com $f(v)$ a distribuição de velocidades no referencial do detector e $v_{\min} = \sqrt{m_N E_R / 2\mu^2}$ a velocidade mínima capaz de produzir aquele recuo.

Cada elemento dessa expressão carrega incerteza astrofísica. A densidade local ρ_{DM} , deduzida no Capítulo 14, é conhecida com $\sim 30\%$. A distribuição $f(v)$ é usualmente tomada como maxwelliana truncada, hipótese que o Gaia mostrou ser apenas aproximada — há subestruturas e correntes locais. E a velocidade de escape galáctica entra no limite superior da integral.

A consequência é que os limites publicados no plano massa-seção de choque *não são puramente experimentais*: eles herdam a incerteza do modelo de halo adotado. Um limite que exclui certa seção de choque sob o modelo padrão pode enfraquecer por um fator de alguns se a distribuição de velocidades local for diferente. Este é um exemplo instrutivo de como astrofísica e física de partículas estão acopladas na prática.

O piso de neutrinos

Existe um limite irreduzível para detecção direta. Neutrinos solares, atmosféricos e do fundo difuso de supernovas produzem espalhamento coerente em núcleos, gerando recuos indistinguíveis dos

esperados de matéria escura. Quando a seção de choque procurada cai abaixo do nível que produz essa taxa de fundo, aumentar a exposição deixa de melhorar o limite proporcionalmente: o sinal fica enterrado em um fundo irremovível.

A escala do fundo é fixada pelo fluxo de neutrinos solares de ${}^8\text{B}$, cerca de $5 \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, e pela seção de choque coerente $\sigma \propto N^2$. O resultado é uma curva no plano massa-seção de choque, o chamado piso de neutrinos, que os experimentos de xenônio líquido de várias toneladas já começam a tocar para massas em torno de dezenas de GeV. Ultrapassá-lo exigirá informação direcional — reconstruir a direção do recuo, que aponta preferencialmente contra o movimento do Sol na Galáxia — e essa é a fronteira tecnológica atual do campo.

Para praticar. Escolha uma das controvérsias deste capítulo, procure dois artigos recentes que defendam posições opostas e escreva uma página comparando: que dados cada grupo usou, onde exatamente as análises divergem, e que observação futura decidiria a questão. O objetivo não é escolher um vencedor, é aprender a identificar o ponto preciso de discordância — que quase nunca está onde o resumo sugere.

Capítulo 22 – Busca por vida e por inteligência fora da Terra

Esta é a única pergunta da astrofísica que qualquer pessoa entende sem preparo e que, ainda assim, permanece sem resposta. Ela também é um excelente encerramento para o curso, porque exige juntar quase tudo o que veio antes: fluxo e distância, espectros e atmosferas, estrutura estelar, formação planetária, estatística de amostras enviesadas e, sobretudo, o hábito de separar o que foi medido do que foi inferido.

Vale começar organizando o problema em três perguntas independentes, que exigem instrumentos e argumentos diferentes:

1. Existe **vida microbiana** em outro lugar do Sistema Solar? Pergunta de exploração *in situ*: sondas, amostras, química.
2. Existem **atmosferas alteradas por biologia** em exoplanetas? Pergunta de espectroscopia remota.
3. Existe **tecnologia** detectável de outra civilização? Pergunta de engenharia de detecção, e é onde entra a radioastronomia.

Um resultado positivo em qualquer uma delas não implica os outros dois. Vida microbiana pode ser comum e inteligência raríssima; tecnologia pode existir e não ser detectável com o que temos.

A zona habitável, com a equação na mão

A ideia é simples: existe uma faixa de distâncias em torno de uma estrela na qual um planeta rochoso com atmosfera poderia manter água líquida na superfície. Como o fluxo recebido cai com o quadrado da distância, a faixa escala com a raiz da luminosidade:

$$\frac{r}{\text{UA}} = \sqrt{\frac{L/L_{\odot}}{S_{\text{ef}}}},$$

em que S_{ef} é o fluxo, em unidades do fluxo solar na Terra, que marca cada borda. Os limites conservadores mais usados vêm de modelos climáticos: $S_{\text{ef}} \simeq 1,11$ para a borda interna, onde começa o efeito estufa desenfreado, e $S_{\text{ef}} \simeq 0,36$ para a externa, onde nem o máximo de CO_2 consegue mais aquecer o planeta. Para o Sol, isso dá aproximadamente de 0,95 a 1,67 UA.

Repare no que essa conta *não* contém: composição da atmosfera, massa do planeta, campo magnético, rotação, tectônica, história de perda de voláteis. A zona habitável é um filtro de primeira ordem, útil para priorizar alvos de observação — e nada mais que isso. Vênus e Marte estão nas bordas da zona habitável solar, e nenhum dos dois é habitável.

Dedução curta: por que a zona habitável se desloca com o tempo

A luminosidade de uma estrela na sequência principal cresce lentamente à medida que hidrogênio vira hélio no núcleo: com menos partículas por unidade de massa, o núcleo contrai e aquece para manter o equilíbrio hidrostático. O Sol era cerca de 30% menos luminoso quando a Terra se formou.

Como $r \propto \sqrt{L}$, a zona habitável migra para fora com o tempo. Isso gera duas consequências. Primeira, o **paradoxo do Sol jovem e frio**: com $0,7 L_{\odot}$, a temperatura de equilíbrio da Terra seria $\sim 233 \text{ K}$, e ainda assim há evidência geológica de água líquida há mais de 3,8 bilhões de anos — provavelmente por uma atmosfera com muito mais gases estufa. Segunda, o conceito que realmente importa não é a zona habitável instantânea, e sim a **zona continuamente**

habitável: a faixa que permanece habitável por bilhões de anos, tempo suficiente para que algo aconteça. Ela é bem mais estreita.

Anãs vermelhas: mais alvos, mais problemas

Três quartos das estrelas da Galáxia são anãs M, e elas são atraentes por razões puramente observacionais: a zona habitável fica próxima da estrela, então os períodos são curtos e os trânsitos frequentes; a estrela é pequena, então a razão $R_p/R_\star$ é maior e o sinal atmosférico é mais forte. É por isso que o sistema TRAPPIST-1, com sete planetas do tamanho da Terra em torno de uma anã ultrafria a 12 pc, virou o alvo mais observado da área.

Os problemas também são específicos. A proximidade implica **travamento de maré**: o planeta passa a mostrar sempre a mesma face para a estrela, com um lado permanentemente iluminado e outro na noite eterna — situação que só é climaticamente viável se houver atmosfera densa o bastante para redistribuir calor. Anãs M jovens permanecem magneticamente ativas por bilhões de anos, com explosões que banham o planeta em ultravioleta extremo e raios X, capazes de erodir a atmosfera. E há a fotólise da água seguida de escape do hidrogênio, que pode deixar para trás oxigênio abiótico — um falso positivo de biossinatura.

Observações do JWST nos planetas interiores de TRAPPIST-1 já indicam ausência de atmosfera espessa em pelo menos alguns deles. É um resultado negativo, e resultados negativos aqui valem muito: eles testam diretamente se planetas rochosos conseguem manter atmosfera em torno de anãs M.

Biossinaturas: o que procurar e por que é difícil

A ideia central, formulada por Lovelock nos anos 1960, é procurar **desequilíbrio químico**. Na atmosfera da Terra coexistem oxigênio e metano, dois gases que reagem entre si; sem reposição contínua, o metano desapareceria em décadas. Essa coexistência é termodinamicamente improvável e biologicamente mantida. O par O_2+CH_4 é, por isso, considerado uma assinatura mais forte que qualquer molécula isolada.

O problema é que quase toda molécula tem rota abiótica. Oxigênio pode se acumular por fotólise de água ou de CO_2 em planetas que perderam hidrogênio. Metano sai de serpentinização e de vulcanismo. Fosfina e dimetilsulfeto, cada uma anunciada em algum momento como sinal promissor, têm rotas químicas em discussão e detecções contestadas — o caso de K2-18 b, tratado no Capítulo 21, é o exemplo mais recente e mais instrutivo.

Uma biossinatura convincente precisa, portanto, de três camadas: a molécula está mesmo lá (estatística sólida, reproduzida por grupos independentes); não há fonte abiótica plausível *naquele contexto planetário*; e o contexto — temperatura, pressão, atividade estelar, idade — sustenta a interpretação. Falhar em qualquer uma derruba a conclusão.

Tecnossinaturas: por que rádio

Se procuramos tecnologia e não bioquímica, a lógica muda. Não precisamos que o planeta seja habitável para nós, nem que a assinatura seja um subproduto involuntário: basta que exista um sinal artificial detectável. Rádio virou a aposta principal desde o projeto Ozma, em 1960, por quatro razões físicas concretas:

- **Energia por bit é baixíssima.** Fótons de rádio custam $\sim 10^{-24}$ J; enviar informação por rádio

é ordens de grandeza mais barato que por luz visível.

- **O meio interestelar é quase transparente** nessa faixa. Poeira, que bloqueia o visível, é irrelevante em ondas de centímetros.
- **A atmosfera terrestre tem uma janela** entre cerca de 1 e 10 GHz.
- **Tecnologia de rádio é barata e antiga**, tanto para transmitir quanto para receber.

Dedução curta: onde fica a janela de menor ruído

A temperatura de sistema de um radiotelescópio soma contribuições com dependências opostas em frequência. Em uma aproximação didática, para uma direção fora do plano galáctico:

$$T_{\text{sist}}(\nu) \simeq \underbrace{2,73}_{\text{CMB}} + 20 \underbrace{\left(\frac{\nu}{0,408 \text{ GHz}} \right)^{-2,75}}_{\text{síncrotron galáctico}} + \underbrace{\frac{h\nu}{k}}_{\text{ruído quântico}} \quad [\text{K}].$$

O primeiro termo é constante, o segundo cai rapidamente com a frequência e o terceiro cresce linearmente. A soma tem um mínimo raso: derive numericamente e você encontra o piso em torno de 3–4 GHz, com $T_{\text{sist}} \simeq 3 \text{ K}$. Somando a emissão da própria atmosfera — que dispara nas bandas de vapor d'água em 22 GHz e de oxigênio em 60 GHz — a janela útil vista do solo fica entre aproximadamente 1 e 10 GHz.

Dentro dessa janela, a faixa entre 1,42 GHz (linha do hidrogênio neutro) e 1,66 GHz (linhas da hidroxila OH) ficou conhecida como **poço d'água**: H mais OH formam água, e a ideia — proposta por Bernard Oliver — é que seria um ponto de encontro natural para duas civilizações que conhecem a mesma física. É um argumento estético apoiado em um argumento físico, e convém saber distinguir os dois: o poço d'água não é o mínimo exato de ruído, é uma escolha simbólica dentro de uma região que é, de fato, silenciosa.

Os desafios reais da busca

O sinal precisa ser artificialmente estreito. Nenhuma fonte astrofísica natural emite em banda muito estreita: agitação térmica, turbulência e rotação alargam qualquer linha por efeito Doppler, e o piso natural fica na casa de centenas de hertz. Um transmissor pode emitir em uma fração de hertz. Por isso as buscas usam resolução espectral da ordem de 1 Hz e procuram exatamente aquilo que a natureza não faz. É o discriminante mais poderoso do campo.

E precisa derivar em frequência. Um transmissor em um planeta que gira e orbita produz um sinal cuja frequência observada muda continuamente por Doppler, tipicamente a frações de hertz por segundo. Curiosamente, isso ajuda: um sinal perfeitamente estável em frequência quase certamente é terrestre, porque acompanha o movimento do próprio receptor. Buscas varrem centenas de taxas de deriva possíveis, o que multiplica o custo computacional.

A interferência é o inimigo principal. Celulares, satélites, radares, fornos de micro-ondas e a própria eletrônica do receptor produzem sinais estreitos e brilhantes o tempo todo. O protocolo padrão é a observação em cadência alternada: aponta para o alvo, aponta para fora, volta. Um sinal real deve aparecer só quando o telescópio está no alvo. Em 2020, o candidato BLC-1, detectado na direção de Proxima Centauri em 982 MHz, sobreviveu a vários filtros antes de ser identificado, meses depois, como interferência local. O célebre sinal *Wow!*, de 1977, nunca se repetiu — e sem repetição não há como testá-lo.

E há um problema mais fundo: informação bem codificada parece ruído. Este ponto merece atenção. Pela teoria da informação de Shannon, uma transmissão eficientemente comprimida tem entropia máxima, ou seja, estatísticas indistinguíveis de ruído aleatório. Criptografia produz

o mesmo efeito por construção — um texto cifrado que *não* pareça aleatório é um texto cifrado ruim. A consequência é desconfortável: quanto mais avançada a tecnologia de comunicação de uma civilização, menos detectável ela se torna para quem não conhece o código. Nossas próprias emissões seguiram esse caminho, das portadoras analógicas potentes da televisão do século XX para a transmissão digital comprimida e por satélite direcionado.

Isso reorienta a estratégia. Não faz sentido procurar *mensagens*; faz sentido procurar **faróis** — sinais deliberadamente simples, repetitivos, em banda estreita, feitos para serem achados — ou vazamentos incidentais de alta potência, como radares planetários. É uma diferença metodológica importante: a busca não pergunta “o que estão dizendo?”, e sim “alguém deixou uma luz acesa?”.

O espaço de busca é grande demais. Além da posição no céu, é preciso varrer frequência, largura de banda, polarização, taxa de deriva, tempo de observação e sensibilidade. Estimativas publicadas do volume já explorado desse espaço multidimensional o comparam a alguns copos d’água retirados de todos os oceanos da Terra. Qualquer afirmação do tipo “já procuramos e não há nada” é, portanto, estatisticamente vazia.

Outras formas de procurar

SETI óptico. Um pulso de laser de nanossegundos, focalizado, pode superar o brilho da estrela hospedeira durante sua breve duração. Buscas por pulsos ópticos ultracurtos exploram um regime em que a natureza também não opera.

SETI dysoniano. Qualquer civilização que use muita energia deve descartar calor. Estruturas que coletassem parte da luz de uma estrela reemitiriam no infravermelho, produzindo uma estrela com excesso térmico anômalo. Levantamentos infravermelhos já procuraram esse tipo de assinatura em centenas de milhares de galáxias e estrelas, sem resultado — o que, ao menos, limita a abundância de civilizações que consomem energia em escala galáctica.

Tecnossinaturas atmosféricas. Poluentes industriais sem rota natural conhecida, como clorofluorcarbonos, seriam detectáveis em espectros de transmissão por telescópios futuros. É uma ponte entre a busca por biossinaturas e a busca por tecnologia.

A equação de Drake como organizador de ignorância

$$N = R_{\star} \cdot f_p \cdot n_e \cdot f_l \cdot f_i \cdot f_c \cdot L.$$

O valor pedagógico dessa equação não está em calcular N — não está — e sim em explicitar *onde* está a ignorância. Em sessenta anos, a astrofísica converteu os três primeiros fatores de palpite em medida: a taxa de formação estelar da Galáxia é conhecida, a fração de estrelas com planetas é próxima de um, e a ocorrência de planetas rochosos em zona habitável é hoje estimada com dados do Kepler e do TESS, ainda que com incerteza grande.

Os três seguintes — fração de planetas habitáveis em que a vida surge, fração dessas em que surge inteligência, fração dessas que produz tecnologia detectável — continuam desconhecidos por muitas ordens de grandeza, porque temos exatamente um exemplo. E o último, L , o tempo médio de duração de uma civilização detectável, não é sequer uma pergunta de astrofísica.

Exemplo de aplicação: a sensibilidade da equação de Drake

Tome $R_{\star} = 2 \text{ ano}^{-1}$, $f_p = 1$, $n_e = 0,2$. O produto dos três primeiros dá 0,4 planetas potencialmente habitáveis surgindo por ano na Galáxia.

Agora suponha, otimisticamente, $f_l = f_i = f_c = 1$. Então $N = 0,4 L$: com civilizações durando

10^4 anos, $N \simeq 4000$. Mas se $f_i = 10^{-6}$ — e não há absolutamente nada que exclua esse valor —, $N \simeq 0,004$, e estaríamos sozinhos.

Um fator desconhecido por seis ordens de grandeza muda a resposta de “a Galáxia está cheia” para “somos os únicos”. Este é o ponto: a equação não prevê, ela *contabiliza* o que não sabemos. Usá-la para anunciar um número é um erro de método, não de aritmética.

O paradoxo de Fermi

Se a Galáxia tem 10^{11} estrelas e 10^{10} anos de idade, e se colonização ou sondas automáticas se propagassem a uma fração modesta da velocidade da luz, alguns milhões de anos bastariam para atravessá-la inteira — um piscar de olhos em escala cósmica. Daí a pergunta atribuída a Enrico Fermi em 1950: onde está todo mundo?

As respostas propostas se agrupam em famílias, e vale conhecer a estrutura lógica de cada uma:

- **São raros.** Algum dos fatores da equação de Drake é minúsculo. O “grande filtro” pode estar atrás de nós — a origem da vida, ou da célula complexa — ou à nossa frente, o que seria uma notícia bem pior.
- **Estão lá, mas não são detectáveis.** O argumento da compressão e da criptografia, discutido acima, vai nessa direção sem precisar de nenhuma hipótese sociológica.
- **Chegamos cedo.** Estrelas de baixa massa queimarão hidrogênio por trilhões de anos; em termos de história cósmica da formação estelar, o universo mal começou. Podemos simplesmente ser dos primeiros.
- **Não procuramos o suficiente.** A estimativa do espaço de busca já explorado sustenta essa resposta melhor do que costuma se admitir.

O que contaria como evidência

Diante de um candidato, a comunidade aplica critérios que vale internalizar — eles são os mesmos de qualquer resultado extraordinário:

1. **Repetição.** O sinal reaparece quando o telescópio volta ao alvo?
2. **Cadência.** Ele some quando o telescópio aponta para fora? Se não some, é interferência.
3. **Confirmação independente.** Outro observatório, com outra eletrônica, em outro continente, vê a mesma coisa?
4. **Coerência cinemática.** A deriva em frequência corresponde ao movimento esperado de um transmissor no sistema alvo?
5. **Exclusão de origem natural.** Largura de banda, polarização e estrutura temporal são incompatíveis com fontes astrofísicas conhecidas?

Existe até uma escala de comunicação pública, a escala de Rio, para graduar a significância de um anúncio. A regra prática, porém, é mais simples e serve para o curso inteiro: quanto mais extraordinária a afirmação, mais mundana a explicação que precisa ser eliminada primeiro.

Perguntas para discussão.

- Por que a zona habitável é útil mesmo sendo uma definição admitidamente incompleta?
- Anãs M oferecem mais alvos e sinais mais fortes. Que preço físico se paga por isso?

- Explique, sem fórmulas, por que uma transmissão bem comprimida é difícil de distinguir de ruído.
- Se um sinal estreito não deriva em frequência, por que isso é um argumento *contra* origem extraterrestre?
- A busca por tecnossinaturas pode ser refutada por resultados negativos? Em que condições?
- Qual das respostas ao paradoxo de Fermi é testável observacionalmente, e como?

O balanço de potência de um enlace de rádio

Quanta potência precisa ter um transmissor para ser detectável? A conta é a mesma de qualquer enlace de telecomunicações, e vale fazê-la explicitamente.

Um transmissor de potência P_t acoplado a uma antena de diâmetro D_t concentra o feixe em um ângulo sólido $\Omega \simeq (\lambda/D_t)^2$. O **ganho** é a razão entre esse ângulo sólido e o de emissão isotrópica:

$$G_t = \frac{4\pi}{\Omega} \simeq \frac{4\pi D_t^2}{\lambda^2} \eta,$$

com η a eficiência de abertura. Define-se a potência efetiva irradiada isotropicamente, $\text{EIRP} = P_t G_t$. À distância d , a densidade de fluxo recebida em uma banda $\Delta\nu$ é

$$S = \frac{P_t G_t}{4\pi d^2 \Delta\nu}.$$

Igualando à sensibilidade do radiômetro deduzida no Capítulo 7,

$$S_{\min} = \frac{2kT_{\text{sist}}}{A_{\text{ef}}\sqrt{\Delta\nu t}},$$

obtém-se a potência mínima detectável:

$$P_t G_t = \frac{8\pi k T_{\text{sist}} d^2}{A_{\text{ef}}} \sqrt{\frac{\Delta\nu}{t}}$$

Aplique a números concretos: $d = 10 \text{ pc} = 3,1 \times 10^{17} \text{ m}$, antena receptora de 100 m ($A_{\text{ef}} \simeq 5000 \text{ m}^2$), $T_{\text{sist}} = 20 \text{ K}$, banda de 1 Hz e $t = 600 \text{ s}$:

$$P_t G_t = \frac{8\pi \times 1,38 \times 10^{-23} \times 20 \times (3,1 \times 10^{17})^2}{5000} \sqrt{\frac{1}{600}} \simeq 2,8 \times 10^{12} \text{ W}.$$

Cerca de 3 TW de potência efetiva irradiada. Parece muito, mas o radar planetário de Arecibo atingia EIRP de $\sim 2 \times 10^{13} \text{ W}$ com apenas 1 MW de potência real, graças ao ganho enorme da antena de 305 m . Ou seja: **a tecnologia humana do século XX já era detectável a 10 pc por um receptor equivalente ao nosso**, desde que o feixe apontasse na direção certa. Essa é a razão pela qual a busca não é considerada absurda — e a condição do apontamento é exatamente por que faróis deliberados são mais plausíveis que vazamentos.

A dependência $P_t \propto d^2 \sqrt{\Delta\nu/t}$ organiza toda a estratégia: dobrar o alcance exige quadruplicar a potência assumida ou a área coletora; estreitar a banda por um fator 100 reduz a potência exigida por 10. É por isso que buscas usam a menor largura de banda fisicamente sensata — e a deriva Doppler impõe o piso, porque um sinal que deriva mais rápido que $\Delta\nu/t$ sai do canal durante a integração.

A resolução espectral ótima e a deriva

Um transmissor em um planeta que gira produz aceleração relativa ao observador. Para a Terra, a rotação contribui com $a \simeq 3,4 \text{ cm s}^{-2}$ no equador e a órbita com $\simeq 0,6 \text{ cm s}^{-2}$. A taxa de deriva correspondente em 1,4 GHz é

$$\dot{\nu} = \frac{\nu a}{c} \simeq \frac{1,4 \times 10^9 \times 0,034}{3 \times 10^8} \simeq 0,16 \text{ Hz s}^{-1}.$$

Em uma integração de $t = 100 \text{ s}$, o sinal varre 16 Hz. Se a resolução for de 1 Hz, a energia se espalha por dezesseis canais e a sensibilidade cai por $\sqrt{16} = 4$. A solução é o **desdobramento de deriva**: reprocessar os dados aplicando dezenas ou centenas de taxas de deriva hipotéticas e procurar em cada uma. Isso multiplica o custo computacional pelo número de taxas testadas — e, pelo argumento de buscas múltiplas do Capítulo 19, também multiplica o número de tentativas e portanto o limiar estatístico exigido.

Existe um ótimo: a resolução ideal satisfaz $\Delta\nu \simeq \dot{\nu}t \simeq \sqrt{\dot{\nu}}$, o que para as derivas planetárias típicas dá frações de hertz. Não é possível estreitar indefinidamente a banda; a própria física do movimento planetário impõe o limite.

Quantificando o espaço de busca

O espaço a ser varrido tem, no mínimo, oito dimensões: duas de posição no céu, uma de frequência central, uma de largura de banda, uma de taxa de deriva, uma de polarização, uma de tempo e uma de sensibilidade. O volume total varrido por todas as buscas já realizadas pode ser escrito como uma fração do volume plausível:

$$\text{fração} \sim \frac{N_{\star} \Delta\nu_{\text{coberto}} t_{\text{total}}}{N_{\star, \text{gal}} \Delta\nu_{\text{plausível}} \tau_{\text{civ}}}.$$

Estimativas publicadas colocam essa fração em torno de 10^{-18} a 10^{-20} — a comparação usual é com alguns copos d'água retirados dos oceanos terrestres. A conclusão metodológica é direta e vale ser enunciada com clareza: **a ausência de detecção até hoje não impõe restrição significativa sobre a abundância de civilizações**. Qualquer afirmação em contrário confunde ausência de evidência com evidência de ausência, e ignora o volume do espaço amostrado.

Limites obtidos de tecnossinaturas dysonianas

Um caso em que os limites *são* informativos é o das assinaturas térmicas. Se uma civilização coletasse uma fração f da luz de sua estrela, reemitiria essa energia no infravermelho a uma temperatura de equilíbrio

$$T = \left(\frac{f L_{\star}}{16\pi\sigma r^2} \right)^{1/4},$$

com pico em $\lambda_{\text{max}} = 2,9 \times 10^{-3} / T$. Para $f = 1$ e $r = 1 \text{ UA}$ em torno de uma estrela solar, $T \simeq 280 \text{ K}$ e o pico cai em $10 \mu\text{m}$ — exatamente onde levantamentos infravermelhos de todo o céu, como o WISE, são sensíveis.

Buscas sistemáticas por excesso infravermelho anômalo em centenas de milhares de galáxias não encontraram candidatos. O limite resultante é de que menos de uma fração muito pequena das galáxias examinadas tem mais de $\sim 50\%$ de sua luz estelar reprocessada. Este é um limite *real* sobre um cenário específico — civilizações que consomem energia em escala galáctica — ainda que não diga nada sobre civilizações do nosso porte.

A zona habitável com mais cuidado

Os limites conservadores usados no laboratório vêm de modelos climáticos unidimensionais. Vale entender de onde saem os dois números.

A **borda interna** corresponde ao efeito estufa desenfreado. Se a temperatura da superfície sobe, mais água evapora; como o vapor d'água é gás estufa, a temperatura sobe mais. O ciclo só se estabiliza se a atmosfera conseguir irradiar o excesso — mas existe um teto para o fluxo infravermelho que uma atmosfera saturada em vapor pode emitir, o limite de Simpson-Nakajima, em torno de $\sim 282 \text{ W m}^{-2}$. Acima disso, nenhum equilíbrio existe e o oceano evapora inteiramente. Convertendo esse fluxo limite em distância obtém-se $S_{\text{ef}} \simeq 1,1$.

A **borda externa** corresponde ao máximo efeito estufa de CO_2 . Acrescentar CO_2 aquece, mas também aumenta o espalhamento Rayleigh, que reflete luz estelar de volta ao espaço. Existe uma pressão parcial ótima, além da qual mais CO_2 *esfria* o planeta. Esse máximo define $S_{\text{ef}} \simeq 0,36$.

Ambos os limites dependem da composição atmosférica assumida, do albedo de nuvens e do tipo espectral da estrela — a luz de anãs M, sendo mais vermelha, é menos espalhada por Rayleigh e mais absorvida por água e CO_2 , o que desloca as bordas. Por isso os valores tabelados variam entre autores, e por isso o conceito deve ser tratado como filtro de priorização e não como fronteira física.

O ciclo carbonato-silicato como termostato

Há um mecanismo que amplia consideravelmente a habitabilidade de planetas com tectônica: o CO_2 atmosférico dissolve na chuva formando ácido carbônico, que intemperiza rochas silicáticas; os carbonatos resultantes são depositados no oceano e subduzidos, devolvendo CO_2 por vulcanismo. A taxa de intemperismo cresce com a temperatura.

O resultado é uma realimentação negativa com escala de tempo de centenas de milhares de anos: se o planeta esfria, o intemperismo diminui, o CO_2 vulcânico se acumula e o efeito estufa aquece de volta; se aquece, ocorre o inverso. Esse termostato é o principal argumento para que a Terra tenha mantido água líquida apesar do aumento de 30% na luminosidade solar — e sua ausência em planetas sem tectônica ou sem oceano é uma das razões pelas quais Vênus e Marte divergiram tanto. Habitabilidade de longo prazo, portanto, não é uma propriedade da órbita: é uma propriedade do planeta inteiro.

Laboratório de dados 12 – quantos planetas estão na zona habitável?

Arquivo: 19_zona_habitavel.csv — 5557 exoplanetas confirmados com semieixo maior medido e luminosidade da estrela hospedeira. Colunas: `a_UA`, `R_Rterra`, `Teff_K`, `L_Lsol`, `distancia_pc`.

Física. As bordas da zona habitável conservadora e a temperatura de equilíbrio:

$$r_{\text{int}} = \sqrt{\frac{L/L_{\odot}}{1,11}}, \quad r_{\text{ext}} = \sqrt{\frac{L/L_{\odot}}{0,36}}, \quad T_{\text{eq}} = 278 \left(\frac{L/L_{\odot}}{(a/\text{UA})^2} \right)^{1/4} \text{ K}.$$

A última expressão é a fórmula do Capítulo 12 com albedo nulo, escrita em unidades solares.

Roteiro.

1. Crie as colunas r_{int} e r_{ext} . No Excel: `=RAIZ(F2/1,11)` e `=RAIZ(F2/0,36)`.
2. Crie uma coluna lógica de zona habitável: `=SE(E(C2>=G2;C2<=H2);"sim";"não")`.
3. Conte quantos planetas caem na zona habitável. Depois refaça a contagem exigindo também $R < 1,8 R_{\oplus}$, o corte aproximado entre mundos rochosos e mundos com envelope de gás (o vale de raios do Capítulo 13).

4. Calcule T_{eq} para os sobreviventes e ordene por distância. Quais são os alvos mais próximos?
5. Faça o gráfico de $\log a$ contra $\log L$ para todos os planetas e sombreie a faixa habitável. Por que os planetas em zona habitável se concentram em estrelas de baixa luminosidade?

Entrega. As duas contagens, a lista dos cinco alvos rochosos mais próximos com suas temperaturas de equilíbrio, o gráfico com a faixa sombreada e uma resposta à pergunta do item 5 — que é sobre viés observacional, não sobre a natureza.

Confira. Com o corte de raio, você deve encontrar cerca de 25 planetas, entre eles TRAPPIST-1 e e f, Proxima Cen b, TOI-700 d e Kepler-442 b. Proxima Cen b, a 1,30 pc, é o mais próximo. Note que quase todos orbitam anãs vermelhas a menos de 0,1 UA: não porque planetas assim sejam mais comuns, e sim porque são os únicos que os métodos atuais detectam com facilidade.

Para praticar. Monte a curva de ruído da dedução curta em uma planilha: coluna de frequência de 0,1 a 100 GHz em passos logarítmicos, e uma coluna com $T_{\text{sist}}(\nu)$. Encontre o mínimo, marque a posição do poço d'água (1,42 a 1,66 GHz) e escreva um parágrafo respondendo: se o mínimo de ruído não coincide exatamente com o poço d'água, por que o poço d'água continua sendo uma escolha defensável para uma busca? Depois estime, com $S_{\text{min}} = \frac{2kT_{\text{sist}}}{A_{\text{ef}}\sqrt{\Delta\nu t}}$, a potência que um transmissor a 10 pc precisaria ter para ser detectado por uma antena de 100 m em uma hora de integração — e compare com a potência do radar planetário de Arecibo, cerca de 1 MW de potência efetiva irradiada muito maior por causa do ganho da antena.

Pergunta de fechamento do curso

Volte à primeira pergunta da apostila: como medidas de fluxo, posição e tempo de chegada de fótons se transformam em afirmações sobre massa, distância, composição e história do universo? Escreva a resposta em uma página, sem fórmulas.

E acrescente agora uma segunda, que este capítulo torna inevitável: quando é legítimo afirmar que algo *não* existe, a partir de uma busca que não encontrou nada? Responder bem a essas duas perguntas é, no fundo, o que a disciplina inteira tentou ensinar.

Apêndice – Ferramentas de dedução e escalas fundamentais

Este apêndice reúne os instrumentos matemáticos usados repetidamente ao longo dos capítulos, apresentados de forma autônoma. Não há conteúdo novo de astrofísica aqui; há o maquinário que torna as deduções anteriores possíveis e reproduzíveis.

Análise dimensional

Se uma grandeza Q depende de n parâmetros construídos a partir de k dimensões independentes, o teorema de Buckingham garante que a relação pode ser escrita em termos de $n - k$ combinações adimensionais. Em astrofísica, onde as dimensões relevantes são quase sempre massa, comprimento e tempo, isso frequentemente reduz o problema a uma única combinação — e a resposta fica determinada a menos de um fator numérico.

Três exemplos já usados neste texto ilustram o poder do método.

Tempo de queda livre. Dependendo apenas de G e ρ , com $[G] = \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ e $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$, o produto $G\rho$ tem dimensão de s^{-2} . Logo $t_{\text{ff}} \propto (G\rho)^{-1/2}$, sem qualquer integração. O cálculo completo apenas fornece o fator $\sqrt{3\pi/32} = 0,54$.

Solução de Sedov-Taylor. Com E , ρ_0 e t disponíveis, a única combinação com dimensão de comprimento é $(Et^2/\rho_0)^{1/5}$. Toda a dinâmica de uma explosão pontual está contida nessa contagem.

Massa de Chandrasekhar. Das constantes $\hbar$, c , G e m_H , a única combinação com dimensão de massa que não envolve $\hbar$ e c separadamente é

$$M_{\text{Ch}} \sim \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_H^2} = \frac{M_{\text{Pl}}^3}{m_H^2} \simeq 1,9 M_{\odot}.$$

O cálculo detalhado dá $1,44 M_{\odot}$: o método acerta a ordem de grandeza e, mais importante, revela *quais constantes* determinam o resultado.

A regra prática é sempre a mesma: antes de resolver, verifique quais grandezas podem entrar na resposta e monte as combinações adimensionais. Se houver apenas uma, o problema está essencialmente resolvido.

Escalas naturais

As **unidades de Planck** combinam as três constantes fundamentais:

$$\begin{aligned} M_{\text{Pl}} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,18 \times 10^{-8} \text{ kg}, & \ell_{\text{Pl}} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,62 \times 10^{-35} \text{ m}, \\ t_{\text{Pl}} &= \frac{\ell_{\text{Pl}}}{c} = 5,39 \times 10^{-44} \text{ s}, & T_{\text{Pl}} &= \frac{M_{\text{Pl}} c^2}{k} = 1,42 \times 10^{32} \text{ K}. \end{aligned}$$

O que torna essas escalas interessantes em astrofísica é que várias grandezas estelares são potências simples delas. Além de $M_{\text{Ch}} \sim M_{\text{Pl}}^3/m_H^2$, tem-se por exemplo o número de bárions em uma estrela típica,

$$N \sim \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{m_H}\right)^3 \simeq 2 \times 10^{57},$$

e a razão entre forças elétrica e gravitacional entre dois prótons,

$$\frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{Gm_p^2} = 1,24 \times 10^{36},$$

número adimensional cuja magnitude é a razão última pela qual estrelas precisam de 10^{57} bárions para que a gravidade vença a eletrostática e comprima a matéria até temperaturas de fusão. A estrutura do universo observável é, em boa medida, uma consequência aritmética desses dois números.

Integrais e séries de uso frequente

Integrais de Planck. Para n inteiro positivo,

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(n)\zeta(n).$$

Os casos usados no texto: $n = 4$ dá $\Gamma(4)\zeta(4) = 6 \times \pi^4/90 = \pi^4/15$, que produz a constante de Stefan-Boltzmann; $n = 3$ dá $2\zeta(3) = 2,404$, que aparece na densidade numérica de fótons,

$$n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 = 4,11 \times 10^8 \text{ m}^{-3} \quad \text{para } T = 2,725 \text{ K}.$$

É esse número que, comparado à densidade de bárions, fornece $\eta \simeq 6 \times 10^{-10}$.

Integrais gaussianas.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}.$$

São elas que produzem os momentos da distribuição de Maxwell-Boltzmann e, portanto, a velocidade quadrática média $\langle v^2 \rangle = 3kT/m$ e o alargamento Doppler das linhas.

Expansões úteis. Para $x \ll 1$:

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2, \quad e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2}.$$

A primeira é a que gera a força de maré (com $n = -2$), a segunda dá o limite de Rayleigh-Jeans da lei de Planck, e a terceira aparece na conversão entre magnitudes e fluxos para diferenças pequenas: $\Delta m \simeq 1,086 \Delta F/F$.

Expansão multipolar

Qualquer potencial newtoniano fora de uma distribuição de massa pode ser expandido em polinômios de Legendre:

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{a}{r} \right)^n M_n P_n(\cos \theta),$$

com os primeiros polinômios

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \cos \theta, \quad P_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

O termo $n = 0$ é a massa total; $n = 1$ desaparece se a origem estiver no centro de massa; $n = 2$ é o quadrupolo, e é ele que gera marés (Capítulo 12), a precessão dos equinócios, o achatamento medido por J_2 e — em sua versão relativística — a emissão de ondas gravitacionais (Capítulo 11). É notável que um único termo de uma expansão apareça em contextos tão distantes; a razão é que todos eles decorrem da mesma coisa: desvios da simetria esférica.

Conversões e unidades

A astrofísica convive com dois sistemas de unidades, e a literatura mais antiga usa cgs. As conversões que mais aparecem:

$$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}, \quad 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}, \quad 1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N},$$

$$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}, \quad 1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}, \quad 1 \text{ eV}/k = 11\,605 \text{ K}.$$

A última é particularmente útil: ela permite traduzir instantaneamente energias atômicas em temperaturas. A ionização do hidrogênio, 13,6 eV, corresponde a $1,58 \times 10^5 \text{ K}$; a energia térmica no centro do Sol, 1,4 keV, a $1,6 \times 10^7 \text{ K}$.

Para distâncias e tempos:

$$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}, \quad 1 \text{ ano} = 3,156 \times 10^7 \text{ s}, \quad 1 \text{ pc/ano} \simeq 10^6 c.$$

E uma coincidência numérica frequentemente útil: $1 \text{ pc}/1 \text{ km s}^{-1} \simeq 10^6 \text{ anos}$, de modo que uma galáxia de 10 kpc com velocidades de 100 km s^{-1} tem tempo de travessia de 10^8 anos , sem calculadora.

Números de referência

Vale ter internalizadas algumas ordens de grandeza, porque elas permitem verificar rapidamente se um resultado faz sentido:

Grandeza	Valor
Densidade média do Sol	1410 kg m^{-3}
Densidade central do Sol	$1,5 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3}$
Temperatura central do Sol	$1,57 \times 10^7 \text{ K}$
Pressão central do Sol	$2,3 \times 10^{16} \text{ Pa}$
Densidade do meio interestelar difuso	$\sim 1 \text{ átomo por cm}^3$
Densidade de nuvem molecular	$10^2\text{--}10^6 \text{ por cm}^3$
Densidade de anã branca	$\sim 10^9 \text{ kg m}^{-3}$
Densidade nuclear	$2,3 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$
Densidade crítica do universo	$8,5 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$
Separação típica entre estrelas (disco)	$\sim 1 \text{ pc}$
Separação típica entre galáxias	$\sim 1 \text{ Mpc}$
Luminosidade de uma galáxia típica	$\sim 10^{10} L_{\odot}$
Energia de uma supernova (cinética)	$\sim 10^{44} \text{ J}$
Energia de uma supernova (neutrinos)	$\sim 3 \times 10^{46} \text{ J}$

Um roteiro de verificação

Ao terminar qualquer dedução, três testes rápidos detectam a maioria dos erros:

Dimensões. Os dois lados da equação têm a mesma dimensão? Este teste sozinho elimina erros algébricos com alta eficiência.

Limites. O que acontece quando um parâmetro vai a zero ou ao infinito? A expressão para a órbita deve reduzir-se ao caso circular quando $e \rightarrow 0$; a lei de Planck deve reduzir-se a Rayleigh-Jeans

quando $h \rightarrow 0$; a equação TOV deve reduzir-se ao equilíbrio hidrostático quando $c \rightarrow \infty$. Uma fórmula que falha em um limite conhecido está errada.

Ordem de grandeza. O número resultante é plausível? Uma estrela com temperatura central de 10^4 K ou uma galáxia com 10^5 estrelas indicam erro de potência de dez em algum lugar. A tabela acima serve exatamente para esse tipo de conferência.

Bibliografia

Livros de base. A organização conceitual, a sequência dos temas e o grau de aprofundamento desta apostila seguem os três títulos abaixo. O texto é original e não reproduz o deles; para demonstrações completas, exemplos resolvidos e listas de problemas, é a eles que se deve recorrer.

- Carroll, B. W.; Ostlie, D. A. *An Introduction to Modern Astrophysics*. 2ª ed. Cambridge University Press, 2017. — referência principal, capítulo a capítulo.
- Karttunen, H. et al. *Fundamental Astronomy*. Springer.
- Ryden, B.; Peterson, B. M. *Foundations of Astrophysics*. Cambridge University Press.

Arquivos de dados e acompanhamento.

- NASA/IPAC Extragalactic Database, SIMBAD, ESA Gaia Archive e NASA Exoplanet Archive para consultas orientadas de dados.
- *Gravitational Wave Open Science Center* (GWOSC): dados públicos de LIGO, Virgo e KAGRA, com tutoriais.
- MAST (*Mikulski Archive for Space Telescopes*): arquivos públicos de JWST, Hubble, Kepler e TESS.
- *Brokers* de alertas de transientes: ALeRCE, Fink, Lasair e ANTARES.
- Arquivos científicos do ESO, do ALMA e do Chandra, para dados em outras faixas do espectro.
- Para acompanhar resultados recentes: repositório arXiv (seções astro-ph) e as revisões anuais de *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*.